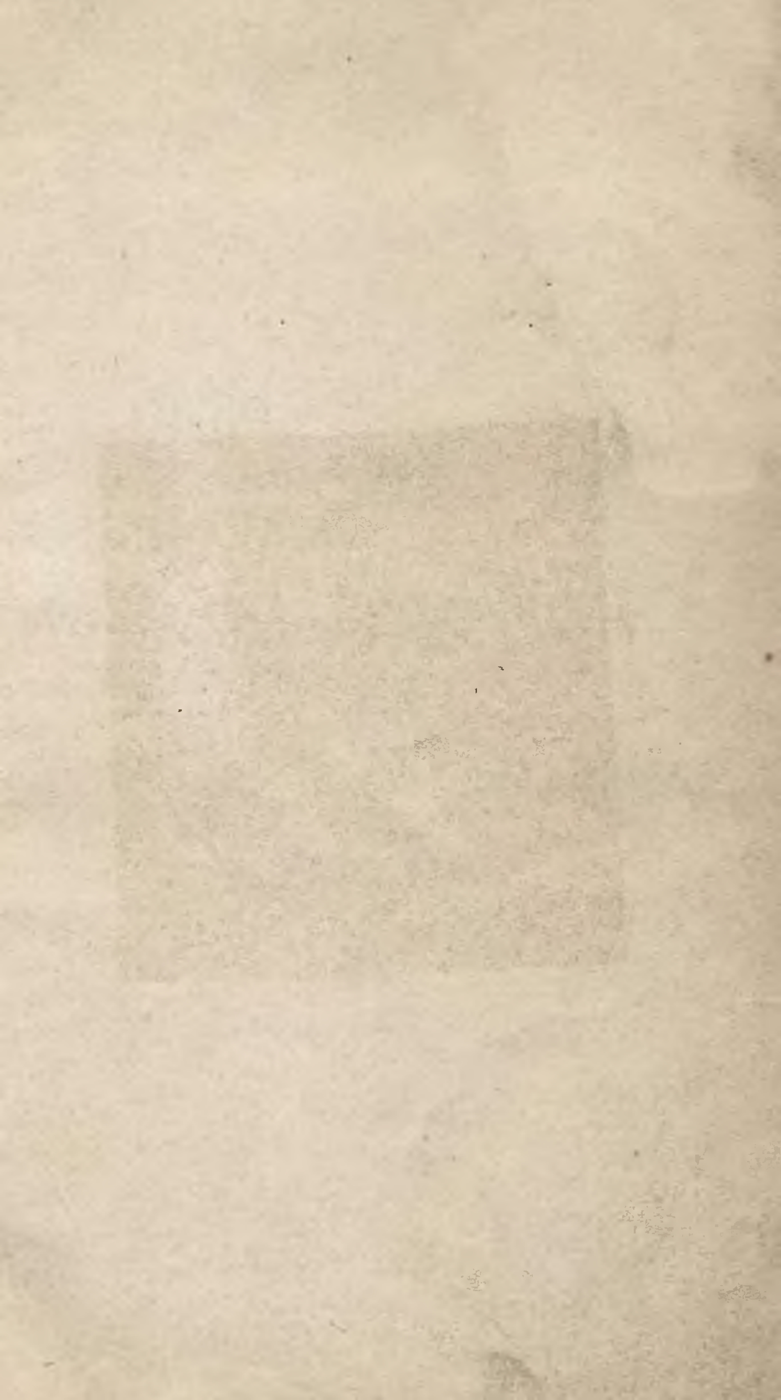
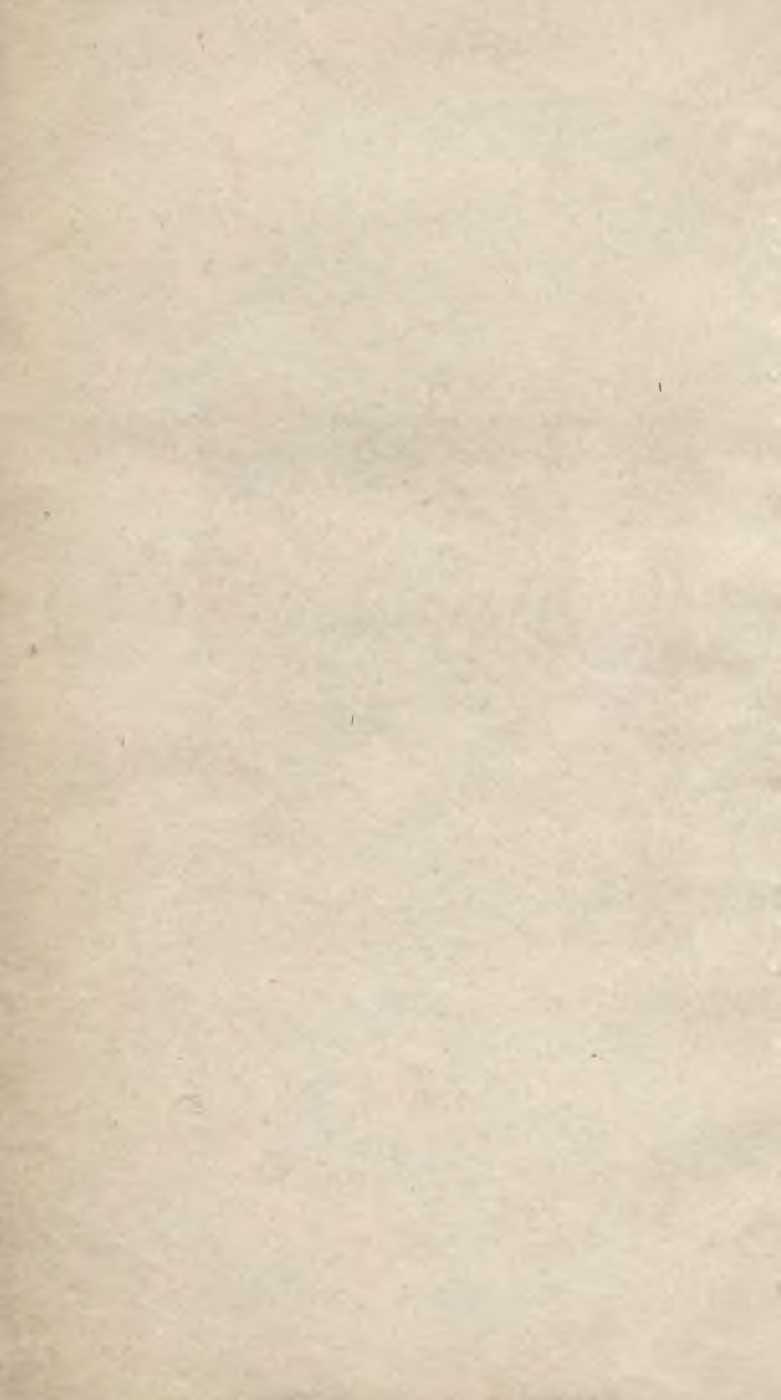






LEHRBUCH

DER

SPHÄRISCHEN ASTRONOMIE.

LEHRBUCH

DER

SPHÄRISCHEN ASTRONOMIE

VON

D^R^. F. BRÜNNOW,

PROFESSOR DER ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT VON MICHIGAN
UND DIRECTOR DER STERNWARTE ZU ANN ARBOR.

MIT EINEM VORWORT

VON

J. F. ENCKE,

DIRECTOR DER BERLINER STERNWARTE.



ZWEITE VERMEHRTE AUSGABE.

BERLIN.

FERD. DÜMMLER'S VERLAGSBUCHHANDLUNG.

(HARRWITZ UND GOSSMANN.)

1862.

Schon seit längerer Zeit ward der Mangel eines Lehrbuches der sphärischen Astronomie, wie der Stand der neueren Wissenschaft es verlangt, schmerzlich empfunden. Die Instrumente, die Art sie zu behandeln, die Probleme, die man sich stellt, die Methoden, nach welchen man sie zu lösen sich bestrebt, sind sämmtlich von denen der früheren Zeit so gänzlich verschieden, daſs man das für seine Zeit und für die Geschichte der Astronomie hochwichtige vortreffliche Lehrbuch der Astronomie von Lalande nicht mehr für ein Lehrbuch unserer Zeit ansehen kann, und die neuerdings erschienenen Lehrbücher von Piazzi, Santini, Bohnenberger, Littrow und Andern mehr, so vorzüglich sie, von dem Standpunkte, auf den ihre Verfasser sich stellten, aus betrachtet, auch sein mögen, geben doch theils für den Zweck der sphärischen Astronomie zu viel, indem sie die ganze Astronomie umfassen, theils zu wenig, indem sie gerade da, wo besonders der, welcher auf das Selbststudium angewiesen ist, eine Aufklärung wünscht, oder die Mittel kennen lernen will, wie man etwas gefunden, nur historisch oder auf erzählende Weise das Resultat anführen. Auſserdem sind, wenngleich Bohnenberger's Astronomie für seine Zeit musterhaft in der Angabe der genauesten Zahlenbestimmungen ist, so viele neue Bestimmungen in unserer Zeit gemacht worden, daſs man fast

bei allen Werken, welche diesen Gegenstand behandeln, Den welcher sie benutzen will, darauf aufmerksam zu machen genöthigt ist, daſs er für den wirklichen Gebrauch nach den neuesten Angaben sich jedesmal umsehen müsse. Unsere neuere sphärische Astronomie war bisher im Grunde nur aus dem Studium der Zeitschriften, von der monatlichen Correspondenz an bis zu den astronomischen Nachrichten, und aus den Einleitungen zu den Beobachtungswerken, besonders den Königsbergern, zu erlernen, und wenn auch Der, welcher die schöne Blüthenzeit der Astronomie seit dem Beginne dieses Jahrhunderts wenigstens zum gröſseren Theile mit durch gelebt hatte, wuſste, wo er über die einzelnen Abschnitte etwas finden werde, so ward doch eben deshalb dem neu Eintretenden der Zugang sehr erschwert.

Das Bedürfniſs eines astronomischen Lehrbuchs bildete fast immer, seit ich das Glück hatte mit Bessel persönlich bekannt zu werden, den Gegenstand unseres Gespräches, und sehr dringend bat ich ihn zu wiederholten Malen, er möge die Lücke ausfüllen. Wenngleich er früher wenigstens es nicht ganz ablehnte, so war doch später, bei den überhäuften Arbeiten, durch welche er alle Theile der Astronomie so unendlich bereichert hat, an die Ausführung nicht zu denken, und in der That würde Bessel, wenn er es sich vorgesetzt hätte, gewiſs ein Werk für unsere Zeit, wie das Lalandesche für das vorige Jahrhundert, an Vollständigkeit und Gründlichkeit mit der ihm eigenen Eleganz geliefert haben, aber fast glaube ich, daſs er das Bedürfniſs der Lernenden, die sich den Eintritt in die Wissenschaft erst erwerben wollen, und daher die einzelnen Untersuchungen nur bis zu einem gewissen Grade der Erschöpfung des Gegenstandes fortgeführt zu sehen wünschen, nicht so vollständig befriedigt haben würde, als sie erwartet hätten. Er würde ihnen zu viel geboten haben. Für ein Lehrbuch in diesem Sinne eignet sich als

Verfasser weit mehr ein jüngerer Mann, dem es noch vorschwebt, welche Hülfsmittel zu entbehren ihm am Schmerzlichsten war, und der sich auf das beschränkt, was ihm als das dem Standpunkte der Eintretenden in die Wissenschaft Angemessenste, noch in lebhafter Erinnerung ist.

Am Schmerzlichsten mufste Der den Mangel eines Lehrbuches empfinden, der, wie ich seit länger als zwanzig Jahren es mir zur Pflicht gemacht hatte, jährlich in einem Semester Vorlesungen über sphärische Astronomie hielt, nicht in der Absicht, die Wissenschaft in gröfseren Kreisen zu verbreiten, sondern mit dem Wunsche, nach und nach einige jüngere Kräfte ihr zu gewinnen, welche nicht blofs die äufsere Annehmlichkeit der Bekanntschaft mit den Himmelserscheinungen durch Benutzung der gröfseren Instrumente zu geniefsen hofften, als vielmehr auch mit den eigentlichen Arbeiten sich bekannt zu machen und daran Theil zu nehmen, Neigung hätten; Arbeiten, welche diese Wissenschaft vermöge ihrer Verbindung der Praxis mit der Theorie mehr wie manche andere auszuführen genöthigt ist, wenn sie den eingenommenen Standpunkt behaupten will. Bei der Kürze eines Semesters, bei der häufig nicht grofsen Vorbereitung in den Hülfswissenschaften, bei der Unbekanntschaft mit den Instrumenten und ihrem Gebrauch, bei der kaum zu vermeidenden Unsicherheit von meiner Seite, welche der vielen verschiedenen Theile dem kleinen Kreise gerade am meisten Interesse einflöfsen würde, war es immer unmöglich, auch nur einige Vollständigkeit zu erzielen, und indem ich in dem einen Semester bald das Fernrohr, bald die Correctionen der Refraction, Aberration und Parallaxe, bald die Beobachtungen an den Meridianinstrumenten oder mit dem Spiegelsextanten, bald die nautischen Probleme mehr hervorhob, fühlte ich doch immer, dafs den Theilnehmern mehr Einzelnheiten als ein geschlossenes Ganze geboten ward. Ein einigermafsen

vollständiges Lehrbuch würde diesen Mangel an Befriedigung beseitigt haben, da es bei kürzerer Erwähnung wichtigerer Theile möglich gewesen wäre, darauf zu verweisen, während es jetzt nicht verlangt werden konnte, dafs aus den einzelnen Abhandlungen die Lücken ergänzt werden sollten.

Ungeachtet dieser von mir sehr offen eingestandenen Lückenhaftigkeit des Vortrages, wie sie kaum bei dem Reichthum des Gegenstandes zu vermeiden war, ist es mir durch die eigenthümlichen Verhältnisse von Berlin doch fast jedes Jahr gelungen, einen oder den andern Theilnehmer an den Vorlesungen zu kürzerer oder längerer Beschäftigung mit der Wissenschaft der Astronomie zu gewinnen und zu manchen zum Theil sehr gelungenen Arbeiten zu veranlassen. Vielleicht ist eine Ursache dieses Erfolges, welcher mir die nicht angenehme Empfindung erträglich machte, von dem grofsen Ganzen immer nur Bruchstücke zu geben, darin zu suchen, dafs, wie mein Wunsch bei dem eigenen Studium immer dahin geht, nicht blofs Sachen in das Gedächtnifs aufzunehmen, sondern lieber einen einzelnen Theil mir wo möglich ganz anzueignen und die Form zu suchen, unter welcher er mir mit meinem Ideengange am Besten in Einklang zu bringen ist, ohne dabei diese Form als die absolut beste anzusehen, sondern nur als die, welche meiner Individualität am Besten entspricht: so auch bei denen welche mir näher bekannt werden, mein Streben immer dahin gerichtet ist, ihrer selbstständigen Entwickelung nicht hinderlich zu werden. Es gab selbst Zeiten, wo ein besonders thätiger Wetteifer bei meinen jüngeren Freunden ein sehr erfreuliches Leben auf der Sternwarte hervorrief, und zu einer dieser Zeiten rechne ich auch die Periode, in welcher der Verfasser dieses Werkes, in Verbindung mit dem jetzigen Observator auf der Leipziger Sternwarte Herrn d'Arrest, aus eigenem freiem Antriebe längere Zeit hindurch an den Arbeiten auf

der Sternwarte einen lebhaften Antheil nahm und durch unmittelbare Anwendung mit den verschiedenen Theilen der Astronomie sich bekannt machte.

Die Erwähnung dieser Veranlassung zu der Bekanntschaft mit dem Verfasser dieses Werkes habe ich für nöthig gehalten, um die Worte, welche er in seiner Vorrede über die Benutzung meiner Vorlesungen äufsert, in ihrem wahren Sinne erscheinen zu lassen. So viel ich aus dem Buche zu meiner grofsen Freude ersehen habe, hat der Verfasser überall sich bemüht, die verschiedenen Theile selbstständig zu bearbeiten. Sind ihm dabei hin und wieder die Gesichtspunkte, aus welchen ich einzelne Abschnitte zu betrachten pflegte, als die ihm ansprechendsten erschienen, so ist dabei von meiner Seite so wenig daran zu denken, ihm auch nur im Mindesten die eigene Bearbeitung streitig zu machen, als ich ihm auch nicht den leisesten Vorwurf machen dürfte, wenn er in andern Abschnitten, und bei Weitem den meisten, seinen eigenen Weg verfolgt hat, verschieden von dem meinigen. Der Verfasser eines Werkes dieser Art, bei dem die Auswahl des ihm als des vorzüglichsten erscheinenden Weges die Hauptsache ist (etwas ganz Neues wird man bei einem solchen Lehrbuche gewifs nicht erwarten, wohl aber eigenes Nachdenken im Anordnen und Auswählen fordern), soll die ganze Verantwortung tragen, dafür aber auch die Belohnung, wenn sein Streben sich als erfolgreich beweist, eben so ungetheilt in Anspruch nehmen.

Es ist hier nicht der Ort, über das Ganze oder Einzelne ein Urtheil zu fällen, wozu auch die Kürze der Zeit, in welcher mir die Druckbogen mitgetheilt wurden, mich nicht berechtigen würde. So wie ich indessen mit lebhafter Freude die erste Nachricht aufnahm, dafs der Verfasser seine astronomische Mufse in Bilk zu der Ausarbeitung dieses Lehrbuches verwandt habe, so möchte ich es auch als ein

günstiges Zeichen für die wissenschaftliche Richtung in unserm Vaterlande ansehen, wenn, neben den vielen populären Schriften über Astronomie, auch dieses Buch, welches die ernstere Theilnahme an dieser Wissenschaft in Anspruch nimmt, die Anerkennung finden sollte, welche den Verfasser ermuthigen könnte, auf dem begonnenen Pfade mit Freudigkeit fortzuschreiten.

Berlin, im November 1851.

J. F. Encke.

Vorrede zur ersten Auflage.

Die Herausgabe eines Lehrbuchs der sphärischen Astronomie bedarf wohl kaum einer Rechtfertigung, da die vorhandenen älteren Werke über diesen Theil der Astronomie, wenn auch zu ihrer Zeit zum Theil vortrefflich, nicht mehr dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft entsprechen. In neuester Zeit wurde zwar durch das Erscheinen von Sawitsch's trefflicher practischer Astronomie diese lange gefühlte Lücke in der astronomischen Litteratur zum Theil ausgefüllt; immer fehlte es aber noch an einem Lehrbuche, in welchem alle Hauptprobleme der sphärischen Astronomie behandelt wurden, und woraus namentlich Diejenigen, welche sich einem gründlichen Studium dieser Wissenschaft widmen wollen, die verschiedenen Methoden kennen lernten, deren man sich jetzt bedient, um die oft schwierige Lösung der verschiedenen Probleme in einer eleganten und für die Anwendung bequemen Weise möglich zu machen. Ich hoffe, durch die Herausgabe des vorliegenden Lehrbuchs diesem Bedürfnisse einigermaſsen entsprochen zu haben. Man wird in demselben keines der Hauptprobleme der sphärischen Astronomie vermissen und durch das Studium desselben die Mittel finden, auch solche Aufgaben, welche grade nicht in demselben behandelt sind, mit Leichtigkeit selbst aufzulösen. Da das Buch hauptsächlich für den Selbstunterricht bestimmt ist, so habe ich mich bemüht, alle Probleme möglichst deutlich zu be-

handeln und nirgends eine Schwierigkeit übrig zu lassen; daher sind an einzelnen Stellen auch rein mathematische Entwickelungen eingeschaltet, die man in den gewöhnlichen mathematischen Lehrbüchern wenigstens nicht in der Weise, als es grade hier nöthig war, vorfindet. Aus demselben Grunde wurde in der Einleitung eine Ableitung der sphärisch-trigonometrischen Formeln und der Interpolationsformeln gegeben, weil später grade auf diese am häufigsten hingewiesen werden mufste. Sehr gern wäre hier auch eine Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate aufgenommen worden, um auf diese Weise in der Einleitung Alles beisammen zu haben, was später häufiger Anwendung findet, wenn nicht dadurch die Einleitung selbst über Gebühr verlängert worden wäre. Ich habe mich darauf beschränken müssen, diese Methode da, wo dieselbe Anwendung findet, kurz zu erwähnen.

Im Ganzen ist in der Darstellung eine synthetische Methode befolgt und der Stoff möglichst systematisch geordnet worden, theils um so wenig als möglich im Vortrage einer Materie auf später Vorkommendes hinweisen zu müssen, theils um für den Lernenden das Aufsuchen der einzelnen Probleme in dem Buche zu erleichtern. Ich hoffe, dafs die hiernach gewählte Aufeinanderfolge der einzelnen Materien nicht unpassend sein wird. Etwas abweichend von früheren Darstellungen habe ich mich bei der Aufstellung der Grundgleichungen der Probleme nicht wie gewöhnlich der Formeln der sphärischen Trigonometrie, sondern fast durchgängig der Transformation der Coordinaten bedient, um der lästigen Betrachtung einzelner Fälle je nach den verschiedenen Werthen, welche die Winkel eines Dreiecks in verschiedenen Lagen haben können, überhoben zu sein. Für Diejenigen, bei welchen diese Art der Darstellung weniger Beifall finden dürfte, ist indessen fast immer auf die Herleitung der Formeln aus den sphärischen Dreiecken hingewiesen, überdies auch in der Einleitung der Zusammenhang zwischen den sphärisch-trigonometrischen Formeln und den Formeln für die Transformation der Coordinaten gegeben worden.

Was die Ausarbeitung dieses Lehrbuchs besonders erleichterte, war der Umstand, dafs ich das Glück gehabt habe, die Vorlesungen meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Professor Encke, grade über den vorliegenden Gegenstand zu hören, und die Anordnung des Ganzen, sowie die Art und Weise der Entwickelung der einzelnen Probleme, ist auch einigermafsen derjenigen ähnlich, welche von Herrn Professor Encke in seinen Vorlesungen pflegte beobachtet zu werden. Indefs ist diese Aehnlichkeit nur ganz im Allgemeinen zu verstehen, da die hier gewählte streng systematische Form einen sehr abweichenden Gang in der Darstellung des Ganzen bedingte und auch vielfach bei einzelnen Problemen ein andrer Weg eingeschlagen werden mufste, wie er grade für die hier gewählte Behandlung des Gegenstandes angemessen schien.

Von Schriften, welche ich bei der Bearbeitung des Buches benutzt habe, sind besonders die von Bessel zu nennen, namentlich dessen „Astronomische Untersuchungen II Bde. Königsberg 1841 und 1842“, die Tabulae Regiomontanae, sowie verschiedene Aufsätze von demselben in v. Zach's monatlicher Correspondenz und in den astronomischen Nachrichten. Ebenso wurden verschiedene Aufsätze von Herrn Geheimrath Gaufs, Herrn Hofrath Hansen und Herrn Professor Encke theils in den genannten Zeitschriften, theils auch von dem Letzteren in den Anhängen zu den astronomischen Jahrbüchern benutzt. In den meisten Fällen sind übrigens die Quellen bei den einzelnen Abschnitten noch besonders aufgeführt.

Die Correctur des Buches ist hauptsächlich von Herrn Vogel in Berlin besorgt und mir wegen der Entfernung des Druckorts nur eine einzige gestattet gewesen. Herr Vogel hat eine besondre Sorgfalt auf die Correctheit der Formeln verwandt, sodafs diese wenig zu wünschen übrig läfst; dagegen sind im Texte auf den ersten Bogen verschiedene, leicht in die Augen fallende Druckfehler stehen geblieben, die ich zu entschuldigen bitte. Auf den spätern Bogen, wo

häufig zwei Correcturen von mir selbst gelesen wurden, wird man dergleichen Fehler selten finden.

Ich empfehle das vorliegende Werk dem nachsichtigen Urtheile der Astronomen. Es sollte mich unendlich freuen, wenn dasselbe seinem Zwecke einigermaſsen entsprechend befunden und dadurch das Studium der sphärischen Astronomie erleichtert würde.

Bilk im November 1851.

F. Brünnow.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Da die erste Auflage dieses Lehrbuchs im vorigen Jahre gänzlich vergriffen war, so wurde ich schon damals von der Verlagshandlung ersucht, eine neue Auflage vorzubereiten. Obwohl ich die über Erwarten günstige Aufnahme des Buches mit grofsem Danke anerkannte, so war ich mir doch wohl bewufst, dafs dieselbe hauptsächlich dem dringenden Bedürfnisse eines solchen Lehrbuchs zuzuschreiben war, wie auch den wohlwollenden Worten, welche mein hochverehrter Lehrer, Herr Professor Encke, die Güte hatte, demselben voranzuschicken. Es war daher zuerst meine Absicht, eine vollständige Umarbeitung des Buches vorzunehmen. Da mir dies aber meines Gesundheitszustandes wegen nicht gestattet war, so habe ich wenigstens solche Zusätze und Verbesserungen, welche mir am nothwendigsten erschienen, gemacht, und ich hoffe, dafs diese neue Auflage wenigstens die beiden Hauptprobleme der sphärischen Astronomie, die Bestimmung der Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel, sowie die des Orts des Beobachters auf der Erdkugel nebst Allem, was darauf irgend Bezug hat, in ziemlicher Vollständigkeit behandelt. Obwohl diese Zusätze nicht unbedeutend sind, wie eine nähere Vergleichung der beiden Auflagen zeigt, namentlich auch eine gedrängte Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate der Einleitung hinzugefügt ist, so ist doch wieder durch den kleineren Druck der Formeln und durch

wesentliche Abkürzungen an einigen Stellen, wo die früher gegebenen Entwickelungen unnöthig weitläuftig waren, so viel gewonnen, daſs sich die Seitenzahl der neuen Auflage kaum gegen die frühere vermehrt hat.

Auf die Correctur des Drucks ist diesmal besondere Sorgfalt verwandt. Herr Powalky in Berlin hatte die Güte, eine Correctur zu besorgen, während ich selbst hier in Goslar, wo ich mich den Sommer über zur Herstellung meiner Gesundheit aufgehalten, eine zweite gelesen habe. Einige trotzdem stehen gebliebene Fehler, die mir bei nochmaligem Durchlesen auffielen, sind im beigefügten Verzeichnisse aufgeführt, und auſser diesen werden sich hoffentlich nur wenige finden. Die Verlagshandlung hat wie immer für eine schöne Ausstattung des Buches Sorge getragen.

So darf ich denn wohl die Hoffnung aussprechen, daſs die gütige Aufnahme, welche die erste Auflage des Buches erfahren, auch der neuen zu Theil werden wird, und daſs das Lehrbuch in seiner jetzigen Gestalt seinem Zweck besser entsprechen und dazu beitragen wird, das Studium der Wissenschaft den in dieselbe Eintretenden in etwas zu erleichtern.

Goslar im September 1862.

F. Brünnow.

Inhaltsverzeichnifs.

Einleitung.

A. Die Transformation der Coordinaten. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

B. Die Interpolationsrechnung.

C. Theorie einiger im Folgenden öfters angewandten bestimmten Integrale.

D. Die Methode der kleinsten Quadrate.

E. Die Entwickelung periodischer Functionen aus gegebenen numerischen Werthen.

Sphärische Astronomie.

Erster Abschnitt.

I. Die verschiedenen Systeme von Ebenen und Kreisen an der scheinbaren Himmelskugel.

II. Die Verwandlung der verschiedenen Systeme von Coordinaten in einander.

III. Die Aberration.

Vierter Abschnitt.

I. Von der Reduction der mittleren Oerter der Sterne auf scheinbare und umgekehrt.

II. Bestimmung der Rectascensionen und Declinationen der Sterne, sowie der Schiefe der Ecliptic.

III. Von der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der zur Reduction der Sternörter angewandten Constanten aus Beobachtungen.

A. Bestimmung der Constanten der Refraction.

B. Bestimmung der Constanten der Aberration und Nutation, sowie der jährlichen Parallaxe der Sterne.

Fünfter Abschnitt.

IV. Bestimmung der Zeit und der Polhöhe durch die Beobachtung der Azimute der Sterne.

V. Bestimmung des Winkels zwischen den Meridianen zweier verschiedenen Orte auf der Erdoberfläche oder des Unterschiedes ihrer geographischen Längen.

Sechster Abschnitt.

I. Bestimmung der Gestalt und Gröfse der Erde.

II. Bestimmung der Horizontalparallaxen der Gestirne.

Siebenter Abschnitt.

I. Einige alle Instrumente allgemein betreffende Gegenstände.

A. Gebrauch des Niveau's bei Beobachtungen.

B. Der Nonius oder Vernier und das Ablesungsmikroskop.

C. Excentricitäts- und Theilungsfehler der Kreise.

D. Von der Biegung oder der Einwirkung der Schwere auf die Kreise und das Fernrohr.

E. Von der Untersuchung der Mikrometerschrauben.

II. Das Azimutal- und Höheninstrument.

III. Das Aequatoreal.

IV. Das Mittagsfernrohr und der Meridiankreis.

V. Das Passageninstrument im ersten Verticale.

VI. Höheninstrumente.

VII. Instrumente, welche zur Messung des relativen Ortes nahe stehender Gestirne dienen. (Mikrometer und Heliometer.)

VIII. Verbesserung der Mikrometerbeobachtungen wegen der Refraction.

IX. Einfluſs der Präcession, Nutation und Aberration auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Sterne.

Verbesserungen.

pag.	Zeile		von		statt	lies
pag. 14	7	Zeile	von unten	statt	$C db$	lies $\sin C db$
„ 27	7	„	„ oben	„	$a - w$	lies $a + w$
„ 31	13	„	„ unten	„	$\frac{n^2}{1.2} f''(a)$	lies $\frac{n^2}{1.2} f'''(a)$
„ 33	9	„	„ oben	„	$\frac{df[a+(n+\frac{1}{2})w]}{da}$	lies $\frac{df[a+(n+\frac{1}{2})w]}{da}$
„ 37	2	„	„ „	„	Nenner	lies Zähler
„ 45	12	„	„ unten	„	dafs	lies das
„ 48	1	„	„ oben	„	die	„ das
„ 63	6	„	„ „	„	$-\Delta$	„ $=\Delta$
„ 67	4	„	„ unten	„	Glieder	lies Gliedern
„ 96	20	„	„ oben	„	B	lies dB
„ 101	2	„	„ „	„	ν	„ e
„ 113	14	„	„ unten	„	aber	lies also
„ 124	15	„	„ oben	„	$\varepsilon\varepsilon'$	„ EE'
„ 145	19	„	„ „	„	Glieder	lies Gliedern
„ 168	14	„	„ „	„	$\frac{a \sin z}{\mu_0}$	„ $a \sin z \mu_0$
„ 174	6	„	„ unten		vor „Die“ füge hinzu: „Dieselben Grenzen sind dann auch für die Integration nach x zu nehmen.	
„ 175	8 u. 15		„ oben	statt	$d\zeta$	lies $\delta\zeta$
„ 176	14	„	„ „	„	$d\zeta$	„ $\delta\zeta$
„ 176	7	„	„ unten	„	$\frac{d^2(\varphi(x^2)e^{-x})}{dx}$	lies $\frac{d^2(\varphi(x^2)e^{-x})}{dx^2}$
„ 178	9	„	„ „	„	$3^{\frac{1}{2}}$	lies $3^{\frac{3}{2}}$
„ 182	5 u. 6	„	„ oben	„	$\int_T^\infty e^{-t^2}dt$	lies $\int_{T_1}^\infty e^{-t^2}dt$ und $\int_{T_2}^\infty e^{-t^2}dt$
„ 187	2	„	„ „	„	$\delta\zeta'$	lies $d\zeta'$
„ 199	9	„	„ unten	„	$\odot + A - a$	lies $\odot + A - \alpha$
„ 221	2	„	„ oben	„	$t'' - t$	lies $t'' - t'$
„ 227	13	„	„ unten	„	obere	„ obige
„ 244	12	„	„ „	„	(a)	„ (b)
„ 258	17	„	„ oben	„	$a \sin D$	„ $a \sin D$
„ 316					Die dritte Formel von unten ist mit (α) zu bezeichnen.	
„ 322	5	Zeile	von unten	statt	$\frac{1}{2}(\delta - \delta)$	lies $\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$
„ 324	1	„	„ oben	„	18	„ 19
„ 378	5	„	„ „	„	$\Theta - \Theta$	„ $\Theta' - \Theta$
„ 453	4	„	„ „	„	$a \cos z$	„ $a' \cos z$
„ 478	14	„	„ „	„	$\tau' - \tau'' = \Delta t$	lies $\tau' - \tau'' - \Delta t$
„ 549	3	„	„ „	„	$\sec\left(\frac{b+\gamma}{2}\right)^2$	„ $\sec\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2$



Einleitung.

A. Die Transformation der Coordinaten. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

1. In der sphärischen Astronomie betrachtet man die Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel, indem man dieselben vermittelst sphärischer Coordinaten auf gewisse gröfste Kreise der Himmelskugel bezieht und die Relationen zwischen den auf verschiedene gröfste Kreise bezogenen Coordinaten aufsucht. Statt durch die sphärischen Coordinaten kann man den Ort eines Gestirns auch durch Polarcoordinaten im Raume angeben, nämlich durch die Winkel, welche die von ihm nach dem Mittelpunkte der scheinbaren Himmelskugel gezogenen geraden Linien mit gewissen Ebenen bilden und durch die Entfernung von diesem Mittelpunkte selbst, die hier als Radius der scheinbaren Himmelskugel immer gleich der Einheit gesetzt wird. Diese Polarcoordinaten lassen sich endlich leicht durch rechtwinklige Coordinaten ausdrücken. Die ganze sphärische Astronomie wird daher auf die Transformation rechtwinkliger Coordinaten zurückkommen, wofür zuerst die allgemeinen Ausdrücke gesucht werden sollen.

Denkt man sich in einer Ebene ein rechtwinkliges Axenkreuz und bezeichnet man die Abscisse und Ordinate irgend eines Punktes mit x und y, mit r und v aber die Entfernung des Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten und den Winkel, den diese Linie mit der positiven Seite der Axe der x macht, so ist:

$$x = r \cos v$$
$$y = r \sin v$$

Denkt man sich dann ein anderes Axenkreuz in derselben Ebene, so daſs der Durchschnittspunkt mit dem des vorigen zusammenfällt und bezeichnet für denselben Punkt die entsprechenden auf das neue Axenkreuz bezogenen Coordinaten und Winkel mit x', y' und v', so hat man

$$x' = r \cos v'$$
$$y' = r \sin v'$$

Nennt man dann w den Winkel, welchen die positive Seite der Axe der x' mit der positiven Seite der Axe der x macht und zählt alle Winkel in demselben Sinne von 0^0 bis 360^0, so hat man allgemein $v = v' + w$, also:

$$x = r \cos v' \cos w - r \sin v' \sin w$$
$$y = r \sin v' \cos w + r \cos v' \sin w$$

oder:

$$\begin{aligned} x &= \quad x' \cos w - y' \sin w \\ y &= \quad x' \sin w + y' \cos w \end{aligned} \qquad (1)$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} x' &= \quad x \cos w + y \sin w \\ y' &= - x \sin w + y \cos w \end{aligned} \qquad (1a)$$

Diese Formeln gelten allgemein für alle positiven oder negativen Werthe von x und y und für alle Werthe von w von 0^0 bis 360^0.

2. Es seien die Coordinaten eines Punktes O auf beliebige, auf einander senkrechte Axen bezogen, x, y und z, es sei ferner a' der Winkel, welchen der Radius vector mit seiner Projection auf die Ebene der $x\,y$, B' der Winkel, den diese Projection mit der Axe der x macht (d. h. also der Winkel, welchen die durch den Punkt O und die positive Axe der z gelegte Ebene mit der durch die positiven Axen der x und z gelegten Ebene macht, von der positiven Seite der Axe der x nach der positiven Seite der Axe der y von 0^0 bis 360^0 herum gezählt), so ist, wenn man die Entfernung des Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten gleich eins setzt:

$$x = \cos B' \cos a', \quad y = \sin B' \cos a', \quad z = \sin a'$$

Nennt man dagegen a den Winkel, den der Radius vector mit der positiven Axe der z macht und zählt denselben von der positiven Seite der Axe der z nach der positiven Seite der Axen der x und y von 0^0 bis 360^0 herum, so hat man:

$$x = \sin a \cos B', \quad y = \sin a \sin B', \quad z = \cos a.$$

Denkt man sich nun ein zweites Coordinatensystem und zwar so, daſs die Axe der y' mit der Axe der y zusammenfällt und die Axen der x' und z' mit den Axen der x und z den Winkel c machen, nennt man b den Winkel, welchen der Radius vector mit der positiven Axe der z' macht, A' dagegen den Winkel, welchen die durch O und die positive Axe der z' gelegte Ebene mit der Ebene macht, welche durch die positiven Axen der x und z geht, beide Winkel in demselben Sinne wie a und B' gezählt, so hat man:

$$x' = \sin b \cos A', \quad y' = \sin b \sin A', \quad z' = \cos b$$

und da auch nach den Formeln für die Transformation der Coordinaten:

$$\begin{aligned} z &= x' \sin c + z' \cos c \\ y &= y' \\ x &= x' \cos c - z' \sin c \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin b \sin c \cos A' + \cos b \cos c \\ \sin a \sin B' &= \sin b \sin A' \\ \sin a \cos B' &= \sin b \cos c \cos A' - \cos b \sin c \end{aligned}$$

3. Denkt man sich nun um den Anfangspunkt der Coordinaten eine Kugel mit beliebigem Halbmesser (der hier gleich eins genommen wird) beschrieben und die Durchschnittspunkte der Axen der z und z' mit der Oberfläche der Kugel unter einander und mit dem eben betrachteten Punkte O durch Bogen gröſster Kreise verbunden, so werden diese Bogen ein sphärisches Dreieck bilden, wenn man nämlich dasselbe in seiner allgemeinsten Bedeutung auffaſst, wo also Winkel sowohl als Seiten gröſser als 180° sein können. Die drei Seiten OZ, OZ' und $Z'Z$ dieses sphärischen Dreiecks werden respective gleich a, b und c sein. Der sphärische Winkel A am Punkte Z' wird als Winkel zwischen der durch O und Z' und der durch Z' und Z und dem Mittelpunkte der Kugel gelegten Ebene gleich A' sein, dagegen der Winkel B am Punkte z allgemein gleich $180 - B'$. Führt man also A und B statt A' und B' in die in No. 2 gefundenen Gleichungen ein, so erhält man die für jedes sphärische Dreieck geltenden Formeln:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{aligned}$$

Diese sind die drei Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie, die also nichts weiter als eine einfache Transformation der Coordinaten ausdrücken.

Da man jede Ecke des sphärischen Dreiecks als die Projection des Punktes O auf die Kugeloberfläche und die beiden andern als die Durchschnittspunkte der Axen der z und z' mit derselben ansehen kann, so müssen die vorstehenden Formeln auch für jede andre Seite und den anliegenden Winkel gelten, wenn man nur die übrigen Seiten und Winkel gehörig mit einander vertauscht. Man erhält so, wenn man alle Fälle umfaſst:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \end{aligned} \quad (4)$$

4. Aus diesen Formeln lassen sich nun die übrigen Formeln der sphärischen Trigonometrie leicht herleiten. Dividirt man die Formeln (4) durch die entsprechenden Formeln (3), so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin A \operatorname{cotang} B &= \operatorname{cotang} b \sin c - \cos c \cos A \\ \sin A \operatorname{cotang} C &= \operatorname{cotang} c \sin b - \cos b \cos A \\ \sin B \operatorname{cotang} A &= \operatorname{cotang} a \sin c - \cos c \cos B \\ \sin B \operatorname{cotang} C &= \operatorname{cotang} c \sin a - \cos a \cos B \\ \sin C \operatorname{cotang} A &= \operatorname{cotang} a \sin b - \cos b \cos C \\ \sin C \operatorname{cotang} B &= \operatorname{cotang} b \sin a - \cos a \cos C \end{aligned} \quad (5)$$

Schreibt man die letzte dieser Gleichungen so:

$$\sin C \cos B = \frac{\cos b \sin a \sin B}{\sin b} - \cos a \sin B \cos C$$

so erhält man:

$$\sin C \cos B = \cos b \sin A - \cos a \sin B \cos C$$

oder:

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

eine Gleichung, welche der ersten der Gleichungen (4) entspricht und nur Winkel statt der Seiten und umgekehrt ent-

hält. Durch Vertauschung der Buchstaben erhält man die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\
\sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\
\sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\
\sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b \\
\sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\
\sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c
\end{aligned} \tag{6}$$

und durch Division dieser Gleichungen durch die entsprechenden der Gleichungen (3):

$$\begin{aligned}
\sin a \operatorname{cotang} b &= \operatorname{cotang} B \sin C + \cos C \cos a \\
\sin a \operatorname{cotang} c &= \operatorname{cotang} C \sin B + \cos B \cos a \\
\sin b \operatorname{cotang} a &= \operatorname{cotang} A \sin C + \cos C \cos b \\
\sin b \operatorname{cotang} c &= \operatorname{cotang} C \sin A + \cos A \cos b \\
\sin c \operatorname{cotang} a &= \operatorname{cotang} A \sin B + \cos B \cos c \\
\sin c \operatorname{cotang} b &= \operatorname{cotang} B \sin A + \cos A \cos c
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichungen (6) geben ferner:

$$\begin{aligned}
\cos A \sin C &= \sin B \cos a - \sin A \cos C \cos b \\
\cos B \sin C &= \sin A \cos b - \sin B \cos C \cos a
\end{aligned}$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit $\sin C$, und substituirt den Werth von $\sin A \sin C \cos b$ aus der zweiten Gleichung in die erstere, so erhält man:

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C$$

und durch Vertauschung der Buchstaben die drei den Formeln (2) entsprechenden Gleichungen, in denen wieder Winkel statt der Seiten und umgekehrt vorkommen:

$$\begin{aligned}
\cos A &= \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C \\
\cos B &= \sin A \sin C \cos b - \cos A \cos C \\
\cos C &= \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B
\end{aligned} \tag{8}$$

5. Addirt man die beiden ersten der Formeln (3), so erhält man:

$$\sin a \, [\sin B + \sin C] = \sin A \, [\sin b + \sin c]$$

oder:

$$\sin \tfrac{1}{2} a \cos \frac{B-C}{2} \,.\, \cos \tfrac{1}{2} a \sin \frac{B+C}{2} = \sin \tfrac{1}{2} A \sin \frac{b+c}{2} \,.\, \cos \tfrac{1}{2} A \cos \frac{b-c}{2}$$

und, wenn man dieselben Gleichungen subtrahirt:

$$\sin \tfrac{1}{2} a \sin \frac{B-C}{2} \,.\, \cos \tfrac{1}{2} a \cos \frac{B+C}{2} = \sin \tfrac{1}{2} A \cos \frac{b+c}{2} \,.\, \cos \tfrac{1}{2} A \sin \frac{b-c}{2}$$

Ebenso erhält man, wenn man die beiden ersten der Formeln (4) addirt und subtrahirt:

$$\sin\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B-C}{2}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B+C}{2}=\sin\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b+c}{2}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b+c}{2}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B-C}{2}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B+C}{2}=\cos\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b-c}{2}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b-c}{2}$$

Diese vier Formeln enthalten je zwei der Gaufsischen Gleichungen in einander multiplicirt; man kann indessen die einzelnen Gleichungen durch die Verbindung dieser vier Formeln nicht trennen, sondern mufs sich zu dem Ende noch eine solche Formel verschaffen, in der eine andere Combination dieser Gleichungen vorkommt. Dazu dient eine der folgenden:

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B+C}{2}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B+C}{2}=\sin\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b+c}{2}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b-c}{2}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B-C}{2}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B-C}{2}=\sin\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b+c}{2}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b-c}{2}$$

welche man erhält, wenn man die beiden ersten der Gleichungen (6) zu einander addirt und von einander abzieht.

Setzt man nun:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b+c}{2}=\alpha$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b+c}{2}=\beta$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b-c}{2}=\gamma$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b-c}{2}=\delta$$

und:

$$\sin\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B-C}{2}=\alpha'$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B+C}{2}=\beta'$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B-C}{2}=\gamma'$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B+C}{2}=\delta'$$

so hat man die sechs Gleichungen:

$$\alpha'\delta'=\alpha\delta,\ \gamma'\beta'=\gamma\beta,\ \alpha'\beta'=\alpha\beta,\ \gamma'\delta'=\gamma\delta,\ \beta'\delta'=\beta\delta,\ \alpha'\gamma'=\alpha\gamma$$

aus denen man die folgenden findet:

$$\alpha'=\alpha,\quad \beta'=\beta,\quad \gamma'=\gamma,\quad \delta'=\delta$$

oder:

$$\alpha'=-\alpha,\quad \beta'=-\beta,\quad \gamma'=-\gamma,\quad \delta'=-\delta$$

Man erhält mithin zwischen den Winkeln und Seiten eines sphärischen Dreiecks die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b+c}{2} &= \sin\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B-C}{2}\\
\sin\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b+c}{2} &= \cos\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B+C}{2}\\
\cos\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b-c}{2} &= \sin\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B-C}{2}\\
\cos\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b-c}{2} &= \cos\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B+C}{2}
\end{aligned} \qquad (9)$$

oder auch:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b+c}{2} &= -\sin\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B-C}{2}\\
\sin\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b+c}{2} &= -\cos\tfrac{1}{2}a\cos\frac{B+C}{2}\\
\cos\tfrac{1}{2}A\sin\frac{b-c}{2} &= -\sin\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B-C}{2}\\
\cos\tfrac{1}{2}A\cos\frac{b-c}{2} &= -\cos\tfrac{1}{2}a\sin\frac{B+C}{2}
\end{aligned}$$

Aus beiden Systemen von Gleichungen erhält man aber für die gesuchten Gröfsen, sei es, dafs diese zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel oder zwei Winkel und die anliegende Seite sind, dieselben oder wenigstens nur um 360^0 verschiedene Werthe. Sucht man z. B. A, b und c, so würde man aus dem zweiten Systeme von Gleichungen entweder für $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ dieselben Werthe finden, wie aus dem ersteren Systeme, dagegen für $\frac{1}{2}A$ einen um 180^0 verschiedenen Werth oder aber auch für $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ um 180^0 verschiedene Werthe, dagegen für $\frac{1}{2}A$ denselben Werth. Immer würden also A, b und c nur um 360^0 von den aus dem ersteren Systeme gefundenen Werthen verschieden sein. Die 4 Formeln (9) gelten daher ganz allgemein und es ist gleichgültig, ob man bei der Berechnung von A, b und c die Werthe a, B, C anwendet oder zu beliebigen dieser Werthe $\pm 360^0$ addirt *).

Die vier Gleichungen (9) sind unter dem Namen der Gaufsischen Gleichungen bekannt und werden angewandt, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel eines sphärischen Dreiecks oder zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben und daraus die drei übrigen Stücke

---

*) Gauss, Theoria motus corporum coelestium pag. 50 seq.

zu finden sind. Man bedient sich derselben am bequemsten auf folgende Weise. Wenn a, B und C gegeben sind, so suche man zuerst:

(1)	$\cos \frac{B-C}{2}$	(4)	$\cos \frac{B+C}{2}$
(2)	$\sin \frac{1}{2} a$	(5)	$\cos \frac{1}{2} a$
(3)	$\sin \frac{B-C}{2}$	(6)	$\sin \frac{B+C}{2}$

und daraus:

(7)	$\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{B-C}{2}$	(9)	$\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{B-C}{2}$
(8)	$\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{B+C}{2}$	(10)	$\cos \frac{1}{2} a \sin \frac{B+C}{2}$

Durch Division dieser unter einander stehenden Zahlen erhält man tang $\frac{1}{2}(b+c)$ und tang $\frac{1}{2}(b-c)$, woraus man b und c findet. Dann sucht man cos $\frac{1}{2}(b+c)$ oder sin $\frac{1}{2}(b+c)$ und cos $\frac{1}{2}(b-c)$ oder sin $\frac{1}{2}(b-c)$, je nachdem der Cosinus oder Sinus gröſser ist und zieht den ersteren vom gröſseren der beiden Logarithmen (7) oder (8), den andern vom gröſseren der Logarithmen (9) oder (10) ab und erhält dann sin $\frac{1}{2}A$ und cos $\frac{1}{2}A$. Beide verbindet man zur Tangente und findet daraus A. Da sin $\frac{1}{2}A$ und cos $\frac{1}{2}A$ denselben Winkel geben müssen, als tang $\frac{1}{2}A$, so hat man hierin eine Prüfung der Richtigkeit der Rechnung.

Beispiel.

Es sei

$a =$	11°	25′	56.″3
$B =$	184	6	55. 4
$C =$	11	18	40. 3

so hat man:

$\frac{1}{2}(B-C) =$	86° 24′ 7.″55
$\cos \frac{1}{2}(B-C) =$	8.7976413
$\sin \frac{1}{2} a =$	8.9982605
$\sin \frac{1}{2}(B-C) =$	9.9991432
$\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2}(B-C)$	7.7959018
$\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2}(B+C)$	9.1256397$_n$
$\frac{1}{2}(b+c)$	177 19 13.49
$\cos \frac{1}{2}(b+c)$	9.9995248$_n$
$\sin \frac{1}{2} A$	9.1261149
$\cos \frac{1}{2} A$	9.9960835
$\frac{1}{2} A$	7° 40′ 59.″38

$\frac{1}{2}(B+C) =$	97° 42′ 47.″85
$\cos \frac{1}{2}(B+C)$	9.1278046$_n$
$\cos \frac{1}{2} a$	9.9978351
$\sin \frac{1}{2}(B+C)$	9.9960526
$\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2}(B-C)$	8.9974037
$\cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2}(B+C)$	9.9938877
$\frac{1}{2}(b-c)$	5 45 24.13
$\cos \frac{1}{2}(b-c)$	9.9978042
$b =$	183° 4′ 37.″62
$c =$	171 33 49. 36
$A =$	15 21 58. 76

Hätte man hier $B = -175^{0}\,53'\,4.''6$ genommen, also:

$$\tfrac{1}{2}(B + C) = -82^{0}\,17'\,12.''15$$
$$\tfrac{1}{2}(B - C) = -93\;\;35\;\;52.\,45$$

so hätte man erhalten:

$$\tfrac{1}{2}(b + c) = -\;\;2^{0}\,40'\,46.''51$$
$$\tfrac{1}{2}(b + c) = \;\;185\;\;45\;\;24.\,13$$

also $b = 183^{0}\,4'\,37.''62$ und $c = -188^{0}\,26'\,10.''64$.

Durch Division der Gaufsischen Gleichungen in einander erhält man die Napierschen Analogien. Schreibt man *A*, *B*, *C* an die Stelle von *B*, *C*, *A* und *a*, *b*, *c* an die Stelle von *b*, *c*, *a* so findet man aus den Gleichungen (9):

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{A+B}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{cotang}\frac{C}{2}\\
\operatorname{tang}\frac{A-B}{2} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{cotang}\frac{C}{2}\\
\operatorname{tang}\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2}\\
\operatorname{tang}\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\frac{c}{2}
\end{aligned}\right\}\quad(9a)$$

6. Da fast alle in No. 3 und 4 aufgeführten Formeln aus zwei Gliedern bestehen, also für logarithmische Rechnung unbequem sind, so mufs man dieselben in eingliedrige Ausdrücke zu verwandeln suchen, was durch die Einführung von Hülfswinkeln erreicht wird. Irgend je zwei mögliche Gröfsen x und y, sie seien positiv oder negativ, kann man nämlich immer einem Sinus oder Cosinus proportional setzen, so dafs:

$$x = m \sin M \quad \text{und} \quad y = m \cos M$$

denn man findet sogleich:

$$\operatorname{tang} M = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad m = \sqrt{x^2 + y^2}$$

also **M** und **m** durch lauter mögliche Gröfsen ausgedrückt. Nun enthalten alle früheren mehrgliedrigen Formeln in jedem ihrer beiden Glieder einen Sinus oder Cosinus eines und desselben Winkels. Setzt man also die übrigen Factoren des

einen Gliedes dem Sinus, die des andern dem Cosinus eines beliebigen Winkels proportional, so kann man die Formeln für den Sinus oder Cosinus einer zweigliedrigen Gröfse anwenden und auf diese Weise eine für logarithmische Rechnung bequeme Form erhalten.

Sind z. B. die drei Formeln zu berechnen:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$
$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

so setze man:

$$\sin b \cos A = m \sin M$$
$$\cos b = m \cos M$$

Dann wird:

$$\cos a = m \cos (c - M)$$
$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$
$$\sin a \cos B = m \sin (c - M)$$

Weifs man den Quadranten, in welchem B liegt, so kann man die Formeln auch auf folgende Weise schreiben, wenn man für m seinen Werth $\frac{\sin b \cos A}{\sin M}$ setzt. Man berechnet zuerst:

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{tang} b \cos A$$

und findet dann:

$$\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} A \sin M}{\sin (c - M)}$$
$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} (c - M)}{\cos B}$$

Hat man Tafeln für die sogenannten Gaufsischen Logarithmen, vermittelst welcher man den Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Zahlen aus den Logarithmen der einzelnen Zahlen findet, so berechnet man die drei Gleichungen bequemer in der ursprünglichen Form ohne Einführung des Hülfswinkels. Solche Tafeln sind von Zech für 7 Stellen berechnet: J. Zech, Tafeln für die Additions- und Subtractions-Logarithmen für sieben Stellen.

Für 5 Stellen findet man diese in den Köhlerschen Logarithmentafeln für 5 Decimalen.

7. Im Allgemeinen hat man immer darauf zu sehen, dafs man die Winkel, welche man sucht, durch die Tangenten findet; denn da diese sich am schnellsten ändern, so kann der Werth der Winkel durch dieselben am genauesten gefunden werden.

Bezeichnet Δx eine sehr kleine Aenderung eines Winkels, so hat man:

$$\Delta\,(\log \operatorname{tang} x) = \frac{2\,\Delta x}{\sin 2x}$$

Man ist nun gewohnt, die Aenderungen der Winkel in Secunden auszudrücken; da nun aber die Tangente den Radius zur Einheit hat, so mufs man die Aenderung Δx ebenfalls in Theilen des Radius ausdrücken, also durch die Zahl 206264,8 dividiren*). Ferner sind hier unter den Logarithmen natürliche oder hyperbolische verstanden; will man indefs Briggische Logarithmen einführen, so mufs man die natürlichen mit dem Modulus $0.4342945 = M$ multipliciren. Verlangt man endlich $\Delta\,(\log \operatorname{tang} x)$ in Einheiten der letzten Decimale der Logarithmen, welche man anwendet, ausgedrückt, so hat man bei siebenstelligen Logarithmen den Ausdruck mit 10000000 zu multipliciren. Man erhält also:

$$\Delta\,(\log \operatorname{tang} x) = \frac{2\,M}{\sin 2x} \cdot \frac{\Delta x''}{206264.8}\,10000000$$

$$= \frac{42.1}{\sin 2x}\,\Delta x''$$

oder

$$\Delta x'' = \frac{\sin 2x}{42.1}\,\Delta\,(\log \operatorname{tang} x)$$

Aus dieser Gleichung sieht man nun, wie genau man den Werth eines Winkels durch die Tangente finden kann.

Gesetzt man hätte Logarithmen von fünf Decimalen, so ist, da die Rechnung in der Regel höchstens auf zwei Einheiten der letzten Decimale unsicher ist, $\Delta\,(\log \operatorname{tang} x) = 200$, also der daraus für den Winkel erwachsende Fehler:

$$\Delta x'' = \frac{200''}{42.1} \sin 2x = 5'' \sin 2x$$

---

*) Die Zahl 206264.8, deren Logarithmus 5.3144251 ist, wird immer gebraucht, wenn man Gröfsen, die in Theilen des Radius ausgedrückt sind, in Bogensecunden verwandeln will und umgekehrt. Die Anzahl der Secunden im Kreisumfange ist 1296000, dagegen ist der Kreisumfang in Theilen des Radius gleich $2\pi = 6.2831853$. Beide Zahlen verhalten sich zu einander wie 206264,8 : 1. Will man also Gröfsen, die in Theilen des Radius ausgedrückt sind, in Bogen verwandeln, so hat man dieselben mit dieser Zahl zu multipliciren; umgekehrt, will man Gröfsen, die in Bogensecunden gegeben sind, in Theilen des Radius ausdrücken, so hat man dieselben mit dieser Zahl zu dividiren. Die Zahl selbst ist die Anzahl der Secunden die auf den Radius gehen, ihr Complement aber der Sinus oder die Tangente einer Secunde.

Bei fünf Decimalen wird also der Fehler nicht gröfser sein, als 5″ sin $2x$ oder da sin $2x$ im Maximum gleich eins ist, so kann der gröfste Fehler 5″ betragen, man wird indessen einen solchen Fehler nur begehen, wenn der Winkel in der Nähe von 45° liegt. Bei siebenstelligen Logarithmen mufs der Fehler 100 mal kleiner sein, also werden dann die Winkel, wenn man dieselben durch die Tangenten sucht, höchstens auf 0.″05 unsicher sein können.

Wäre nun ein Winkel durch den Sinus oder Cosinus gegeben, so erhielte man in der Formel für Δ (log sin x) oder Δ (log cos x) statt des Factors sin $2x$ jetzt tang x oder cotang x, die jeden möglichen Werth, selbst einen unendlich grofsen, haben können. Man sieht also, dafs kleine Fehler in dem Logarithmus des Sinus oder Cosinus eines Winkels sehr grofse Fehler in dem dadurch gesuchten Winkel hervorbringen können und es ist daher immer vorzuziehen, die Winkel durch die Tangenten zu finden.

8. Setzt man in den Formeln für die schiefwinkligen sphärischen Dreiecke einen der Winkel gleich 90°, so erhält man die Formeln für die rechtwinkligen Dreiecke. Im Folgenden wird die Hypotenuse immer mit h, dagegen werden die beiden Catheten mit c und c' und die diesen gegenüberliegenden Winkel mit C und C' bezeichnet. Aus der ersten der Formeln (2) erhält man dann, wenn man $A = 90°$ setzt:

$$\cos h = \cos c \cos c'$$

ferner aus der ersten der Formeln (3) unter derselben Voraussetzung:

$$\sin h \sin C = \sin c$$

und aus der ersten der Formeln (4):

$$\sin h \cos C = \cos c \sin c'$$

oder, wenn man diese Formel durch die für cos h dividirt:

$$\operatorname{tang} h \cos C = \operatorname{tang} c'$$

Dividirt man dieselbe Formel dagegen durch die für sin h sin C, so wird:

$$\operatorname{cotang} C = \operatorname{cotang} c \sin c'$$

oder

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} C \sin c'$$

Verbindet man hiermit die Formel:

$$\operatorname{tang} c' = \operatorname{tang} C' \sin c$$

so folgt:

$$\cos h = \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} C'$$

Verbindet man endlich die beiden Gleichungen:

$$\sin h \sin C' = \sin c'$$
$$\text{und } \sin h \cos C = \cos c \sin c'$$

so erhält man:

$$\cos C = \sin C' \cos c$$

Man hat mithin die folgenden sechs Formeln für die rechtwinkligen Dreiecke, welche alle möglichen Combinationen der fünf Stücke enthalten:

$$\left.\begin{aligned}\cos h &= \cos c \cos c' \\ \sin c &= \sin h \sin C \\ \tang c &= \tang h \cos C' \\ \tang c &= \tang C \sin c' \\ \cos h &= \cotang C \cotang C' \\ \cos C &= \cos c \sin C'\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

vermittelst welcher man aus je zwei gegebenen Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen finden kann.

Aus der Vergleichung dieser Formeln mit denen in No. 6 sieht man leicht, dafs die Einführung der Hülfsgröfsen m und M auf der Substitution zweier rechtwinkligen Dreiecke statt des schiefwinkligen beruht. Fällt man nämlich von der Spitze C des schiefwinkligen Dreiecks einen senkrechten gröfsten Kreis auf die Seite c, so bedeutet in den Formeln in No. 6 m den Cosinus des Perpendikels und M das Stück der Seite c zwischen der Spitze A und dem Fufspunkte des Perpendikels.

9. In der Astronomie mufs man immer zur Berechnung von Gröfsen gewisse Data aus den Beobachtungen entlehnen. Da man aber bei keinem von diesen absolute Sicherheit verbürgen kann, sondern bei einem jeden Datum einen kleinen Fehler als möglich annehmen mufs, so ist bei allen Aufgaben zu untersuchen, ob eine kleine Aenderung der beobachteten Gröfsen auch keine grofse Aenderung der zu findenden Gröfsen hervorbringen kann. Um dies immer leicht beurtheilen zu können, mufs man die Formeln der sphärischen Trigonometrie differenziren, indem man, um alle Fälle zu umfassen, alle Gröfsen als variabel annimmt.

Differenzirt man die erste der Gleichungen (2), so erhält man:

$$\begin{aligned}-\sin a\, da = {} & db\,[-\sin b \cos c + \cos b \sin c \cos A] \\ & + dc\,[-\cos b \sin c + \sin b \cos c \cos A] \\ & - \sin b \sin c \sin A \, . \, dA\end{aligned}$$

Der Factor von db ist gleich — $\sin a \cos C$, der von dc gleich — $\sin a \cos B$; schreibt man dann noch — $\sin a$ $\sin c \sin B$ statt des Factors von A, so erhält man die Differentialformel:

$$da = \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin c \sin B\,dA$$

Schreibt man die erste der Gleichungen (3) logarithmisch, so erhält man:

$$\log \sin a + \log \sin B = \log \sin b + \log \sin A$$

und wenn man differenzirt:

$$\text{cotang}\, a\,da + \text{cotang}\, B\,dB = \text{cotang}\, b\,db + \text{cotang}\, A\,dA$$

Statt der ersten der Formeln (4) differenzire man die erste der Formeln (5), die aus der Verbindung von (3) und (4) hervorgegangen sind; dann erhält man:

$$-\frac{\sin A}{\sin B^2}\,dB + dA\,[\text{cotang}\, B \cos A - \sin A \cos c]$$

$$= -\frac{\sin c}{\sin b^2}\,db + dc\,[\text{cotang}\, b \cos c + \cos A \sin c]$$

oder:

$$-\frac{\sin A}{\sin B^2}\,dB - \frac{\cos C}{\sin B}\,dA = -\frac{\sin c}{\sin b^2}\,db + \frac{\cos a}{\sin b}\,dc$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\sin B$, so findet man:

$$-\frac{\sin a}{\sin b}\,dB - \cos C\,dA = -\frac{\sin C}{\sin b}\,db + \frac{\cos a \sin B}{\sin b}\,dc$$

oder endlich:

$$\sin a\,dB = \sin C\,db - \sin B \cos a\,dc - \sin b \cos C\,dA$$

Aus der ersten der Formeln (8) erhält man dann noch ganz so wie aus (2):

$$dA = -\cos c\,dB - \cos b\,dC + \sin b \sin C\,da$$

Man hat also die folgenden Differentialgleichungen der sphärischen Trigonometrie:

$$\begin{aligned} da &= \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin b \sin C\,dA \\ \text{cotang}\, a\,da + \text{cotang}\, B\,dB &= \text{cotang}\, b\,db + \text{cotang}\, A\,dA \\ \sin a\,dB &= C\,db - \sin B \cos a\,dc - \sin b \cos C\,dA \\ dA &= -\cos c\,dB - \cos b\,dC + \sin b \sin C\,da \end{aligned} \qquad (11)$$

10. Bei kleinen Winkeln kann man sich erlauben, den Cosinus gleich eins zu setzen und den Bogen statt des Sinus oder der Tangente zu nehmen, also, wenn man den Bogen in Secunden ausgedrückt haben will, $206265\,a$ statt $\sin a$ oder $\text{tang}\, a$ zu setzen. Sind die Winkel nicht klein genug,

um das zweite Glied der Sinusreihe schon vernachlässigen zu können, so kann man auf folgende Weise verfahren:

Es ist:

$$\frac{\sin a}{a} = 1 - \frac{1}{6} a^2 + \frac{1}{120} a^4 - \ldots$$

und:

$$\cos a = 1 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{24} a^4 - \ldots$$

also:

$$\sqrt[3]{\cos a} = 1 - \frac{1}{6} a^2 + \ldots$$

Man erhält daher bis auf die dritten Potenzen inclusive:

$$\frac{\sin a}{a} = \sqrt[3]{\cos a}$$

oder:

$$a = \sin a \sqrt[3]{\sec a}$$

eine Formel, welche so genau ist, dafs man bei einem Winkel von 10 Graden noch nicht einen Fehler von einer Secunde durch die Anwendung derselben begeht. Es ist nämlich:

$$\log \sin 10^0 \sqrt[3]{\sec 10^0} = 9.2418864$$

und wenn man hierzu den Logarithmen 5.3144251 addirt und die dazu gehörige Zahl aufschlägt, so erhält man 36000″.74 oder:

$$10^0 \; 0' \; 0.''74$$

11. Sehr häufig macht man in der sphärischen Astronomie von Reihenentwickelungen Gebrauch, von denen die wichtigsten hier abgeleitet werden sollen.

Hat man einen Ausdruck von der Form:

$$\tang y = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x}$$

so kann man leicht y in eine Reihe entwickeln, die nach den Sinus der Vielfachen des Winkels x fortschreitet. Es ist nämlich, wenn $\tang z = \frac{m}{n}$ ist, $dz = \frac{n\,dm - m\,dn}{m^2 + n^2}$. Betrachtet man also in der Formel für $\tang y$ sowohl a als auch y als veränderlich, so erhält man:

$$\frac{dy}{da} = \frac{\sin x}{1 - 2a \cos x + a^2}$$

und, wenn man diesen Ausdruck nach der Methode der unbestimmten Coefficienten in eine Reihe entwickelt, die nach Potenzen von a fortschreitet:

$$\frac{dy}{da} = \sin x + a \sin 2x + a^2 \sin 3x + \ldots *)$$

Integrirt man diese Gleichung und bemerkt, dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so erhält man für y die folgende Reihe:

$$y = a \sin x + \tfrac{1}{2} a^2 \sin 2x + \tfrac{1}{3} a^3 \sin 3x + \ldots \quad (12)$$

Häufig hat man zwei Gleichungen von der Form:

$$A \sin B = a \sin x$$
$$A \cos B = 1 - a \cos x$$

aus denen man B und $\log A$ in eine nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x fortlaufende Reihe entwickeln will. Da hier:

$$\operatorname{tang} B = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x}$$

so findet man für B durch die Formel (12) eine nach den Sinus der Vielfachen von x fortschreitende Reihe. Um nun auch $\log A$ in eine ähnliche Reihe zu entwickeln, hat man zuerst:

$$A = \sqrt{1 - 2a \cos x + a^2}$$

Durch die Methode der unbestimmten Coefficienten findet man aber die folgende Reihe:

$$\frac{a \cos x - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2} = a \cos x + a^2 \cos 2x + a^3 \cos 3x + \ldots **)$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $-\frac{da}{a}$ und integrirt denselben nach a, so wird, weil die linke Seite gleich

$$\tfrac{1}{2} \frac{d \log (1 - 2a \cos x + a^2)}{da}$$

und für $a = 0$ auch $\log A = 0$ ist:

$$\log \sqrt{1 - 2a \cos x + a^2} = \log A = -[a \cos x + \tfrac{1}{2} a^2 \cos 2x + \tfrac{1}{3} a^3 \cos 3x + \ldots] \quad (13)$$

Ebenso erhält man, wenn man die beiden Gleichungen hat:

$$A \sin B = a \sin x$$
$$A \cos B = 1 + a \cos x$$

---

*) Man sieht leicht, dafs das erste Glied $\sin x$ ist und dafs der Coefficient von a^n gefunden wird durch die Gleichung:

$$A_n = 2 A_{n-1} \cos x - A_{n-2}$$

**) Man sieht sogleich wieder, dafs der Coefficient von a gleich $\cos x$ ist und dafs der Coefficient von a_n gefunden wird durch die Gleichung:

$$A_n = 2 A_{n-1} \cos x - A_{n-2}$$

indem man in (12) und (13) $180 - x$ statt x setzt:

$$B = a \sin x - \tfrac{1}{2} a^2 \sin 2x + \tfrac{1}{3} a^3 \sin 3x - \ldots. \quad (14)$$

$$\log \sqrt{1 + 2a \cos x + a^2} = \log A = a \cos x - \tfrac{1}{2} a^2 \cos 2x + \tfrac{1}{3} a^3 \cos 3x - \ldots. \quad (15)$$

Hat man einen Ausdruck von der Form:

$$\operatorname{tang} y = n \operatorname{tang} x,$$

so kann man denselben leicht auf die Form $\operatorname{tang} y = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x}$ bringen. Es ist nämlich:

$$\operatorname{tang}(y - x) = \frac{\operatorname{tang} y - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} y \operatorname{tang} x} = \frac{(n-1) \operatorname{tang} x}{1 + n \operatorname{tang} x^2}$$

$$= \frac{(n-1) \sin x \cos x}{\cos x^2 + n \sin x^2} = \frac{(n-1) \sin x \cos x}{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 2x + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \cos 2x}$$

$$= \frac{(n-1) \sin 2x}{(n+1) - (n-1) \cos 2x} = \frac{\frac{n-1}{n+1} \sin 2x}{1 - \frac{n-1}{n+1} \cos 2x}.$$

Ist also die Gleichung $\operatorname{tang} y = n \operatorname{tang} x$ gegeben, so erhält man:

$$y = x + \frac{n-1}{n+1} \sin 2x + \tfrac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4x + \tfrac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \sin 6x + \ldots \quad (16)$$

Setzt man hierin zuerst

$$n = \cos \alpha,$$

so ist

$$\frac{n-1}{n+1} = -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha^2.$$

Die Gleichung

$$\operatorname{tang} y = \cos \alpha \operatorname{tang} x$$

giebt also:

$$y = x - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha^2 \sin 2x + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha^4 \sin 4x - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha^6 \sin 6x + \ldots \quad (17)$$

Ist

$$n = \sec \alpha,$$

so ist

$$\frac{n-1}{n+1} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha^2,$$

und man erhält also, wenn:

$$\operatorname{tang} y = \sec \alpha \operatorname{tang} x \text{ oder } \operatorname{tang} x = \cos \alpha \operatorname{tang} y,$$

$$y = x + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha^2 \sin 2x + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha^4 \sin 4x + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha^6 \sin 6x + \ldots \quad (18)$$

Da

$$\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\beta - \alpha) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\beta + \alpha)$$

und

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta),$$

so erhält man auch, wenn:

$$\operatorname{tang} y = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \operatorname{tang} x,$$

$$y = x - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin 2x$$
$$+ \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 \sin 4x - \ldots$$

und wenn:

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \operatorname{tang} x,$$

$$y = x + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin 2x$$
$$+ \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 \sin 4x + \ldots$$

Vermittelst der beiden letzten Formeln kann man die Napierschen Analogien in Reihen entwickeln. Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tang} \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \operatorname{tang} \frac{c}{2}$$

erhält man nämlich:

$$\frac{a-b}{2} = \frac{c}{2} - \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{cotang} \frac{A}{2} \sin c + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{B^2}{2} \operatorname{cotang} \frac{A^2}{2} \sin 2c - \ldots.$$

oder

$$\frac{c}{2} = \frac{a-b}{2} + \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{cotang} \frac{A}{2} \sin(a-b) + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{B^2}{2} \operatorname{cotang} \frac{A^2}{2} \sin 2(a-b) + \ldots$$

und ebenso aus der Gleichung:

$$\operatorname{tang} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \operatorname{tang} \frac{c}{2}$$

die folgenden Reihen:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{c}{2} + \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \sin c + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{A^2}{2} \operatorname{tang} \frac{B^2}{2} \sin 2c + \ldots,$$

$$\frac{c}{2} = \frac{a+b}{2} - \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \sin(a+b) + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{A^2}{2} \operatorname{tang} \frac{B^2}{2} \sin 2(a+b) - \ldots$$

Ganz ähnliche Reihen erhält man aus den beiden andern Analogien:

$$\operatorname{tang} \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \operatorname{tang} \frac{180 - C}{2},$$

$$\operatorname{tang} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \operatorname{tang} \frac{180 - C}{2}.$$

Häufig kommt auch der Fall vor, daſs man eine Gröſse y, die durch eine Gleichung von der Form:

$$\cos y = \cos x + b$$

gegeben ist, in eine nach Potenzen von b fortschreitende Reihe verwandeln soll. Zu dem Ende entwickelt man die Gleichung:

$$y = \text{arc}\cos\,[\cos x + b]$$

nach dem Taylorschen Lehrsatze. Setzt man nämlich

$$\cos x = z \text{ und } y = f(z + b),$$

so hat man:

$$y = f(z) + \frac{df}{dz} b + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 f}{dz^2} b^2 + \tfrac{1}{6} \frac{d^3 f}{dz^3} b^3 + \ldots,$$

oder da

$$f(z) = x, \quad \frac{df}{dz} = \frac{dx}{d.\cos x} = -\frac{1}{\sin x},$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{d.-\frac{1}{\sin x}}{dx} \cdot \frac{dx}{d.\cos x} = -\frac{\cos x}{\sin x^3},$$

$$\frac{d^3 f}{dz^3} = \frac{d.-\frac{\cos x}{\sin x^3}}{dx} \cdot \frac{dx}{d.\cos x} = -\frac{[1 + 3\,\text{cotang}\,x^2]}{\sin x^3},$$

$$y = x - \frac{b}{\sin x} - \tfrac{1}{2}\,\text{cotang}\,x \frac{b^2}{\sin x^2} - \tfrac{1}{6}\,[1 + 3\,\text{cotang}\,x^2]\frac{b^3}{\sin x^3} \ldots. \quad (19)$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man aus der Gleichung:

$$\sin y = \sin x + b$$

$$y = x + \frac{b}{\cos x} + \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,x \frac{b^2}{\cos x^2} + \tfrac{1}{6}\,[1 + 3\,\text{tang}\,x^2]\frac{b^3}{\cos x^3} + \ldots \quad (20)$$

Anm. Ueber die Reihenentwickelungen vergleiche: Encke, einige Reihenentwickelungen aus der sphärischen Astronomie. Astronomische Nachrichten No. 562.

B. Die Interpolationsrechnung.

12. In der Astronomie bedient man sich fortwährend der Tafeln, in denen die numerischen Werthe gewisser Functionen für einzelne numerische Werthe der Variabeln angegeben sind. Da man nun in der Anwendung die Werthe der Function auch für solche Werthe der Variabeln braucht, die grade nicht in den Tafeln angegeben sind, so mufs man Mittel haben, um aus gegebenen numerischen Werthen einer Function dieselben für jeden beliebigen Werth der Variabeln oder des Arguments der Function berechnen zu können. Hierzu dient die Interpolationsrechnung. Sie hat den Zweck,

an die Stelle einer Function, deren analytischer Ausdruck entweder ganz unbekannt, oder doch zur numerischen Berechnung unbequem ist, eine andere einfachere, aus gegebenen numerischen Werthen gebildete zu setzen, die sich innerhalb der Grenzen der Anwendung mit jener vertauschen läfst.

Nach dem Taylorschen Lehrsatze kann man jede Function in eine Reihe, die nach den ganzen Potenzen der Variabeln fortschreitet, entwickeln; nur in dem Falle, dafs für einen bestimmten Werth der Variabeln einer der Differentialquotienten unendlich grofs wird, dafs also die Functiou in der Nähe dieses Werthes keinen stetigen Gang hat, erleidet dieser Satz eine Ausnahme. Indem sich die Interpolationsrechnung auf diese Entwickelung der Functionen in Reihen, die nach ganzen Potenzen der Variabeln fortschreiten, gründet, setzt sie also voraus, dafs die Function innerhalb der betrachteten Grenzen stetig ist, und ist nur unter dieser Voraussetzung anwendbar.

Nennt man w das Intervall oder die Differenz zweier auf einander folgenden Argumente (welche hier immer als constant betrachtet wird), so kann man jedes beliebige Argument durch $a + nw$ bezeichnen, wo n die variable Gröfse ist, und die zu diesem Argumente gehörige Function durch $f(a+nw)$. Die Differenz zweier auf einander folgenden Functionenwerthe $f(a+nw)$ und $f(a+(n+1)w)$ soll durch $f'(a+n+\frac{1}{2})$ bezeichnet werden, indem man, um anzugeben, zu welchen Functionenwerthen die Differenz gehört, unter das Functionenzeichen das arithmetische Mittel beider Argumente setzt und dabei den Factor w wegläfst *). So drückt $f'(a+\frac{1}{2})$ die Differenz von $f(a)$ und $f(a+w)$, $f'(a+\frac{3}{2})$ die Differenz von $f(a+w)$ und $f(a+2w)$ aus. Dasselbe gilt auch von den höheren Differenzen, deren Ordnung durch den Accent angedeutet wird. So ist z. B. $f''(a+1)$ die Differenz der beiden ersten Differenzen $f'(a+\frac{1}{2})$ und $f'(a+\frac{3}{2})$.

Das Schema der Argumente und der dazu gehörigen Functionenwerthe und deren Differenzen ist also das folgende:

*) Es ist dies die sehr bequeme, von Encke in seinem Aufsatze: Ueber mechanische Quadratur im Jahrbuche für 1837 eingeführte Bezeichnungsart.

Argument	Function	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.	V. Diff.
$a-3w$	$f(a-3w)$					
		$f'(a-\frac{5}{2})$				
$a-2w$	$f(a-2w)$		$f''(a-2)$			
		$f'(a-\frac{3}{2})$		$f'''(a-\frac{3}{2})$		
$a-w$	$f(a-w)$		$f''(a-1)$		$f^{IV}(a-1)$	
		$f'(a-\frac{1}{2})$		$f'''(a-\frac{1}{2})$		$f^{V}(a-\frac{1}{2})$
a	$f(a)$		$f''(a)$		$f^{IV}(a)$	
		$f'(a+\frac{1}{2})$		$f'''(a+\frac{1}{2})$		$f^{V}(a+\frac{1}{2})$
$a+w$	$f(a+w)$		$f''(a+1)$		$f^{IV}(a+1)$	
		$f'(a+\frac{3}{2})$		$f'''(a+\frac{3}{2})$		
$a+2w$	$f(a+2w)$		$f''(a+2)$			
		$f'(a+\frac{5}{2})$				
$a+3w$	$f(a+3w)$					

Alle Differenzen, welche dieselbe Gröſse unter dem Functionenzeichen haben, stehen hier auf derselben horizontalen Linie. Die Differenzen der ungeraden Ordnungen haben alle als Gröſsen unter dem Functionenzeichen $a+$ einem Bruche mit dem Nenner 2.

13. Da man nach dem Taylorschen Lehrsatze eine jede Function in eine nach ganzen Potenzen der Variablen fortschreitende Reihe entwickeln kann, so kann man setzen:

$$f(a+nw)=\alpha+\beta\,.\,nw+\gamma\,.\,n^2w^2+\delta\,.\,n^3w^3+\ldots$$

Wäre der analytische Ausdruck der Function $f(a+nw)$ bekannt, so könnte man die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. berechnen, indem $\alpha=f(a)$, $\beta=\frac{d\,.\,f(a)}{da}$ etc. ist. Es wird aber angenommen, daſs dieser analytische Ausdruck nicht gegeben ist oder wenigstens, wenn derselbe auch bekannt ist, nicht angewendet werden soll, und daſs man nur für bestimmte Werthe des Arguments $a+nw$ die numerischen Werthe der Function $f(a+nw)$ kennt. Setzt man aber in die obige Gleichung nach einander die verschiedenen Werthe der Variablen n, so erhält man so viele Gleichungen als man Werthe der Function kennt und kann also aus diesen ebenso viele der Coefficienten α, β, γ, δ etc. bestimmen. Man sieht aber sogleich, daſs $\alpha=f(a)$ und daſs βw, γw^2 etc. lineare Functionen von Differenzen sein müssen, die sich wieder auf eine gewisse Reihe von Differenzen zurückführen lassen, daſs also auch $f(a+nw)$ allgemein von der folgenden Form angenommen werden kann:

$$f(a+nw)=f(a)+A\,.\,f'(a+\tfrac{1}{2})+B\,.\,f''(a+1)+C\,.\,f'''(a+\tfrac{3}{2})+\ldots,$$

wo A, B, C etc. Functionen von n sind, die sich durch Einführung bestimmter ganzer Werthe von n bestimmen lassen. Wenn aber n eine ganze Zahl ist, so wird jede Function $f(a+nw)$ aus $f(a)$ und den obigen Differenzen durch bloſse

successive Addition gefunden, wenn man sich erlaubt, eine der höheren Differenzen als constant zu setzen, wenn man also die Werthe der Function als eine arithmetische Reihe höherer Ordnung betrachtet. Ist schon die erste Differenz constant, so wird $f(a+nw)$ einfach gleich $f(a)+n \,.\, f'(a+\frac{1}{2})$; ist erst die zweite Differenz constant, so mufs man zu dem vorigen Werthe noch hinzulegen $f''(a+1)$ multiplicirt in die Summe der Zahlen 1 bis $n-1$ oder in $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$; und wenn erst die dritte Differenz constant ist, so kommt noch hinzu $f'''(a+\frac{3}{2})$ multiplicirt in die Summe der Zahlen 1, $1+2$, $1+2+3$ etc. bis $1+2+\ldots+n-2$ oder in $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$, sodafs allgemein $A=n$, $B=\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$, $C=\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ etc. und daher:

$$f(a+nw)=f(a)+nf'(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}f''(a+1)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(a+\tfrac{3}{2})+\ldots, \quad (1)$$

wo das Gesetz der Fortschreitung klar ist *).

Diese Formel ist unter dem Namen der Newtonschen Interpolationsformel bekannt. Der Coefficient der Differenz von der Ordnung n ist der Coefficient von x^n in der Entwickelung von $(1+x)^n$.

Beispiel. Nach dem Berliner Jahrbuche für 1850 hat man für den mittleren Mittag die folgenden heliocentrischen Längen des Mercur:

---

*) Man sieht dies sogleich aus der Art, wie die Functionen aus den Differenzen gebildet werden. Bezeichnet man nämlich letztere der Kürze wegen mit f', f'', f''', so erhält man das folgende Schema:

	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.
$f(a)$			
$f(a)+f'$	f'		
$f(a)+2f'+f''$	$f'+f''$	f''	
$f(a)+3f'+3f''+f'''$	$f'+2f''+f'''$	$f''+f'''$	f'''
$f(a)+4f'+6f''+4f'''$	$f'+3f''+3f'''$	$f''+2f'''$	f'''
$f(a)+5f'+10f''+10f'''$	$f'+4f''+6f'''$	$f''+3f'''$	f'''
$f(a)+6f'+15f''+20f'''$	$f'+5f''+10f'''$	$f''+4f'''$	f'''
$f(a)+7f'+21f''+35f'''$	$f'+6f''+15f'''$	$f''+5f'''$	f'''

		I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	
Jan. 0	303° 25′ 1″.5				
		+ 6° 41′ 50″.0			
2	310 6 51.5		+ 18′ 48″.0		
		7 0 38.0		+ 2′ 44″.4	
4	317 7 29.5		21 32.4		+ 10″.1
		7 22 10.4		2 54.5	
6	324 29 39.9		24 26.9		4.7
		7 46 37.3		2 59.2	
8	332 16 17.2		27 26.1		
		8 14 3.4			
10	340 30 20.6				

Sucht man daraus die Länge des Mercur für den mittleren Mittag von Jan. 1, so hat man

$$f(a) = 303^\circ\, 25'\, 1''.5 \text{ und } n = \tfrac{1}{2},$$

ferner

			Product:
$f'(a+\frac{1}{2}) =$	$+\,6^\circ\, 41'\, 50''.0$,	$n = \frac{1}{2}$	$+\ 3^\circ\, 20'\, 55''.0$
$f''(a+1) =$	$+\ 18\ 48.0$,	$\frac{n(n-1)}{1.2} = -\frac{1}{8}$	$-\ 2\ 21.0$
$f'''(a+\frac{3}{2}) =$	$+\ 2\ 44.4$,	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = +\frac{1}{16}$	$+\ 10.3$
$f^{IV}(a+2) =$	$+\ 10.1$,	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = -\frac{5}{128}$	$-\ 0.4$

Man hat demnach zu $f(a)$ hinzuzufügen

$$+\,3^\circ\, 18'\, 43''.9$$

und erhält für die Länge des Mercur Jan. 1.0

$$306^\circ\, 43'\, 45''.4$$

Die Newtonsche Formel läfst sich noch bequemer auf folgende Weise schreiben, die den Vortheil gewährt, dafs man immer nur mit kleinen Brüchen zu multipliciren hat:

$$f(a+nw) = f(a) + n\,[f'(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n-1}{2}\,[f''(a+1) + \frac{n-2}{3} \times$$

$$\times [f'''(a+\tfrac{3}{2}) + \frac{n-3}{4}\,[f^{IV}(a+2)] \qquad (1\,a)$$

Ist n wieder $\frac{1}{2}$, so ist $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$, also $\frac{n-3}{4} f^{IV}(a+2) = -6''.3$. Dies zu $f'''(a+\frac{3}{2})$ hinzugelegt und die Summe mit $\frac{n-2}{3} = -\frac{1}{2}$ multiplicirt giebt $-1'\,19''.0$. Legt man dies wieder zu $f''(a+1)$ und multiplicirt die Summe mit $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$, so erhält man $-4'\,22''.2$ und wenn man dies endlich zu $f'(a+\frac{1}{2})$ addirt und mit $n = \frac{1}{2}$ multiplicirt, so hat man $3^\circ\, 18'\, 43''.9$ zu $f(a)$ hinzuzulegen und erhält also denselben Werth wie vorher $306^\circ\, 43'\, 45''.4$.

14. Bequemere Formeln für die Interpolation erhält man, wenn man die Newtonsche Interpolationsformel so umformt, dafs darin blos Differenzen vorkommen, die auf einer

horizontalen Linie stehen, so daſs man, wenn man von dem Werthe $f(a)$ ausgeht, die Differenzen $f(a+\frac{1}{2})$, $f''(a)$ und $f'''(a+\frac{1}{2})$ etc. anzuwenden hat. Die beiden ersten Glieder der Newtonschen Formel können dann beibehalten werden.

Es ist aber:

$$\begin{aligned} f''(a+1) &= f''(a)+f'''(a+\tfrac{1}{2}),\\ f'''(a+\tfrac{3}{2}) &= f'''(a+\tfrac{1}{2})+f^{\mathrm{IV}}(a+1)\\ &= f'''(a+\tfrac{1}{2})+f^{\mathrm{IV}}(a)+f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}),\\ f^{\mathrm{IV}}(a+2) &= f^{\mathrm{IV}}(a+1)+f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{3}{2})\\ &= f^{\mathrm{IV}}(a)+2f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2})+f^{\mathrm{VI}}(a+1),\\ f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{5}{2}) &= f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{3}{2})+f^{\mathrm{VI}}(a+2)\\ &= f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2})+f^{\mathrm{VI}}(a+1)+f^{\mathrm{VI}}(a+2),\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Man erhält also als Coefficienten von $f''(a)$:

$$\frac{n(n-1)}{1.2},$$

als Coefficienten von $f'''(a+\frac{1}{2})$:

$$\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3},$$

als Coefficienten von $f^{\mathrm{IV}}(a)$:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4},$$

endlich als Coefficienten von $f^{\mathrm{V}}(a+\frac{1}{2})$:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+2.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$$
$$=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5},$$

wo das Gesetz der Fortschreitung klar ist. Die vollständige Formel ist daher:

$$f(a+nw)=f(a)+nf'(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n(n-1)}{1.2}f''(a)+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f'''(a+\tfrac{1}{2})$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}f^{\mathrm{IV}}(a)+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2})+\dots \quad (2)$$

Führt man statt der Differenzen, welche $a+\frac{1}{2}$ unter dem Functionenzeichen haben, diejenigen ein, welche $a-\frac{1}{2}$ enthalten, so hat man:

$$\begin{aligned} f'(a+\tfrac{1}{2}) &= f'(a-\tfrac{1}{2})+f''(a),\\ f'''(a+\tfrac{1}{2}) &= f'''(a-\tfrac{1}{2})+f^{\mathrm{IV}}(a),\\ f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}) &= f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2})+f^{\mathrm{VI}}(a). \end{aligned}$$

Es bleiben also dann die Coefficienten der Differenzen

von einer ungeraden Ordnung dieselben, dagegen ist der Coefficient von $f''(a)$:

$$n + \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

und der von $f^{\mathrm{IV}}(a)$:

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}.$$

Man erhält daher:

$$f(a+nw) = f(a) + nf'(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{n(n+1)}{1.2} f''(a) + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} f'''(a-\tfrac{1}{2})$$
$$+ \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(a) + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4.5} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) + \ldots,$$

wo das Gesetz der Fortschreitung wieder klar ist.

Nimmt man nun an, dafs man einen Werth interpoliren soll, dessen Argument zwischen a und $a-w$ liegt, so ist n negativ. Soll aber n immer eine positive Zahl bezeichnen, so mufs man $-n$ statt n in der Formel anwenden und die letztere wird daher für diesen Fall:

$$f(a-nw) = f(a) - nf'(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{n(n-1)}{1.2} f''(a) \tag{3}$$
$$- \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} f'''(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(a)$$
$$- \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) + \ldots$$

Diese Formel hat man also anzuwenden, wenn man rückwärts interpolirt. Schreibt man die beiden Formeln (2) und (3) wieder so um, wie es vorher mit der Newtonschen Formel geschehen ist, so erhält man:

$$f(a+nw) = f(a) + n\,[f'(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n-1}{2}\,[f''(a) + \frac{n+1}{3} \times$$
$$\times\,[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n-2}{4}\,[f^{\mathrm{IV}}(a) + \ldots \tag{2a}$$

$$f(a-nw) = f(a) - n\,[f'(a-\tfrac{1}{2}) - \frac{n-1}{2}\,[f''(a) - \frac{n+1}{3} \times$$
$$\times\,[f'''(a-\tfrac{1}{2}) - \frac{n-2}{4}\,[f^{\mathrm{IV}}(a) - \ldots \tag{3a}$$

Denkt man sich durch das Schema der Functionen und Differenzen in der Gegend, wo der zu interpolirende Functionenwerth ungefähr liegt, eine horizontale Linie gezogen, so hat man, indem man die erstere Formel anwendet, wenn $a+nw$ näher an a als an $a+w$, die andere, wenn $a-nw$ näher an a als an $a-w$ liegt, immer diejenigen Differenzen

zu benutzen, die zu beiden Seiten der horizontalen Linie zunächst derselben liegen. Auf das Zeichen der Differenzen hat man weiter gar nicht zu achten, sondern jede Differenz so zu verbessern, dafs sich dieselbe der auf der anderen Seite der horizontalen Linie stehenden nähert. Wendet man z. B. die erstere Formel an, liegt also das Argument zwischen a und $a+\frac{1}{2}w$, so würde der horizontale Strich zwischen $f''(a)$ und $f''(a+1)$ fallen. Man hat dann zu $f''(a)$ hinzuzuthun:

$$+\frac{n+1}{3}f'''(a+\tfrac{1}{2})=+\frac{n+1}{3}[f''(a+1)-f''(a)].$$

Ist also $f''(a)\binom{\text{kleiner}}{\text{gröfser}}$ als $f''(a+1)$, so wird das verbesserte $f''(a)\binom{\text{gröfser}}{\text{kleiner}}$ werden, also sich immer $f''(a+1)$ nähern.

Man erlangt übrigens noch eine etwas gröfsere Genauigkeit, wenn man als letzte Differenz, wo man abschliefst, das arithmetische Mittel der beiden zunächst der Horizontalen stehenden Differenzen nimmt. Das arithmetische Mittel zweier Differenzen soll bezeichnet werden durch das Zeichen der Differenzfunction und das arithmetische Mittel der beiden Argumente, die darunter stehen, sodafs:

$$f'(a+n)=\frac{f'(a+n-\frac{1}{2})+f'(a+n+\frac{1}{2})}{2}$$

ist. Dann kommen, grade umgekehrt wie früher, bei den Differenzzeichen der geraden Ordnungen Brüche vor, bei den ungeraden dagegen ganze Zahlen, sodafs keine Zweideutigkeit entstehen kann. Schliefst man nun z. B. mit der zweiten Differenz ab, so nehme man beim Vorwärtsinterpoliren das arithmetische Mittel von $f''(a)$ und $f''(a+1)$ d. h. $f''(a+\frac{1}{2})$. Dann benutzt man statt des Gliedes

$$\frac{n(n-1)}{1.2}f''(a)$$

jetzt das Glied

$$\frac{n(n-1)}{1.2}f''(a+\tfrac{1}{2}) \text{ d. h. } \frac{n(n-1)}{1.2}[f''(a)+\tfrac{1}{2}f'''(a+\tfrac{1}{2})].$$

Während man also, wenn man blos $f''(a)$ nähme, um das ganze dritte Glied fehlte, so fehlt man jetzt nur noch um:

$$\left(\frac{n(n-1)(n+1)}{1.2.3}-\frac{n(n-1)}{1.2.2}\right)f'''(a+\tfrac{1}{2})=\frac{n(n-1)(n-\frac{1}{2})}{1.2.3}f'''(a+\tfrac{1}{2}).$$

Für $n = \frac{1}{2}$ würde also der Fehler, soweit derselbe von den dritten Differenzen abhängt, völlig Null.

Für diesen Fall, daſs n gleich $\frac{1}{2}$ ist, daſs man also in die Mitte interpoliren will, ist es gleichgültig, welcher der beiden Formeln (2) oder (3) man sich bedient, da man entweder von dem Argumente a ausgehen und vorwärts interpoliren oder von dem Argumente $a + w$ ausgehen und rückwärts interpoliren kann. Die für diesen Fall bequemste Formel erhält man aber aus der Verbindung beider. Für $n = \frac{1}{2}$ geht die Formel (2) über in:

$$f(a + \tfrac{1}{2}w) = f(a) + \tfrac{1}{2} f'(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{1.2} f''(a) + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{1.2.3} f'''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{1.2.3.4} f^{IV}(a) + \ldots$$

Die Formel (3) wird dagegen, wenn man von dem Argumente $a + w$ ausgeht:

$$f(a + \tfrac{1}{2}) = f(a + w) - \tfrac{1}{2} f'(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{1.2} f''(a + 1) - \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1.2.3} f'''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{1.2.3.4} f^{IV}(a + 1) - \ldots$$

Nimmt man aus beiden Formeln das arithmetische Mittel, so fallen alle Glieder, in denen Differenzen einer ungeraden Ordnung vorkommen, weg und man erhält dann für die Interpolation in die Mitte die folgende sehr bequeme Formel, in der nur arithmetische Mittel von geraden Differenzen vorkommen:

$$f(a + \tfrac{1}{2}w) = f(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{8} f''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{3}{128} f^{IV}(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{5}{1024} f^{VI}(a + \tfrac{1}{2}) + \ldots \quad (4)$$

oder:

$$f(a + \tfrac{1}{2}w) = f(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{8}\left[f''(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{3}{16}\left[f^{IV}(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{5}{24}\left[f^{VI}(a + \tfrac{1}{2}) - \ldots, \right.\right.\right. \quad (4a)$$

wo das Gesetz der Fortschreitung deutlich ist.

Beispiel. Man suche die Länge des Mercur für Jan. 4 12^h, dann hat man die Formel (2 a) anzuwenden. Die hier zu benutzenden Differenzen wären die folgenden:

		I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.
		+ 7° 0′ 38″.0		+ 2′ 44″.3	
Jan. 4	317° 7′ 29″.5		+ 21′ 32″.4		+ 10″.1
		7 22 10 .4		2 54 .5	
6	324 29 39 .9		24 26 .9		4 .7

Hier ist nun $n = \frac{1}{4}$, also

$$\frac{n-1}{2} = \frac{3}{8}, \quad \frac{n+1}{3} = \frac{5}{12}, \quad \frac{n-2}{4} = \frac{7}{16},$$

wenn man auf die Zeichen weiter keine Rücksicht nimmt, und man erhält:

Arithmetisches Mittel der 4ten Differenzen		$\times \frac{7}{16}$	$=$	3″. 2
Verbesserte dritte Differenz	2′ 51″. 3	$\times \frac{5}{12}$	$=$	1′ 11″. 4
Verbesserte zweite Differenz	22′ 43″. 8	$\times \frac{3}{8}$	$=$	8′ 31″. 4
Verbesserte erste Differenz	7° 13′ 39″. 0	$\times \frac{1}{4}$	$=$	1° 48′ 24″. 7,

also die Länge für Jan. 4 . 5

318° 55′ 54″. 2.

Sucht man die Länge für Jan. 5 . 5, so hat man die Formel (3 a) anzuwenden und die Differenzen zu nehmen, die auf beiden Seiten des unteren horizontalen Striches stehen. Man findet dann die Länge für Jan. 5 . 5

322° 36′ 56″. 7.

Um die Formel (4 a) anzuwenden, suche man die Länge für Jan. 5 . 0. Man erhält dann:

Arithmetisches Mittel der 4ten Differenzen	$\times - \frac{3}{16}$	$=$	— 1″. 4
Verbessert. arith. Mittel der 2ten Differenzen	$\times - \frac{1}{8}$	$=$	— 2′ 52″. 3
Arithmetisches Mittel der Functionen		$=$	320° 48′ 34″. 7

mithin die Länge für Jan. 5 . 0

320° 45′ 42″. 4.

Bildet man jetzt die Differenzen der interpolirten Werthe, so erhält man:

		I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.
Jan. 4 . 0	317° 7′ 29″. 5			
		+ 1° 48′ 24″. 7		
4 . 5	318 55 54 . 2		+ 1′ 23″. 5	
		1 49 48 . 2		+ 2″. 6
5 . 0	320 45 42 . 4		1 26 . 1	
		1 51 14 . 3		+ 2″. 8
5 . 5	322 36 56 . 7		1 28 . 9	
		1 52 43 . 2		
6 . 0	324 29 39 . 9			

Der regelmäſsige Gang der Differenzen zeigt die Richtigkeit der Interpolation. Dieser Prüfung durch die Differenzen bedient man sich übrigens bei allen Rechnungen, wo man für gewisse, in gleichen Intervallen fortschreitende Argumente eine Reihe von Functionswerthen berechnet hat. Ist nämlich bei einem Werthe z. B. $f(a)$ ein Fehler x vorgekommen, so wird das Schema der Differenzen jetzt das folgende:

$f(a-3w)$				
	$f'(a-\frac{5}{2})$			
$f(a-2w)$		$f''(a-2)$		
	$f'(a-\frac{3}{2})$		$f'''(a-\frac{3}{2})+x$	
$f(a-w)$		$f''(a-1)+x$		$f^{IV}(a-1)-4x$
	$f'(a-\frac{1}{2})+x$		$f'''(a-\frac{1}{2})-3x$	
$f(a)+x$		$f''(a)-2x$		$f^{IV}(a)+6x$
	$f'(a+\frac{1}{2})-x$		$f'''(a+\frac{1}{2})+3x$	
$f(a+w)$		$f''(a+1)+x$		$f^{IV}(a+1)-4x$
	$f'(a+\frac{3}{7})$		$f'''(a+\frac{3}{2})-x$	
$f(a+2w)$		$f''(a+2)$		
	$f'(a+\frac{5}{2})$			
$f(a+3w)$				

Ein Fehler in dem Werthe einer Function wird sich also in den Differenzen sehr vergrößsert zeigen, und zwar werden die stärksten Sprünge in der horizontalen Linie vorkommen, in welcher der fehlerhafte Werth der Function steht.

15. Häufig kommt der Fall vor, daſs man die numerischen Werthe der Differentialquotienten einer Function braucht, deren analytischen Ausdruck man nicht kennt, sondern von der nur eine Reihe von numerischen Werthen, die in gleichen Intervallen auf einander folgen, gegeben ist. In diesem Falle muſs man sich zur Berechnung der numerischen Werthe der Differentialquotienten der Interpolationsformeln bedienen.

Entwickelt man die Newtonsche Interpolationsformel nach Potenzen von n, so ist:

$$f(a+nw)=f(a)+n\,[f'(a+\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}f''(a+1)+\tfrac{1}{3}f'''(a+\tfrac{3}{2})-\ldots.$$
$$+\frac{n^2}{1.2}[f''(a+1)-f'''(a+\tfrac{3}{2})+\ldots]$$
$$+\frac{n^3}{1.2.3}[f'''(a+\tfrac{3}{2})-\ldots$$

Da nun aber auch nach dem Taylorschen Lehrsatze:

$$f(a+nw)=f(a)+\frac{df(a)}{da}nw+\frac{d^2f(a)}{da^2}\frac{n^2w^2}{1.2}+\frac{d^3f(a)}{da^3}\frac{n^3w^3}{1.2.3}+\ldots$$

so erhält man durch die Vergleichung beider Reihen:

$$\frac{df(a)}{da}=\frac{1}{w}[f'(a+\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}f''(a+1)+\tfrac{1}{3}f'''(a+\tfrac{3}{2})-\ldots]$$
$$\frac{d^2f(a)}{da^2}=\frac{1}{w^2}[f''(a+1)-f'''(a+\tfrac{3}{2})+\ldots].$$

Bequemere Werthe für die Differentialquotienten findet man aus der Formel 2 in No. 14. Führt man in diese Formel die arithmetischen Mittel der ungeraden Differenzen ein, indem man setzt:

$$f'(a+\tfrac{1}{2})=f'(a)+\tfrac{1}{2}f''(a)$$
$$f'''(a+\tfrac{1}{2})=f'''(a)+\tfrac{1}{2}f^{IV}(a)$$
etc.,

so erhält man:

$$f(a+nw)=f(a)+nf'(a)+\frac{n^2}{1.2}f''(a)+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3}f'''(a)$$
$$+\frac{(n+1)\,n^2\,(n-1)}{1.2.3.4}f^{IV}(a)+\ldots,$$

eine Formel, welche die geraden Differenzen, welche mit $f(a)$ auf einer Horizontalen stehen, enthält, dagegen die arithmeti-

schen Mittel der ungeraden Differenzen, die zu beiden Seiten der Horizontalen liegen. Entwickelt man dieselbe nach Potenzen von n, so hat man:

$$
\begin{aligned}
f(a+nw) = f(a) &+ n\,[f'(a) - \tfrac{1}{6}f'''(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{140}f^{\mathrm{VII}}(a) + \ldots] \\
&+ \frac{n^2}{1.2}\,[f''(a) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a) - \ldots] \\
&+ \frac{n^3}{1.2.3}\,[f'''(a) - \tfrac{1}{4}f^{\mathrm{V}}(a) + \tfrac{7}{120}f^{\mathrm{VII}}(a) - \ldots] \\
&+ \frac{n^4}{1.2.3.4}\,[f^{\mathrm{IV}}(a) - \tfrac{1}{6}f^{\mathrm{VI}}(a) + \ldots] \\
&+ \frac{n^5}{1.2.3.4.5}\,[f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{3}f^{\mathrm{VII}}(a) + \ldots]
\end{aligned}
$$

und daraus:

$$
\begin{aligned}
\frac{df(a)}{da} &= \frac{1}{w}\,[f'(a) - \tfrac{1}{6}f'''(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{140}f^{\mathrm{VII}}(a) + \ldots], \\
\frac{d^2f(a)}{da^2} &= \frac{1}{w^2}\,[f''(a) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a) - \ldots], \\
\frac{d^3f(a)}{da^3} &= \frac{1}{w^3}\,[f'''(a) - \tfrac{1}{4}f^{\mathrm{V}}(a) + \tfrac{7}{120}f^{\mathrm{VII}}(a) - \ldots],
\end{aligned}
\tag{5}
$$

etc.

Hat man die Differentialquotienten für eine Function zu suchen, die nicht unter den gegebenen vorkommt, z. B. für $f(a+nw)$, so hat man in diesen Formeln $a+n$ statt a zu setzen, sodafs:

$$
\begin{aligned}
\frac{df(a+nw)}{da} &= \frac{1}{w}\,[f'(a+n) - \tfrac{1}{6}f'''(a+n) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a+n) - \ldots], \\
\frac{d^2f(a+nw)}{da^2} &= \frac{1}{w^2}\,[f''(a+n) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a+n) + \ldots],
\end{aligned}
\tag{6}
$$

etc.

Die jetzt anzuwendenden Differenzen kommen in dem Schema derselben nicht vor, sondern müssen erst berechnet werden. Für die geraden Differenzen z. B. $f''(a+n)$ ist dies leicht, da dieselben durch die gewöhnlichen Interpolationsformeln erhalten werden, indem man jetzt $f''(a)$, $f''(a+n)$ etc. als die Functionen, die dritten Differenzen als deren erste etc. betrachtet. Die ungeraden Differenzen sind aber arithmetische Mittel und man mufs also zuerst noch eine Formel für die Interpolation arithmetischer Mittel entwickeln. Es ist aber:

$$f'(a+n) = \frac{f'(a+n-\tfrac{1}{2}) + f'(a+n+\tfrac{1}{2})}{2}$$

und nach der Interpolationsformel 2 in No. 14:

$$f'(a-\tfrac{1}{2}+n)=f'(a-\tfrac{1}{2})+nf''(a)+\frac{n(n-1)}{1.2}f'''(a-\tfrac{1}{2})$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f^{IV}(a)+\ldots,$$
$$f'(a+\tfrac{1}{2}+n)=f'(a+\tfrac{1}{2})+nf''(a)+\frac{n(n+1)}{1.2}f'''(a+\tfrac{1}{2})$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f^{IV}(a)+\ldots,$$

also erhält man, wenn man das arithmetische Mittel aus beiden Formeln nimmt, die Formel für die Interpolation eines arithmetischen Mittels:

$$f'(a+n)=f'(a)+nf''(a)+\frac{n^2}{1.2}f'''(a)+\tfrac{1}{4}nf^{IV}(a)$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}f^{IV}(a)+\ldots$$

Die beiden Glieder

$$\frac{n^2}{1.2}f'''(a)+\tfrac{1}{4}nf^{IV}(a)$$

sind aus dem arithmetischen Mittel der Glieder

$$\frac{n(n-1)}{1.2}f'''(a-\tfrac{1}{2})$$

und

$$\frac{n(n+1)}{1.2}f'''(a+\tfrac{1}{2})$$

entstanden, welches

$$\frac{n^2}{1.2}f'''(a)+\frac{n}{4}[f'''(a+\tfrac{1}{2})-f'''(a-\tfrac{1}{2})]$$

giebt. Verbindet man die beiden Glieder, welche $f^{IV}(a)$ enthalten, so kann man die obige Formel auch so schreiben:

$$f'(a+n)=f'(a)+nf''(a)+\frac{n^2}{2}f'''(a)+\frac{2n^3+n}{12}f^{IV}(a)+\ldots \quad (7)$$

Vermittelst der Formeln 5, 6 und 7 kann man also die numerischen Werthe der Differentialquotienten einer Function für jedes beliebige Argument aus den geraden Differenzen und den arithmetischen Mitteln der ungeraden Differenzen berechnen, wenn eine Reihe von numerischen, in gleichen Intervallen auf einander folgenden Werthen der Function gegeben ist.

Man kann nun aber auch noch andere Formeln für die Differentialquotienten entwickeln, in denen die einfachen un-

geraden Differenzen, dagegen die arithmetischen Mittel der geraden vorkommen.

Führt man nämlich in die Interpolationsformel (B) die arithmetischen Mittel der geraden Differenzen ein, indem man setzt:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} f'(a+\tfrac{1}{2}) \\ f''(a) &= f''(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} f'''(a+\tfrac{1}{2}) \\ f^{IV}(a) &= f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} f^{V}(a+\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

etc.

so erhält man, da:

$$\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} - \tfrac{1}{2}\,\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} = \frac{n\,(n-1)\,(n-\tfrac{1}{2})}{1\,.\,2\,.\,3}$$

etc.

$$f(a+nw) = f(a+\tfrac{1}{2}) + (n-\tfrac{1}{2})\,f'(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,f''(a+\tfrac{1}{2})$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-\tfrac{1}{2})}{1\,.\,2\,.\,3}\,f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots$$

Schreibt man hier $n+\frac{1}{2}$ statt n, so wird das Gesetz der Coefficienten einfacher, indem man erhält:

$$f[a+(n+\tfrac{1}{2})w] = f(a+\tfrac{1}{2}) + n f'(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{(n+\tfrac{1}{2})\,(n-\tfrac{1}{2})}{1\,.\,2}\,f''(a+\tfrac{1}{2})$$
$$+ \frac{(n+\tfrac{1}{2})\,n\,(n-\tfrac{1}{2})}{1\,.\,2\,.\,3}\,f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{(n+\tfrac{3}{2})(n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots$$

Entwickelt man diese Formel nach Potenzen von n, so erhält man, weil die von n unabhängigen Glieder:

$$f(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{8}\,f''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{3}{8\,.\,16}\,f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}) - \ldots = f(a+\tfrac{1}{2}w)$$

sind

$$\begin{aligned} f[a+(n+\tfrac{1}{2})w] = f(a+\tfrac{1}{2}w) & \\ &+ n\,[f'(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{24}\,f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{3}{640}\,f^{V}(a+\tfrac{1}{2}) - \ldots] \\ &+ \frac{n^2}{1\,.\,2}\,[f''(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{5}{24}\,f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{259}{5760}\,f^{VI}(a+\tfrac{1}{2}) - \ldots] \\ &+ \frac{n^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,[f'''(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{8}\,f^{V}(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{37}{1920}\,f^{VII}(a+\tfrac{1}{2}) - \ldots] \\ &+ \frac{n^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,[f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{7}{24}\,f^{VI}(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots] \end{aligned}$$

Vergleicht man dann diese Formel mit der Entwickelung von $f(a+\frac{1}{2}w+nw)$ nach dem Taylorschen Lehrsatze, so findet man:

$$\frac{df(a+\frac{1}{2}w)}{da} = \frac{1}{w}\left[f'(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{24}f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{3}{640}f^{V}(a+\tfrac{1}{2}) - \ldots\right]$$

$$\frac{d^2 f(a+\frac{1}{2}w)}{da^2} = \frac{1}{w^2}\left[f''(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{5}{24}f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{259}{5760}f^{VI}(a+\tfrac{1}{2}) - \ldots\right] \quad (8)$$

etc.

Dieser Formeln wird man sich am bequemsten dann bedienen, wenn man die Differentialquotienten einer Function für ein Argument zu berechnen hat, welches das arithmetische Mittel zweier auf einander folgenden Argumente ist. Für andere Argumente, z. B. $a+(n+\frac{1}{2})w$, hat man wieder:

$$w.\frac{df[a+(n+\frac{1}{2})w]}{da} = f'(a+\tfrac{1}{2}+n) - \frac{1}{24}f'''(a+\tfrac{1}{2}+n) + \frac{3}{640}f^{V}(a+\tfrac{1}{2}+n) - \ldots \quad (9)$$

etc.

und hier wird man wieder die Differenz $f'(a+\frac{1}{2}+n)$, sowie überhaupt alle ungeraden Differenzen, durch die gewöhnlichen Interpolationsformeln berechnen. Da aber die geraden Differenzen arithmetische Mittel sind, so erhält man die für diese anzuwendende Formel aus der Formel (7) für die Interpolation eines arithmetischen Mittels aus ungeraden Differenzen, wenn man $a+\frac{1}{2}$ statt a setzt und, um $f''(a+\frac{1}{2}+n)$ zu finden, alle Accente um eins vermehrt etc., sodafs z. B.:

$$f''(a+\tfrac{1}{2}+n) = f''(a+\tfrac{1}{2}) + nf'''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n^2}{2}f^{IV}(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{2n^3+n}{12}f^{V}(a+\tfrac{1}{2}) + \ldots$$

Beispiel. Nach dem Berliner Jahrbuche für 1848 hat man die folgenden Rectascensionen des Mondes:

			I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.
Juli 12	0^h	$16^h\ 14^m\ 26^s.33$				
			$+25^m\ 3^s.99$			
	12^h	39 30 .32		$+23^s.75$		
			25 27 .74		$-1^s.39$	
13	0^h	17 4 58 .06		22 .36		$-0^s.85$
			25 50 .10		2 .24	
	12^h	30 48 .16		20 .12		0 .79
			26 10 .22		3 .03	
14	0^h	56 58 .38		17 .09		0 .67
			26 27 .31		3 .70	
	12^h	18 23 25 .69		13 .39		
			26 40 .70			
15	0^h	50 6 .39				

Sucht man hieraus die ersten Differentialquotienten für Juli 13 10^h, 11^h und 12^h und wendet dazu die Formel (9) an, so mufs man zuerst die ersten und dritten Differenzen für diese Zeiten berechnen. Die dritte der ersten Differenzen entspricht dem Argumente Juli 13 6^h und ist $f'(a+\frac{1}{2})$, also

ist für 10^h, 11^h, 12^h n respective $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$ und $\frac{1}{2}$. Wenn man also auf die gewöhnliche Weise interpolirt, so erhält man:

	$f'(a+\frac{1}{2}+n)$	$f'''(a+\frac{1}{2}+n)$
10^h	$+25^m 57^s.11$	$-2^s.51$
11^h	25 58 .81	2 .58
12^h	26 0 .49	2 .64

Daraus erhält man also die Differentialquotienten

für 10^h	$+25^m 57^s.21$
11^h	25 58 .92
12^h	26 0 .60

bei denen das Intervall $w=12$ Stunden zum Grunde liegt. Will man dieselben für eine Stunde haben, so mufs man also durch 12 dividiren und erhält dann die folgenden Werthe:

10^h	$2^m 9^s.77$
11^h	9 .91
12^h	10 .05,

die die stündlichen Geschwindigkeiten des Mondes in Rectascension für diese Zeiten ausdrücken.

Hätte man Formel 6 anwenden wollen, wo arithmetische Mittel der ungeraden Differenzen vorkommen, so hätte man, wenn man $a=$ Juli 13 12^h nimmt, für 10^h z. B., wo $n=-\frac{1}{6}$ ist, nach Formel (7) erhalten:

$$f'(a-\tfrac{1}{6})=+25^m 56^s.77 \text{ und } f'''(a-\tfrac{1}{6})=-2^s.51$$

und daraus nach Formel (6) für den Differentialquotienten $+2^m 9^s.77$.

Die zweiten Differenzen sind:

für 10^h	$+20^s.55$
11^h	20 .34
12^h	20 .12

Legt man dazu $-\frac{1}{12}$ der 4ten Differenzen und dividirt durch 144, so erhält man die zweiten Differentialquotienten für die Einheit der Stunde:

für 10^h	$+0^s.1432$
11^h	0 .1417
12^h	0 .1402

Anm. Vergl. über Interpolationsrechnung den hierüber handelnden Aufsatz von Encke im Jahrbuche für 1830 und den vorher angeführten Aufsatz über mechanische Quadratur im Jahrbuche für 1837.

C. Theorie einiger im Folgenden öfters angewandten bestimmten Integrale.

16. Da das Integral $\int e^{-t^2}\,dt$, sowohl zwischen den Grenzen o und ∞, als auch zwischen den Grenzen o und T oder T und ∞ genommen, öfters in der Astronomie angewandt wird, so sollen hier die wichtigsten auf dasselbe bezüglichen Sätze und die für die numerische Berechnung dienenden Formeln zusammengestellt werden.

Das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ ist eine Umformung eines Eulerschen Integrals der ersten Klasse, also einer Gamma-Function. Für diese Integrale hat man nämlich die folgende Bezeichnung eingeführt:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,.\,x^{a-1}\,dx = \Gamma(a), \tag{1}$$

wo a immer eine positive Gröfse ist, und da man sogleich findet

$$\int e^{-x}\,.\,x^{a-1}\,dx = \int e^{-x}\,d\left(\frac{x^a}{a}\right) = e^{-x}\,.\,\frac{x^a}{a} + \frac{1}{a}\int x^a\,e^{-x}\,dx$$

und nach Einsetzung der Grenzen der Theil ohne Integralzeichen verschwindet, so erhält man:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,.\,x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty e^{-x}\,.\,x^a\,dx$$

oder

$$a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1) \tag{2}$$

Da nun aber, wie man leicht sieht:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \Gamma(1) = 1$$

ist, so findet sich, so oft n eine ganze Zahl ist:

$$\Gamma(n) = (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,1$$

Setzt man in der Gleichung (1) $x = t^2$, so wird:

$$2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,.\,t^{2(a-1)+1}\,.\,dt = \Gamma(a);$$

also für $a = \frac{1}{2}$:

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,.\,dt = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

Um nun dies Integral zu finden, multiplicire man es mit einem ähnlichen $\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,dy$, so erhält man:

$$\left(\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(t^2+y^2)}\,dt\,.\,dy.$$

Setzt man nun hierin $y = xt$, also $dy = t\,.\,dx$, so erhält man:

$$\left(\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2}\,.\,t\,dt,$$

oder da

$$\int\limits_0^\infty e^{-(1+x^2)t^2}\,t\,dt = \frac{1}{2\,(1+x^2)},$$

so wird:

$$\left(\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\,(\text{arc tang}\,\infty - \text{arc tang}\,0) = \frac{\pi}{4},$$

also

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{3}$$

Hieraus folgt also $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, und daher aus der Gleichung (2):

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \ \Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}\ \text{etc.}$$

Führt man in der Gleichung (1) eine neue Constante ein dadurch, dafs man setzt: $x = ky$, wo k positiv sein soll, damit die Grenzen nicht geändert werden, so erhält man noch:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ky}\,k^{a-1}\,y^{a-1}\,k\,dy = \Gamma(a),$$

mithin

$$\int\limits_0^\infty e^{-ky}\,y^{a-1}\,dy = \frac{\Gamma(a)}{k^a}. \tag{4}$$

17. Um das Integral $\int\limits_0^T e^{-t^2}dt$ zu finden, wendet man verschiedene Methoden an. So lange der Werth T klein ist, erhält man leicht, wenn man e^{-t^2} in eine Reihe entwickelt:

$$\int\limits_0^T e^{-t^2}\,dt = T - \frac{T^3}{3} + \tfrac{1}{2}\,\frac{T^5}{5} - \frac{1}{2\,.\,3}\,\frac{T^7}{7} + \ldots. \tag{5}$$

und da $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, so ergiebt sich auch daraus $\int\limits_T^\infty e^{-t^2}dt$.

Diese Reihe mufs irgend einmal convergiren, da die Nenner der Glieder immer nur im Verhältnifs von T^2 zunehmen, während der Nenner fortwährend wächst; indefs ist die Convergenz nur, wenn T klein ist, hinlänglich schnell. Ist daher T grofs, so bedient man sich zur Berechnung der Transcendente einer anderen Reihe, welche man durch theilweise Integration erhält und die zwar bis ins Unendliche fortgesetzt divergirt, aus der man aber doch die Werthe mit beliebiger Annäherung erhalten kann, indem dieselbe die Eigenschaft hat, dafs wenn man bei irgend einem Gliede abbricht, die folgenden Glieder zusammen nicht mehr betragen als das zuletzt mitgenommene. Es ist nämlich:

$$\int e^{-t^2}\,dt = \int \frac{d\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{t}$$

oder, wenn man theilweise integrirt:

$$= -\tfrac{1}{2}\,\frac{e^{-t^2}}{t} - \tfrac{1}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^2}.$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$-\tfrac{1}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^2} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{d\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)}{dt}\,\frac{dt}{t^3} = +\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{-t^2}}{t^3}$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^4}$$

$$\tfrac{3}{4}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^4} = \tfrac{3}{4}\int \frac{d\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{t^5} = -\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\,\frac{e^{-t^2}}{t^5} - \ldots,$$

also endlich:

$$\int e^{-t^2}\,dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1\,.\,3}{(2t^2)^2} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{(2t^2)^3} + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. \pm \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots.(2n-1)}{(2t^2)^n} \mp \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots.(2n+1)}{2^{n+1}}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}}\right],$$

oder nach Einsetzung der Grenzen:

$$\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left[1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1\,.\,3}{(2T^2)^2} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{(2T^2)^3} + \ldots\right.$$
$$\left. \pm \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{(2T^2)^n} \mp \frac{1.3.5\ldots.(2n+1)}{2^{n+1}}\int_T^\infty e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}}\right]. \qquad (6)$$

Die Factoren des Zählers wachsen nun immer, sie werden daher auch gröfser als $2T^2$ werden und von hier ab wachsen dann alle Glieder unaufhörlich, da das im Zähler hinzukommende mit jedem Gliede gröfser wird als das im Nenner hinzukommende. Betrachtet man nun aber den Rest

$$\mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2^{n+1}} \int_T^\infty e^{-t^2} \frac{dt}{t^{2n+2}},$$

so ist leicht zu zeigen, daſs dieser kleiner ist als das letzte mitgenommene Glied. Der Werth des Integrals ist nämlich kleiner als:

$$\int_T^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}}$$

multiplicirt mit dem gröſsten Werthe von e^{-t^2} zwischen den Grenzen T und ∞ d. h. e^{-T^2}, und da nun:

$$\int_T^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{T^{2n+1}},$$

so wird der Rest immer kleiner sein als:

$$\mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{2^{n+1} \; T^{2n+1}} e^{-T^2}.$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts weiter als das letzte mitgenommene Glied mit entgegengesetztem Zeichen. Bleibt man also z. B. bei einem negativen Gliede stehen, so ist der Rest positiv, aber kleiner als das letzte mitgenommene Glied. Um also möglichst genaue Werthe der Transcendente durch die Berechnung der Reihe zu erhalten, braucht man nur bis zu einem Gliede fortzugehen, welches grade sehr klein ist und hat dann nur einen Fehler zu befürchten, welcher kleiner als dies letzte sehr kleine Glied ist.

Die zweite Methode der Berechnung besteht darin, daſs man die Transcendente, wie Laplace zuerst gezeigt hat, in einen Kettenbruch verwandelt.

Man setze:

$$e^{t^2} \int_t^\infty e^{-x^2} dx = U, \qquad (\alpha)$$

so ist:

$$\frac{dU}{dt} = 2te^{t^2} \int_t^\infty e^{-x^2} dx - e^{t^2} e^{-t^2}$$

$$= 2tU - 1. \qquad (\beta)$$

Der $n$te Differentialquotient eines Productes xy ist aber:

$$\frac{d^n.xy}{dt^n}=\frac{d^n.x}{dt^n}y+n.\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots,$$

also ist auch:

$$\frac{d^{n+1}U}{dt^{n+1}}=2t.\frac{d^nU}{dt^n}+2n.\frac{d^{n-1}U}{dt^{n-1}},$$

eine Gleichung, welche man auch auf folgende Weise schreiben kann, wenn man das Product $1.2.3\ldots.n$ durch $n!$ bezeichnet:

$$\frac{(n+1)}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}.U}{dt^{n+1}}=2t\frac{d^nU}{n!\,dt^n}+2\frac{d^{n-1}U}{(n-1)!\,dt^{n-1}}$$

oder, wenn man noch $\frac{d^nU}{n!dt^n}$ durch U_n bezeichnet:

$$(n+1)\,U_{n+1}=2t\,U_n+2\,U_{n-1}.$$

Diese Gleichung gilt von $n=1$ an, wo dann U_0 die Function U selbst ist. Man erhält aus derselben:

$$-2\frac{U_{n-1}}{U_n}=2t-(n+1)\frac{U_{n+1}}{U_n},$$

also:

$$-\tfrac{1}{2}\frac{U_n}{U_{n-1}}=\frac{1}{2t-(n+1)\frac{U_{n+1}}{U_n}}=\frac{\frac{1}{2t}}{1-(n+1)\frac{1}{2t}\frac{U_{n+1}}{U_n}}$$

oder:

$$-\frac{U_n}{2t\,U_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2t^2}}{1-(n+1)\frac{1}{2t}\frac{U_{n+1}}{U_n}}. \qquad (\gamma)$$

Nun war aber nach Gleichung (β):

$$\frac{U_1}{U}=2t-\frac{1}{U},$$

also:

$$U=\frac{1}{2t-\frac{U_1}{U}}=\frac{\frac{1}{2t}}{1-\frac{1}{2t}\frac{U_1}{U}},$$

Aus der Gleichung (γ) folgt aber:

$$-\frac{1}{2t}\frac{U_1}{U}=\frac{\frac{1}{2t^2}}{1-2\frac{1}{2t}\frac{U_2}{U_1}}.$$

Substituirt man dies in die vorige Gleichung und setzt die Entwickelung fort, so erhält man:

$$U = \cfrac{\frac{1}{2t}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2t^2}}{1 + 2\cfrac{\frac{1}{2t^2}}{1 + 3\cfrac{\frac{1}{2t^2}}{1 + \text{etc.},}}}}$$

also auch, wenn man $\frac{1}{2T^2} = q$ setzt:

$$2Te^{T^2}\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt = \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \cfrac{4q}{1 + \text{etc.}}}}}} \qquad (7)$$

Nach einer der drei Formeln (5), (6) oder (7) kann man dann immer den Werth des Integrals $\int_0^T e^{-t^2}\,dt$ oder $\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt$ berechnen. Wegen der häufigen Anwendung dieser Transcendente hat man aber auch dieselbe in Tafeln gebracht und man findet eine solche z. B. in Bessel's Fundamenta astronomiae für die Transcendente

$$e^{T^2}\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

aus der sich dann auch die andern Formen leicht herleiten lassen. Der erste Theil der dortigen Tafel hat zum Argumente T und geht von $T = 0$ bis $T = 1$ durch alle Hunderttheile. Da aber die Transcendente nach Formel (b) desto näher ihrem Argumente umgekehrt proportional ist, je gröſser T ist, so sind für gröſsere Argumente als $T = 1$ die Briggischen Logarithmen von T als Argumente gewählt. Dieser zweite Theil der Tafel erstreckt sich dann von Log. Brigg. 0.000 bis Log. Brigg. 1.000, was für die meisten Anwendungen genügt. Für noch gröſsere Argumente wird übrigens die Berechnung der Werthe nach Formel (b) sehr leicht.

18. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r\beta x} \sin \zeta}{\sqrt{\cos \zeta^2 + 2x \sin \zeta^2}} \, dx$$

läfst sich auf die obige Transcendente zurückführen. Führt man nämlich statt x die neue Veränderliche t ein, gegeben durch die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \zeta^2 + x = \frac{1}{\beta r} t^2,$$

$$\text{also} \quad dx = \frac{2t}{\beta r} dt,$$

so geht das obige Integral über in:

$$\sqrt{\frac{2}{\beta r}} \, e^{T^2} \int_T^\infty e^{-t^2} dt,$$

wenn man setzt:

$$T = \operatorname{cotang} \zeta \sqrt{\frac{\beta r}{2}}.$$

Wenn ferner

$$e^{T^2} \int_T^\infty e^{-t^2} dt = \Psi(r),$$

so wird:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r\beta x} \sin \zeta}{\sqrt{\cos \zeta^2 + 2x \sin \zeta^2}} \, dx = \sqrt{\frac{2}{\beta r}} \; \Psi(r). \tag{8}$$

Ebenso wird:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-rx} \sin \zeta}{\sqrt{\cos \zeta^2 + \frac{2x \sin \zeta^2}{\beta}}} \, dx = \sqrt{\frac{2\beta}{r}} \, \Psi(r). \tag{9}$$

Differenzirt man den Ausdruck $e^{-x} \sqrt{\cos \zeta^2 + \frac{2 \sin \zeta^2}{\beta} x}$ nach x und integrirt die entstehende Gleichung nach x zwischen den Grenzen 0 und ∞, so findet man leicht:

$$\int_0^\infty \frac{x e^{-x} \sin \zeta}{\sqrt{\cos \zeta^2 + \frac{2 \sin \zeta^2}{\beta} x}} \, dx = \sqrt{2\beta} \left\{ (\tfrac{1}{2} - T^2)\, \Psi(1) + \frac{T}{2} \right\}$$

$$\text{wo} \quad T = \operatorname{cotang} \zeta \sqrt{\frac{\beta}{2}}.$$

Und da nach Formel (9)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \sin\zeta}{\sqrt{\cos\zeta^2 + \frac{2\sin\zeta^2}{\beta} x}}\, dx = \sqrt{2\beta}\,.\,\Psi(1)$$

ist, so erhält man auch noch:

$$\int_0^\infty \frac{(1-x)\, e^{-x} \sin\zeta}{\sqrt{\cos\zeta^2 + \frac{2\sin\zeta^2}{\beta} x}}\, dx = \sqrt{2\beta} \left\{ (\tfrac{1}{2} + T^2)\; \Psi(1) - \frac{T}{2} \right\}, \qquad (10)$$

Formeln, von denen in der Folge Gebrauch gemacht werden wird.

D. Die Methode der kleinsten Quadrate.

19. In der Astronomie bestimmt man fortwährend Gröfsen durch Beobachtungen. Wenn man aber eine Erscheinung wiederholt beobachtet, so wird man aus den einzelnen Beobachtungen verschiedene Resultate finden, da die Unvollkommenheit sowohl der Instrumente, die man zur Beobachtung anwendet, als auch unserer Sinne, nicht minder zufällige äufsere Ursachen Fehler in den Beobachtungen erzeugen, die das Resultat entstellen. Es wird daher wichtig sein, eine Methode zu besitzen, durch welche man trotz der Fehlerhaftigkeit der einzelnen Beobachtungen ein Resultat finden kann, das der Wahrheit wenigstens so nahe als möglich kommt.

Die Fehler, welche man bei einer Beobachtung begehen kann, zerfallen in zwei verschiedene Classen; sie sind nämlich entweder constant oder zufällig. Die ersteren sind solche, die allen Beobachtungen gemeinschaftlich sind und die entweder in einer besonderen Eigenschaft des angewandten Instruments oder in der Individualität des Beobachters, die denselben Fehler bei jeder Beobachtung hervorbringt, ihren Grund haben kann. Die zufälligen Fehler hingegen sind solche, die bei den einzelnen Beobachtungen verschieden ausfallen sowohl ihrer Gröfse als ihrem Zeichen nach und daher von keiner stets in demselben Sinne wirkenden Ursache erzeugt werden. Diese letzteren Fehler kann man durch eine möglichst grofse Vervielfältigung der Beobachtungen elimini-

ren, da man erwarten kann, dafs unter einer sehr grofsen Anzahl von Beobachtungen das einzelne Resultat ebenso oft zu grofs als zu klein ist. Das Endresultat wird aber noch mit den constanten Fehlern, wenn solche vorhanden sind, behaftet bleiben, so lange z. B. derselbe Beobachter mit einem und demselben Instrumente beobachtet. Um diese Fehler zu eliminiren, mufs man daher die Methode der Beobachtung, sowie die Instrumente und Beobachter möglichst ändern, sodafs auch diese Fehler, wenn man die nach den einzelnen Methoden gewonnenen Resultate zusammenzieht, gleich zufälligen werden und daher im Endresultate einander zum grofsen Theile aufheben. Im Folgenden sollen daher alle Fehler als zufällige angenommen werden, indem vorausgesetzt wird, dafs die Methoden so vervielfältigt sind, dafs diese Voraussetzung gerechtfertigt ist; solange dies aber nicht der Fall ist, müssen auch die durch die folgenden Methoden erzielten Resultate als möglicherweise noch mit constanten Fehlern behaftet angesehen werden.

Wenn man nun eine Gröfse unmittelbar durch Messung bestimmt, so ist es natürlich, das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen als den der Wahrheit am nächsten kommenden Werth zu nehmen. Oft bestimmt man aber nicht eine einzelne Gröfse direct durch Beobachtungen, sondern man findet Werthe, die gewisse Relationen zwischen mehren Unbekannten geben, und man kann immer annehmen, dafs diese Relationen zwischen den beobachteten Gröfsen und den Unbekannten die Form linearer Gleichungen haben. Denn wenn auch in der Regel die Form der Function $f(\xi, \eta, \zeta$ etc.$)$, durch die die Abhängigkeit der beobachteten Werthe von den Unbekannten ξ, η, ζ etc. ausgedrückt wird, eine andere als die lineare sein wird, so kann man sich immer leicht genäherte Werthe der Unbekannten aus den Beobachtungen verschaffen und wenn man diese mit ξ_0, η_0, ζ_0 etc. bezeichnet und annimmt, dafs die wahren Werthe der Unbekannten $\xi_0 + x$, $\eta_0 + y$, $\zeta_0 + z$ etc. sind, so giebt jede Beobachtung eine Gleichung von der folgenden Form:

$$f(\xi, \eta, \zeta \ldots) = f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + \frac{df}{d\xi}\,x + \frac{df}{d\eta}\,y + \frac{df}{d\zeta}\,z,$$

vorausgesetzt, dafs die angenommenen Werthe so genähert

sind, daſs man die höheren Potenzen von x, y, $z\dots$ vernachlässigen kann. Hier ist $f(\xi, \eta, \zeta\dots)$ der beobachtete Werth, $f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ der mit den genäherten Werthen berechnete, also wird $f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0\dots) - f(\xi, \eta, \zeta\dots) = n$ eine bekannte Gröſse. Bezeichnet man dann $\frac{df}{d\xi}$ mit a, $\frac{df}{d\eta}$ mit b, $\frac{df}{d\zeta}$ mit c etc. und giebt man denselben Gröſsen für die verschiedenen Beobachtungen verschiedene Accente, so geben die einzelnen Beobachtungen Gleichungen von der folgenden Form:

$$0 = n + ax + by + cz + \dots,$$
$$0 = n' + a'x + b'y + c'z + \dots,$$
etc.,

wo also x, y, $z\dots$ unbekannte, zu bestimmende Gröſsen sind, n aber gleich dem berechneten weniger dem beobachteten Werthe der Function dieser Unbekannten ist. Solcher Gleichungen wird man so viele haben, als Beobachtungen vorhanden sind: die Anzahl derselben muſs man möglichst groſs nehmen, um aus allen Werthe von x, y, $z\dots$ zu erhalten, die von den Beobachtungsfehlern möglichst frei sind und, wie man sieht, müssen dieselben auch von der Art sein, daſs die Coefficienten a, b, c etc. in den verschiedenen Gleichungen verschiedene Werthe haben, da wenn z. B. zwei der Coefficienten in allen Gleichungen nahe gleich oder einander proportional sein sollten, die beiden zugehörigen Unbekannten sich nicht würden trennen lassen.

Um nun aus einer groſsen Anzahl solcher Gleichungen die bestmöglichen Werthe der Unbekannten zu erhalten, wandte man früher die folgende Methode an. Man änderte die Zeichen aller Gleichungen so, dafs alle Glieder, die x enthalten, dasselbe Zeichen haben. Addirt man dann alle Gleichungen, so erhält man eine Gleichung, in der der Factor von x der gröſstmögliche ist. Ebenso kann man Gleichungen finden, in denen der Coefficient von y und von z etc. der gröſstmögliche ist und erhält dann auf diese Weise so viele solcher Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind und aus deren Auflösung Werthe der Unbekannten, die der Wahrheit schon recht nahe kommen werden. Diese Methode ist aber immer etwas willkürlich und es ist daher besser, solche Gleichungen

nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln, wodurch man zugleich einen Begriff von der Genauigkeit der gefundenen Werthe erhält. Wären die Beobachtungen vollkommen richtig, so würden z. B. bei drei Unbekannten, auf welche Zahl wir uns im Folgenden beschränken, drei solcher Gleichungen hinreichen, um die wahren Werthe derselben zu finden. Jeder der aus den Beobachtungen gefundenen Werthe n wird aber mit einem Fehler behaftet sein, sodafs, wenn man auch wirklich die wahren Werthe von x, y, z substituirte, dennoch im Allgemeinen keine der Gleichungen erfüllt werden würde; bezeichnet man den dann übrig bleibenden Fehler mit Δ, so sollte man die obigen Gleichungen eigentlich so schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta &= n + ax + by + cz, \\ \Delta' &= n' + a'x + b'y + c'z, \\ &\text{etc.,} \end{aligned} \qquad (1)$$

und die Aufgabe ist nun die, aus einer grofsen Anzahl solcher Gleichungen diejenigen Werthe von x, y und z zu finden, die unter allen möglichen Werthen die wahrscheinlichsten sind.

20. Man kann sich nun die Voraussetzung erlauben, dafs kleine Fehler wahrscheinlicher sind als grofse, dafs also Beobachtungen, die der Wahrheit näher kommen, häufiger sein werden als andere, und dafs Abweichungen, die eine gewisse Grenze überschreiten, gar nicht vorkommen werden. Es wird daher ein bestimmtes Gesetz für das Vorkommen eines gewissen Fehlers stattfinden, dafs von der Gröfse desselben abhängt. Ist die Anzahl aller Beobachtungen m und kommt ein Fehler von der Gröfse Δ gesetzlich p mal vor, so ist $\frac{p}{m}$ die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Δ, die durch $\varphi(\Delta)$ bezeichnet werden soll. Dies $\varphi(\Delta)$ wird also Null sein, wenn Δ eine gewisse Grenze überschreitet, es wird ferner ein Maximum haben bei $\Delta = 0$ und wird auch für gleiche, positive oder negative Werthe von Δ gleich sein. Da $p = m\varphi(\Delta)$, so kommen also unter m Beobachtungen $m\varphi(\Delta)$ Fehler von der Gröfse Δ vor, ebenso $m\varphi(\Delta')$ Fehler von der Gröfse Δ' etc.; da aber die Summe der Anzahl aller Fehler gleich der Anzahl der Beobachtungen ist, so wird man haben:

$$m\varphi(\Delta) + m\varphi(\Delta') + \ldots . = m,$$

oder

$$\Sigma\varphi(\Delta) = 1.$$

Die Summe, welche die aller Fehler ist, mufs zwischen gewissen Grenzen $-k$ und $+k$ genommen werden, da aber nach der Voraussetzung für Fehler über diese Grenze hinaus $\varphi(\Delta) = 0$ ist, so kann es keinen Unterschied machen, wenn man statt der Grenzen $-k$ und $+k$ die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nimmt. Da aber alle Δ zwischen den Grenzen möglich sind, indem keine Gröfse zwischen den Grenzen $-k$ und $+k$ angegeben werden kann, die nicht ein möglicher Fehler ist, da also die Anzahl der Fehler, mithin auch die Anzahl der $\varphi(\Delta)$ unendlich grofs ist, so mufs wegen der obigen Gleichung jedes $\varphi(\Delta)$ eine unendlich kleine Gröfse sein. Die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler zwischen zwei Grenzen liegt, wird nun gleich der Summe aller der zwischen diesen Grenzen gelegenen Werthe von $\varphi(\Delta)$; sind diese Grenzen unendlich nahe, wo der Werth $\varphi(\Delta)$ innerhalb derselben constant ist, so wird diese Summe $\varphi(\Delta) \,.\, d\Delta$ und dies drückt daher die Wahrscheinlichkeit aus, dafs ein Fehler zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegt. Die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt, ist daher durch das bestimmte Integral

$$\int_a^b \varphi(\Delta) \,.\, d\Delta$$

ausgedrückt und man hat auch nach dem Vorigen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) \,.\, d\Delta = 1.$$

Nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, wenn $\varphi(\Delta)$, $\varphi(\Delta')$, etc. die Wahrscheinlichkeit der Fehler Δ, Δ' etc. ist, die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens aller dieser Fehler gleich dem Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fehler. Bezeichnet also W die Wahrscheinlichkeit, dafs unter einer Anzahl von Beobachtungen die Fehler der Reihe nach $\Delta, \Delta', \Delta''$, etc. vorkommen, so hat man:

$$W = \varphi(\Delta) \cdot \varphi(\Delta') \cdot \varphi(\Delta'') \ldots . \qquad (2)$$

Bleiben also in den Gleichungen (1) für gewisse angenommene Werthe von x, y, z die Fehler $\Delta, \Delta', \Delta''$ etc. übrig,

so ist W die Wahrscheinlichkeit, daſs gerade diese Fehler gemacht sind und wird also auch ein Maaſs abgeben für die Wahrscheinlichkeit dieses Systems von Werthen von x, y, z. Jedes andre System von Werthen von x, y, z wird auch ein andres System von übrig bleibenden Fehlern geben und die annehmbarsten Werthe für x, y, z werden offenbar diejenigen sein, welche die Wahrscheinlichkeit, daſs grade die übrig bleibenden Fehler begangen sind, zu einem Maximum machen, für welche also die Function W selbst ein Maximum ist. Für die Bestimmung dieses Maximums wird es aber nöthig sein, die Form der Function $\varphi(\Delta)$ zu bestimmen.

In dem Falle nun, daſs man nur eine Unbekannte und dafür aus den Beobachtungen die m Werthe n, n' n'' etc. gefunden hat, nimmt man für den wahrscheinlichsten Werth von x immer das Mittel aus allen Beobachtungen; man hat daher:

$$x = \frac{n + n' + n'' + \ldots.}{m}$$

oder

$$n - x + n' - x + n'' - x \ldots. = 0, \tag{a}$$

wo nun $n - x$, $n' - x$ etc. den Fehlern Δ entsprechen, sodaſs $n - x = \Delta$, $n' - x = \Delta'$, etc. Da aber für den wahrscheinlichsten Werth von x W ein Gröſstes ist, so erhält man, wenn man die Gleichung (2) logarithmisch differenzirt:

$$\frac{d.\log\varphi(\Delta)}{d\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dx} + \frac{d.\log\varphi(\Delta')}{d\Delta'} \cdot \frac{d\Delta'}{dx} + \ldots.. = 0,$$

und da in diesem Falle $\frac{d\Delta}{dx} = \frac{d\Delta'}{dx} = \text{etc.} = -1$ ist, so wird:

$$d.\log\varphi(n - x) + d.\log\varphi(n' - x) + \ldots. = 0$$

oder

$$(n - x)\frac{d.\log\varphi(n - x)}{(n - x)\,d.(n - x)} + (n' - x)\frac{d.\log\varphi(n' - x)}{(n' - x)\,d.(n' - x)} + \ldots = 0. \tag{b}$$

Wenn aber das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth ist, wie angenommen ist, so müssen die Gleichungen (a) und (b) denselben Werth für x geben, es muſs daher:

$$\frac{1}{n - x} \cdot \frac{d.\log\varphi(n - x)}{d(n - x)} = \frac{1}{n' - x} \cdot \frac{d.\log\varphi(n' - x)}{d(n' - x)} = \text{etc.} = k$$

sein, wo k eine Constante bezeichnet. Man erhält somit für die Bestimmung der Function $\varphi(\Delta)$ die Gleichung:

$$\frac{d.\log\varphi(\Delta)}{\Delta.d\Delta} = k,$$

also

$$\log\varphi(\Delta) = \tfrac{1}{2}k\Delta^2 + \log C$$

und

$$\varphi(\Delta) = C.e^{\frac{1}{2}k\Delta^2}.$$

Ueber die Zeichen von k kann man aus der Erfahrung entscheiden, denn da $\varphi(\Delta)$ abnimmt, wenn Δ wächst, so mufs k negativ sein; man kann daher $\frac{1}{2}k = -h^2$ setzen, wodurch $\varphi(\Delta) = Ce^{-h^2\Delta^2}$ wird. Um C zu bestimmen, bedient man sich der Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta) \,.\, d\Delta = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = 1,$$

und da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, so wird $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$, daher $\frac{C\sqrt{\pi}}{h} = 1$ oder $C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, und endlich:

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}. \tag{3}$$

Die Constante h bleibt dieselbe für ein System von Beobachtungen, deren Güte dieselbe ist, oder für welches die Wahrscheinlichkeit eines gewissen Fehlers Δ dieselbe ist. Für dies System ist die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ liegt, gleich:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\delta}^{+h\delta} e^{-x^2} dx$$

Ist nun in einem andern System von Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ durch $\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'h'\Delta\Delta}$ ausgedrückt, so ist für dies System die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler zwischen den Grenzen $-\delta'$ und $+\delta'$ liegt, gleich:

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta'}^{+\delta'} e^{-h'h'\Delta\Delta} d\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h'\delta'}^{+h'\delta'} e^{-x^2} dx.$$

Beide Integrale werden aber einander gleich, wenn $h\delta = h'\delta'$ ist; ist daher $h = 2h'$, so ist klar, dafs in dem zweiten System ein doppelt so grofser Fehler ebenso wahrscheinlich ist, als ein einfacher in dem ersten. Das erste System wird also von einer doppelt so grofsen Genauigkeit als das zweite und die Constante h kann daher als das Maafs der Genauigkeit der Beobachtungen angesehen werden.

21. Statt des Maafses der Genauigkeit der Beobachtungen führt man gewöhnlich einen neuen Begriff ein, den des wahrscheinlichen Fehlers. In einer Reihe von Fehlern, die

ihrer absoluten Gröſse nach geordnet sind und wo jeder so oft hingeschrieben ist, als er wirklich vorkommt, nennt man denjenigen, welcher genau in der Mitte steht, den **wahrscheinlichen Fehler**. Bezeichnet man denselben mit r, so muſs die Wahrscheinlichkeit, daſs ein Fehler zwischen den Grenzen $-r$ und $+r$ liegt, gleich $\frac{1}{2}$ sein, man hat daher die Gleichung:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-r}^{+r} e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta = \tfrac{1}{2},$$

oder wenn man setzt $h\Delta = t$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hr} e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}, \text{ mithin } \int_0^{hr} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Dies Integral hat aber den Werth $\frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0.44311$, wenn $hr = 0.47694$ ist*).

Es ist mithin der wahrscheinliche Fehler

$$r = \frac{0.47694}{h}.$$

Das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{nhr} e^{-t^2}\, dt$ wird dann die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers geben, der das $n$fache des wahrscheinlichen ist und berechnet man den Werth des Integrals z. B. für $n = \frac{1}{2}$, nimmt also $nhr = 0.23847$, so findet man für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers, der halb so groſs ist als der wahrscheinliche Fehler, 0.264, d. h. unter 1000 Beobachtungen sollen gesetzlich 264 vorkommen, die kleiner sind als der halbe wahrscheinliche Fehler. Ebenso findet man, wenn man n nach einander gleich $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5 setzt, daſs unter 1000 Beobachtungen gesetzlich

688 vorkommen, wo der Fehler $< \frac{3}{2}r$ ist
823 „ „ „ „ $< 2r$ „
908 „ „ „ „ $< \frac{5}{2}r$ „
956 „ „ „ „ $< 3r$ „
982 „ „ „ „ $< \frac{7}{2}r$ „
993 „ „ „ „ $< 4r$ „
998 „ „ „ „ $< \frac{9}{2}r$ „
999 „ „ „ „ $< 5r$ „ ,

*) Siehe über die Berechnung dieses Integrals No. 17 der Einleitung.

und wenn man hiermit eine grofse Reihe von Beobachtungsfehlern, die wirklich begangen sind, vergleicht, so kann man sich überzeugen, dafs das wirkliche Vorkommen der Fehler einer gewissen Gröfse nahe mit dem hier aus der Theorie gefundenen übereinkommt.

Zu dem Werthe des wahrscheinlichen Fehlers einer gewissen Beobachtungsreihe kann man noch auf eine andere Weise gelangen. Gesetzt, man hätte eine Reihe von m wirklichen Beobachtungsfehlern Δ, Δ', so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von diesen:

$$W = \frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh[\Delta\Delta + \Delta'\Delta' + \Delta''\Delta'' + \ldots]},$$

und nimmt man an, dafs die Fehler wirklich stattgefunden haben, also auch nicht weiter geändert werden können, so wird das Maximum von W allein von h abhängen und derjenige Werth von h wird daher der wahrscheinlichste sein, der diesen Beobachtungen zukommt, für welchen das Maximum stattfindet. Bezeichnet man nun der Kürze wegen die Summe der Quadrate aller Fehler Δ, Δ', etc. mit $[\Delta\Delta]$, sodafs also wird:

$$W = \frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh[\Delta\Delta]},$$

so erhält man leicht als die Bedingung des Maximums:

$$0 = \frac{m h^{m-1}}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh[\Delta\Delta]} - \frac{2h^{m+1}}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh[\Delta\Delta]} \cdot [\Delta\Delta]$$

oder

$$0 = m - 2h^2[\Delta\Delta],$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{h\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m}}.$$

Diese Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate wahrer Beobachtungsfehler, getheilt durch die Anzahl der Beobachtungen, nennt man den m i t t l e r e n F e h l e r dieser Beobachtungen. Es ist der Fehler, welcher, wenn derselbe bei allen Beobachtungen begangen wäre, dieselbe Summe der Fehlerquadrate gegeben hätte, als die wirklich stattfindende. Bezeichnet man denselben mit ε, sodafs also

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m}},$$

so hat man:

$$\frac{1}{h\sqrt{2}} = \varepsilon$$

und

$$r = 0.47694\sqrt{2}\,\varepsilon$$
$$r = 0.674489\,\varepsilon.$$

22. Hiernach kann nun die eigentliche Aufgabe gelöst werden: Aus einem System von Gleichungen (1), wie die einzelnen Beobachtungen ergeben, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, y, z zu finden, zugleich auch deren wahrscheinlichen Fehler, sowie den wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Beobachtungen.

Substituirt man in dem Ausdrucke (2) für die Function W, welche die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler Δ, Δ', Δ'' etc. giebt, für $\varphi(\Delta)$, $\varphi(\Delta')$ etc., deren Ausdrücke nach Gleichung (3), so erhält man:

$$W = \frac{h^m}{(\sqrt{\pi})^m} e^{-h^2[\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots]},$$

wenn alle Beobachtungen von gleicher Güte vorausgesetzt werden. Hier sind Δ, Δ', Δ'', etc. nicht reine Beobachtungsfehler, sondern hängen noch von den Werthen x, y, z ab. Da nun aber für die wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der dann übrig bleibenden Fehler möglichst groſs werden muſs, indem diese dann den wirklichen Beobachtungsfehlern, die man unter einer bestimmten Anzahl von Beobachtungen erwarten muſs, möglichst gleich werden, so sieht man, daſs die Werthe der Unbekannten so bestimmt werden müssen, daſs

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots = \text{Minimum}$$

wird, d. h. daſs die Summe der Quadrate der dann in den Gleichungen (1) übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird. Man nennt daher diese Methode, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten aus solchen Gleichungen zu finden, die Methode der kleinsten Quadrate.

Nimmt man nun zuerst den einfachsten Fall an, daſs die Werthe einer Unbekannten durch directe Beobachtungen gegeben sind, so ist nach der Annahme dann das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen der wahrscheinlichste Werth, wie dies auch wieder aus der obigen Bedingung des Minimums folgt. Für irgend welchen Werth von x sind nämlich die übrig bleibenden Fehler:

$$\Delta = x - n,\ \ \Delta' = x' - n',\ \ \Delta'' = x'' - n'',\ \text{etc.}$$

Man erhält daher für die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler, wenn man

die Summe $n + n' + n'' + \ldots$ durch $[n]$

ebenso die Summe $n^2 + n'^2 + n''^2 + \ldots$ durch $[nn]$

bezeichnet, und die Anzahl der Beobachtungen m ist:

$$\Sigma (x - n)^2 = m x^2 - 2 x [n] + [nn]$$
$$= [nn] - \frac{[n]^2}{m} + m \left(x - \frac{[n]}{m} \right)^2.$$

Da beide Glieder auf der rechten Seite positiv sind, so wird die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum werden, wenn

$$x = \frac{[n]}{m},$$

und die Summe der Quadrate der in dem Falle übrig bleibenden Fehler wird:

$$[nn] - \frac{[n]^2}{m} = [nn_1].$$

Um nun den wahrscheinlichen Fehler dieses Resultats für x zu finden, wenn der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung bekannt ist, bedarf man noch eines Satzes, der des Folgenden wegen in etwas allgemeinerer Form gegeben werden soll, nämlich des Ausdrucks für den wahrscheinlichen Fehler einer linearen Function von mehreren Gröfsen x, x', etc., wenn die wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Gröfsen x, x', etc. gegeben sind.

Ist r der wahrscheinliche Fehler von x und hat man die einfache Function von x

$$X = \alpha x,$$

so ist klar, dafs αr der wahrscheinliche Fehler von X ist. Denn wenn x_0 der wahrscheinlichste Werth von x ist, so ist auch αx_0 der wahrscheinlichste Werth von X, und die Zahl der Fälle, in denen x zwischen den Grenzen $x_0 - r$ und $x_0 + r$ liegt, ist gleich der Anzahl der Fälle, in denen X zwischen $\alpha x_0 - \alpha r$ und $\alpha x + \alpha r$ liegt.

Es sei nun X eine lineare Function zweier Veränderlichen:

$$X = x + x'$$

und es seien a und a' die wahrscheinlichsten Werthe, r und r' die wahrscheinlichen Fehler von x und x'. Da dann für

die Fehler von x und x' beziehlich $h = \frac{c}{r}$ und $h' = \frac{c}{r'}$ genommen werden mufs, wo $c = 0.47694$, so ist

die Wahrscheinlichkeit irgend welchen Werthes von x:

$$= \frac{c}{r\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{c^2}{r^2}(x-a)^2},$$

und die Wahrscheinlichkeit irgend welchen Werthes von x':

$$= \frac{c}{r'\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{c^2}{r'^2}(x'-a')^2},$$

mithin die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier beliebigen Werthe von x und x':

$$\frac{c^2}{r r' \pi}\, e^{-\left[\frac{c^2}{r^2}(x-a)^2 + \frac{c^2}{r'^2}(x'-a')^2\right]}$$

und man erhält somit die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier Werthe von x und x', die der Gleichung $x + x' = X$ Genüge thun, wenn man in obigem Ausdrucke $X - x$ für x' setzt, oder wenn man diese Wahrscheinlichkeit mit W bezeichnet:

$$W = \frac{c^2}{r r' \pi}\, e^{-\left[\frac{c^2}{r^2}(x-a)^2 + \frac{c^2}{r'^2}(X-x-a')^2\right]}.$$

Macht man nun die Summation von allen Fällen, in denen sich ein x mit einem x' zu X verbinden kann, wo man also dem x alle Werthe zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ geben mufs, oder nimmt man das Integral von W nach x zwischen diesen Grenzen, so wird man alle Fälle umfafst haben, in denen X erhalten werden kann, also die Wahrscheinlichkeit von X bestimmt haben.

Nimmt man nun alle Glieder zusammen, die x enthalten und giebt diesen eine quadratische Form, so kann man leicht das Integral von W unter die folgende Form bringen:

$$\frac{c^2}{r r' \pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2\frac{r^2+r'^2}{r^2 r'^2}\left[x - \frac{r^2(X-a)+r'^2 a}{r^2+r'^2}\right]^2 + \frac{c^2}{r^2+r'^2}(X-a'-a)^2} . dx$$

$$= \frac{c}{\sqrt{r^2+r'^2}\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{c^2}{r^2+r'^2}(X-a'-a)^2} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2} du,$$

wenn man setzt:

$$u = \frac{c\sqrt{r^2 + r'^2}}{r r'}\left(x - \frac{r^2(X-a) + r'^2 a}{r^2 + r'^2}\right),$$

oder da
$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

so erhält man für die Wahrscheinlichkeit eines Werthes von X:

$$\frac{c}{\sqrt{r^2 + r'^2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{c^2}{r^2 + r'^2}(X - a' - a)^2}.$$

Dieser Ausdruck wird aber ein Maximum, wenn $X = a + a'$, der wahrscheinlichste Werth von X ist also gleich der Summe der wahrscheinlichsten Werthe von x und x', und da das Maafs der Genauigkeit für diese Bestimmung $\frac{c}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$ wird, so ist also $\sqrt{r^2 + r'^2}$ der wahrscheinliche Fehler von X.

Hieraus folgt ferner in Verbindung mit dem vorher gefundenen Satze, dafs wenn

$$X = \alpha x + \alpha' x'$$

ist, der wahrscheinliche Fehler von X gleich $\sqrt{\alpha^2 r^2 + \alpha'^2 r'^2}$ wird.

Diesen Satz kann man nun leicht auf eine beliebige Anzahl von Gliedern ausdehnen, da man bei drei Gliedern zuerst zwei zusammen nehmen und dann mit dem dritten verbinden kann und so fort. Hat man daher irgend eine lineare Function

$$X = \alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x'' + \ldots,$$

und sind r, r', r'', etc. die wahrscheinlichen Fehler beziehlich von x, x', x'', etc., so wird der wahrscheinliche Fehler von X gleich:

$$\sqrt{\alpha^2 r^2 + \alpha'^2 r'^2 + \alpha''^2 r''^2 + \ldots}.$$

Hiernach findet man nun sogleich den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels aus m Beobachtungen, deren wahrscheinlicher Fehler r ist; denn da

$$x = \frac{n + n' + n'' + n''' + \ldots}{m},$$

so wird der wahrscheinliche Fehler gleich $\sqrt{m \cdot \frac{r^2}{m^2}}$, oder $\frac{r}{\sqrt{m}}$.

Es verhält sich daher der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels aus m Beobachtungen zum wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung wie $\frac{1}{\sqrt{m}} : 1$, oder das Maafs der Genauigkeit desselben zum Maafs der Genauig-

keit einer einzelnen Beobachtung wie $h\sqrt{m}:h$. Oft drückt man auch die relative Genauigkeit zweier Gröſsen durch ihre Gewichte aus. Man versteht unter Gewicht einer Gröſse die Anzahl von gleich guten Beobachtungen, die erforderlich sein würde, um aus ihrem arithmetischen Mittel eine Bestimmung von gleicher Genauigkeit zu erhalten, wie die des gegebenen Werthes ist. Ist also das Gewicht der einzelnen Beobachtungen 1, so wird das arithmetische Mittel aus m Beobachtungen das Gewicht m haben. Die Gewichte zweier Gröſsen verhalten sich daher direct wie die Quadrate der beiderseitigen Maaſse der Genauigkeit und umgekehrt wie die Quadrate der wahrscheinlichen Fehler *).

Es ist nun noch übrig, den wahrscheinlichen Fehler r einer einzelnen Beobachtung zu bestimmen. Wären die in den Gleichungen $x-n=\Delta$ nach Einsetzung des wahrscheinlichsten Werthes von x übrig bleibenden Fehler die wirklichen Beobachtungsfehler, so würde die Summe der Quadrate derselben getheilt durch m das Quadrat der mittleren Fehler einer Beobachtung geben nach No. 20, oder dieser Fehler würde gleich $\sqrt{\frac{[nn_1]}{m}}$ sein. Da aber das arithmetische Mittel aus den gemachten Beobachtungen nicht der wahre Werth der Unbekannten ist, sondern nur der nach diesen Beobachtungen wahrscheinlichste, auſser im Falle, daſs die Anzahl der Beobachtungen unendlich groſs ist, so werden auch die übrigbleibenden Fehler nicht die wahren Beobachtungsfehler, sondern mehr oder weniger davon verschieden sein. Es sei nun x_0 der wahrscheinlichste Werth von x, der durch das arithmetische Mittel gefunden ist, während der wahre Werth $x+\xi$ ist. Dadurch daſs man diesen Werth in die Bedingungsgleichungen substituirt, erhält man als Fehler der Beobachtungen x_0-n, x_0-n', etc., die mit Δ, Δ', etc. bezeichnet werden sollen, während die Substitution des wahren Werthes die Fehler $x_0+\xi-n=\delta$ etc. gegeben haben würde. Dann hat man die Gleichungen:

---

*) Haben daher zwei Gröſsen die Gewichte $p=\frac{1}{r^2}$ und $p'=\frac{1}{r'^2}$, so wird das Gewicht der Summe $=\frac{1}{r_2+r'^2}=\frac{pp'}{p+p'}$.

$$\Delta + \xi = \delta,$$
$$\Delta' + \xi = \delta',$$
etc.,

und wenn man auf beiden Seiten die Summe der Quadrate nimmt und bedenkt, dafs die Summe aller Δ gleich Null sein mufs, so erhält man nach der vorher gebrauchten Bezeichnungsweise der Summen:

$$[\Delta\Delta] + m\xi^2 = [\delta\delta],$$

woraus man sieht, dafs die durch das arithmetische Mittel gefundene Summe der Fehlerquadrate immer zu klein ist.

Da $[\delta\delta] = m\varepsilon^2$ ist, wo ε der mittlere Fehler einer Beobachtung ist, und $[\Delta\Delta] = [nn_1]$, so läfst sich die Gleichung auch so schreiben:

$$[nn_1] + m\xi^2 = m\varepsilon^2.$$

Obwohl man nun aus dieser Gleichung den Werth von ε nicht berechnen kann, da ξ unbekannt ist, so wird man sich doch der Wahrheit so viel als möglich nähern, wenn man für ξ den mittleren Fehler von x substituirt, und da dieser nach dem Vorigen gleich $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ ist, so erhält man nach Einsetzung dieses Werthes

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[nn_1]}{m-1}}$$

für den mittleren Fehler einer Beobachtung, und für den wahrscheinlichen Fehler

$$r = 0.674489 \sqrt{\frac{[nn_1]}{m-1}}.$$

Ferner erhält man für den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{[nn_1]}{m-1}}$$

und für den wahrscheinlichen Fehler:

$$r(x) = \frac{0.674489}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{[nn_1]}{m-1}}.$$

Beispiel. Bei der telegraphischen Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen der Sternwarte zu Ann Arbor und der See-Vermessungsstation zu Detroit wurden am 21. Mai 1861 aus 31 verschiedenen, an beiden Orten beobachteten Sternen die folgenden Längenunterschiede erhalten:

	Längen-unterschied.	Abw. vom Mittel.
Stern 1	$2^m\,43^s.60$	-0.11
2	43 . 49	-0.00
3	43 . 63	-0.14
4	43 . 52	-0.03
5	43 . 31	$+0.18$
6	43 . 67	-0.18
7	43 . 98	-0.49
8	43 . 63	-0.14
9	43 . 83	-0.34
10	43 . 79	-0.30
11	43 . 54	-0.05
12	43 . 18	$+0.31$
13	43 . 45	$+0.04$
14	43 . 68	-0.19
15	43 . 32	$+0.17$

	Längen-unterschied.	Abw. vom Mittel.
Stern 16	$2^m\,43^s.50$	-0.01
17	43 . 44	$+0.05$
18	43 . 37	$+0.12$
19	43 . 32	$+0.17$
20	43 . 12	$+0.37$
21	43 . 30	$+0.19$
22	43 . 72	-0.23
23	43 . 25	$+0.24$
24	43 . 13	$+0.36$
25	43 . 27	$+0.22$
26	43 . 34	$+0.15$
27	43 . 15	$+0.34$
28	43 . 86	-0.37
29	43 . 29	$+0.20$
30	43 . 40	$+0.09$
31	43 . 95	-0.46
Mittel	$2^m\,43^s.49$	

Man findet hier für die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler $[nn_{,}] = 1.77$, und da m, die Anzahl aller Beobachtungen, 31 ist, so wird:

der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung

$$\pm 0^s.164$$

also der wahrscheinliche Fehler des Mittels aus allen

$$\pm 0^s.029.$$

Obwohl man nicht annehmen kann, daſs bei so wenigen Beobachtungen das Vorkommen der Fehler dem in No. 21 gegebenen Gesetze genau entspricht, so kann man sich doch überzeugen, daſs dies annähernd der Fall ist. Nach der Theorie sollte nämlich für 31 Beobachtungen die Anzahl der Fehler, die

kleiner als $\frac{1}{2}r$, r, $\frac{3}{2}r$, $2r$, $\frac{5}{2}r$, $3r$ sind,
gleich 8, 15, 21, 25, 28, 30 sein,

während diese Anzahl nach dem obigen Tableau
6, 12, 22, 24, 29, 30 ist.

Der Fehler, welcher genau in der Mitte liegt, also gleich dem wahrscheinlichsten sein sollte, ist 0.18.

23. In dem allgemeinen Falle, wo in den durch die einzelnen Beobachtungen gegebenen Bedingungsgleichungen (1) mehrere Unbekannte enthalten sind, deren Zahl hier gleich drei angenommen werden soll, sind die wahrscheinlichsten

Werthe wieder diejenigen, für welche die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum ist. Da nun diese Quadratsumme ein Minimum in Bezug auf x sowohl als auch y und z sein mufs, so giebt diese Bedingung so viele Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind, und die letzteren lassen sich daher bestimmen.

Für die Gleichung des Minimums in Bezug auf x erhält man:

$$\Delta \frac{d\Delta}{dx} + \Delta' \frac{d\Delta'}{dx} + \Delta'' \frac{d\Delta''}{dx} + \ldots = 0,$$

oder da nach den Gleichungen (1) $\frac{d\Delta}{dx} = a$, $\frac{d\Delta'}{dx} = a'$, etc. ist, so wird:

$$\Delta a + \Delta' a' + \Delta'' a'' + \ldots = 0.$$

Substituirt man hier für Δ, Δ', etc. die Ausdrücke aus (1) und bezeichnet wieder die Summe aller Gröfsen

$aa + a'a' + a''a'' + \ldots$ mit $[aa]$,

ebenso $ab + a'b' + a''b'' + \ldots$ mit $[ab]$ und so fort,

so erhält man die Gleichung:

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [an] = 0; \qquad (A)$$

ebenso

$$[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bn] = 0 \qquad (B)$$

und

$$[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cn] = 0 \qquad (C)$$

aus den beiden Gleichungen für das Minimum in Bezug auf y und z. Aus diesen drei Gleichungen erhält man die wahrscheinlichsten Werthe von x, y und z.

Um dieselben aufzulösen, multiplicire man die erste mit $\frac{[ab]}{[aa]}$ und ziehe dieselbe von der zweiten ab, ebenso multiplicire man die erste mit $\frac{[ac]}{[aa]}$ und ziehe dieselbe von der dritten ab; dann erhält man zwei Gleichungen, in denen x eliminirt ist, und die die Form haben:

$$[bb_1]\,y + [bc_1]\,z + [bn_1] = 0 \qquad (D)$$

und

$$[bc_1]\,y + [cc_1]\,z + [cn_1] = 0, \qquad (E)$$

wo

$$[bb_1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}, \quad [bc_1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

und ähnlich die übrigen sind.

Multiplicirt man dann die Gleichung (D) mit $\frac{[bc_1]}{[bb_1]}$ und zieht dieselbe von (E) ab, so erhält man:

$$[cc_2]\,z + [cn_2] = 0 \qquad (F),$$

wo jetzt

$$[cc_2] = [cc_1] - \frac{[bc_1][bc_1]}{[bb_1]},\ [cn_2] = [cn_1] - \frac{[bc_1][bn_1]}{[bb_1]}.$$

Die Gleichung (F) giebt dann den Werth von z, während die Gleichungen (D) und (A) die Werthe von y und x geben.

Leitet man nun $[\Delta^2]$ aus den Gleichungen (1) her, und nimmt auf die Gleichungen A, B, C Rücksicht, so findet man für die Summe der übrig bleibenden Fehler:

$$[\Delta^2] = [nn] + [an]x + [bn]y + [cn]z.$$

Um hier x, y, z zu eliminiren, multiplicirt man die Gleichung A mit $\frac{[an]}{[aa]}$ und zieht sie von der vorigen ab, wodurch:

$$[\Delta\Delta] = [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} + [bn_1]y + [cn_1]z.$$

Multiplicirt man dann die Gleichung (D) mit $\frac{[bn_1]}{[bb_1]}$ und zieht dieselbe von der letzten ab, so erhält man:

$$[\Delta\Delta] = [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} - \frac{[bn_1]^2}{[bb_1]} + [cn_2]z,$$

und wenn man hierin für z den Werth aus (F) substituirt, so erhält man endlich für das Minimum der Fehlerquadrate:

$$[\Delta\Delta] = [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} - \frac{[bn_1]^2}{[bb_1]} - \frac{[cn_2]^2}{[cc_2]} = [nn_3].$$

Man hätte auch die Gleichungen für das Minimum der Fehlerquadrate ohne Differentialrechnung finden können. Multiplicirt man nämlich jede der ursprünglichen Gleichungen (1) nach einander mit ax, by, cz und n und addirt dieselben, so erhält man:

$$[\Delta\Delta] = [a\Delta]x + [b\Delta]y + [c\Delta]z + [n\Delta] \qquad (a),$$

wo

$$[a\Delta] = [aa]x + [ab]y + [ac]z + [an] \qquad (b)$$

etc.

Substituirt man nun in (a) für x seinen Werth aus (b), so erhält man:

$$[\Delta\Delta] = \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} + [b\Delta_1]y + [c\Delta_1]z + [n\Delta_1] \quad (c)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} [b\Delta_1] &= [bb_1]y + [bc_1]z + [bn_1] \\ [n\Delta_1] &= [bn_1]y + [cn_1]z + [nn_1]. \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Substituirt man nun in (c) für y seinen Werth aus der ersten der Gleichungen (d), so wird:

$$[\Delta\Delta] = \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} + \frac{[b\Delta_1]^2}{[bb_1]} + [c\Delta_2] + [n\Delta_2], \qquad (e)$$

wo nun
$$[c\Delta_2]=[cc_2]z+[cn_2],$$
$$[n\Delta_2]=[cn_2]z+[nn_2], \qquad (f)$$
und wenn man endlich den Werth von z aus der ersten dieser Gleichungen in (e) substituirt, so wird:
$$[\Delta\Delta]=\frac{[a\Delta]^2}{[aa]}+\frac{[b\Delta_1]^2}{[bb_1]}+\frac{[c\Delta_2]^2}{[cc_2]}+[n\Delta_3], \quad (g)$$
wo, wie man leicht sieht, $[n\Delta_3]=[nn_3]$ ist.

Da nun die drei ersten Glieder auf der Rechten, die x, y, z enthalten, quadratisch sind, so sieht man, daſs man, um das Minimum der Fehlerquadrate zu erhalten, $[a\Delta]=0$, $[b\Delta_1]=0$ und $[c\Delta_2]=0$ setzen muſs, Gleichungen, die mit den früher gefundenen identisch sind, und daſs $[nn_3]$ das Minimum der Fehlerquadrate ist.

24. Um nun die wahrscheinlichen Fehler der Unbekannten zu finden, kann man sich wieder des in No. 22 gefundenen Satzes für den wahrscheinlichen Fehler bedienen, indem man aus den Gleichungen A, D, F für die wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z leicht sieht, daſs diese als lineare Functionen der Beobachtungsgröſsen n, n', n'' etc. dargestellt werden können.

Um nämlich aus den drei Gleichungen x zu finden, muſs man jede derselben mit einem gewissen Coefficienten multipliciren, der so beschaffen ist, daſs in der Summe der Gleichungen der Coefficient von y und von z gleich Null wird. Multiplicirt man also (A) mit $\frac{1}{[aa]}$, (D) mit $\frac{A'}{[bb_1]}$, (F) mit $\frac{A''}{[cc_2]}$ und addirt die drei Gleichungen, so erhält man zur Bestimmung von A' und A'' die zwei Bedingungsgleichungen:
$$\frac{[ab]}{[aa]}+A'=0, \qquad (\alpha)$$
$$\frac{[ac]}{[aa]}+A'\frac{[bc_1]}{[bb_1]}+A''=0, \qquad (\beta)$$
und es wird
$$x=-\frac{[an]}{[aa]}-A'\frac{[bn_1]}{[bb_1]}-A''\frac{[cn_2]}{[cc_2]}. \qquad (\gamma)$$
Um y zu bestimmen, multiplicire man (D) mit $\frac{1}{[bb_1]}$, F mit $\frac{B'}{[cc_2]}$ und addire dieselben, so erhält man:
$$\frac{[bc_1]}{[bb_1]}+B'=0 \qquad (\delta)$$
und
$$y=-\frac{[bn_1]}{[bb_1]}-B'\frac{[cn_2]}{[cc_2]}. \qquad (\varepsilon)$$

Endlich ist $$z = -\frac{[cn_2]}{[cc_2]} \qquad (\zeta)$$

Entwickelt man die Gröfsen $[bn_1]$ und $[cn_2]$, so erhält man aber auch leicht:

$$[bn_1] = A'[an] + [bn] \qquad [\eta],$$
$$[cn_2] = A''[an] + B'[bn] + [cn] \qquad [\vartheta],$$

und da man wegen der symmetrischen Bildung der in Klammern eingeschlossenen Gröfsen sich erlauben kann, die Buchstaben zu vertauschen, so erhält man auch noch:

$$[bb_1] = A'[ab] + [bb] \qquad (\iota),$$
$$[cc_2] = A''[ac] + B'[bc] + [cc] \qquad (\varkappa),$$
$$[bc_2] = A''[ab] + B'[bb] + [bc] = 0 \qquad (\lambda),$$
$$[ac_2] = A''[aa] + B'[ab] + [ac] = 0 \qquad (\mu).\ *)$$

Da nun $[an]$ eine lineare Function der n und auch $[bn_1]$ und $[cn_2]$ auf solche Functionen zurückgeführt sind, so kann man leicht den wahrscheinlichen Fehler dieser Gröfsen bestimmen. Zunächst ist $[an] = an + a'n' + a''n'' + \ldots.$

Ist daher r der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung oder eines n, so ist der wahrscheinliche Fehler von $[an]$

$$r([an]) = r\sqrt{aa + a'a' + a''a'' + \ldots} = r\sqrt{[aa]}.$$

Jedes Glied in $[bn_1]$ hat ferner die Form $(A'a + b)n$. Um dies zu quadriren, multiplicire man zuerst mit $A'an$, dann mit bn, so wird der Coefficient von n^2

$$A'(A'aa + ab) + A'ab + bb.$$

Dies ist daher auch die Form der Coefficienten eines jeden r^2 im Ausdrucke für das Quadrat der wahrscheinlichen Fehler von $[bn_1]$, oder es wird:

$$(r[bn_1])^2 = [A'(A'[aa] + [ab]) + A'[ab] + [bb]]\, r^2,$$

oder $$r([bn_1]) = r.\sqrt{[bb_1]},$$

wie sogleich aus den Gleichungen (α) und (ι) folgt.

Endlich ist der Coefficient eines jeden n in $[cn_2]$

$$A''a + B'b + c.$$

Quadrirt man dies, so erhält man:

$$\begin{aligned} & A''(A''aa + B'ab + ac) \\ & + B''(A''ab + B'bb + bc) \\ & + A''ac + B'bc + cc. \end{aligned}$$

Nimmt man nun die Summe aller einzelnen Quadrate, so wird also der Coefficient von r^2 im Ausdrucke von $(r[cn_2])^2$:

---

*) Dafs die zwei letzten Ausdrücke gleich Null sind, sieht man sogleich mit Hülfe der Gleichungen (α), (β) und (δ).

$$A''(A''[aa] + B'[ab] + [ac])$$
$$+ B'(A''[ab] + B'[bb] + [bc])$$
$$+ A''[ac] + B'[bc] + [cc],$$

oder nach den Gleichungen ($\varkappa$), (λ) und (μ) einfach $[cc_2]$; also ist:

$$r[cn_2] = r \, . \sqrt{[cc_2]}.$$

Danach findet man nun leicht die wahrscheinlichen Fehler von x, y, z. Nach der Gleichung (γ) erhält man nämlich für das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers von x:

$$[r(x)]^2 = \frac{(r[an])^2}{[aa]^2} + \frac{A'A'}{[bb_1]^2}(r[bn_1])^2 + \frac{A''A''}{[cc_2]^2}(rcn_2])^2$$
$$= r^2 \left\{ \frac{1}{[aa]} + \frac{A'A'}{[bb_1]} + \frac{A''A''}{[cc_2]} \right\}.$$

Ebenso findet man:

$$[r(y)]^2 = r^2 \left\{ \frac{1}{[bb_1]} + \frac{B''B''}{[cc_2]} \right\}$$

und
$$[r(z)]^2 = r^2 \frac{1}{[cc_2]}.$$

Es ist noch übrig, den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung zu bestimmen. Giebt man dem x, y, z in den ursprünglichen Gleichungen (1) irgend welche Werthe, so kann man der Summe der Quadrate der Fehler die folgende Form geben:

$$[\Delta\Delta] = \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} + \frac{[b\Delta_1]^2}{[bb_1]} + \frac{[c\Delta_2]^2}{[cc_2]} + [nn_3].$$

In dem Falle, daſs man hier für x, y und z die aus dem System von Gleichungen folgenden wahrscheinlichsten Werthe substituirt, werden die Gröſsen $[a\Delta]$, $[b\Delta_1]$ und $[c\Delta_2]$ gleich Null und $[nn_3]$ ist die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler für diese Werthe von x, y und z. Diese Werthe werden aber nur dann die wahren Werthe sein, wenn die Anzahl der Beobachtungen unendlich groſs war. Nimmt man nun an, die wahren Werthe wären bekannt und man substituirte dieselben in die obigen Gleichungen, so würde $[\Delta\Delta]$ nun die Smme der Quadrate der wahren Fehler sein, sodaſs man haben würde

$$m\varepsilon^2 = \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} + \frac{[b\Delta_1]^2}{[bb_1]} + \frac{[c\Delta_2]^2}{[cc_2]} + [nn_3],$$

wo die Gröſsen $[a\Delta]$, $[b\Delta_1]$ und $[c\Delta_2]$ nun nicht gleich Null, sondern ein wenig davon verschieden sein würden. Da nun alle diese Glieder quadratisch sind, so sieht man, daſs die

Summe der Quadrate der durch die wahrscheinlichsten Werthe gefundenen Fehler zu klein ist, und um sich der Wahrheit mehr zu nähern, kann man für $[a\Delta]$ etc. die mittleren Fehler dieser Gröfsen für den Fall des Minimums der Fehlerquadrate setzen. Da aber in den Gleichungen

$$a x_0 + b y_0 + c z_0 + n = \Delta$$
etc.

keine Gröfse auf der linken Seite Fehlern unterworfen ist als n, so ist auch Δ demselben Fehler unterworfen und die mittleren Fehler von $[a\Delta]$, $[b\Delta_1]$ und $[c\Delta_2]$ sind gleich den für $[an]$, $[bn_1]$ und $[cn_2]$ gefundenen. Substituirt man diese in obige Gleichung, so erhält man:

$$m\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + [nn_3]$$

oder

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[nn_3]}{m-3}}.$$

Es wird daher der mittlere Fehler einer Beobachtung aus einer endlichen Anzahl von Gleichungen mit mehreren Unbekannten gefunden, wenn die durch die Bedingung des Minimums gefundene Summe der Fehlerquadrate durch die Anzahl der Beobachtungen weniger der Anzahl der Unbekannten dividirt und daraus die Quadratwurzel gezogen wird.

Ebenso wird der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung:

$$r = 0.674489 \sqrt{\frac{[nn_3]}{m-3}}.$$

Anm. 1. Im Vorigen ist immer vorausgesetzt worden, dafs alle Beobachtungen, die zur Bestimmung der Unbekannten benutzt werden, von gleicher Güte sind. Ist dies nicht der Fall und bezeichnen h, h', h'' etc. die Maafse der Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen, so wird die Wahrscheinlichkeit der Fehler Δ, Δ', etc. für die einzelnen Beobachtungen:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}, \quad \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta'^2}, \text{ etc.}$$

Die Function W wird also in diesem Falle:

$$W = \frac{h \,.\, h' \,.\, h'' \ldots}{(\sqrt{\pi})^m} e^{-(h^2\Delta^2 + h'\Delta'^2 + h''^2\Delta''^2 + \ldots)}$$

und die wahrscheinlichsten Werthe von x, y und z werden also diejenigen sein, die die Summe

$$h^2\Delta^2 + h'^2\Delta'^2 + h''^2\Delta''^2 + \ldots.$$

zu einem Minimum machen. Um diese zu erhalten, wird man daher die ursprünglichen Gleichungen der Reihe nach mit h, h', h'' etc. multipliciren und dann die Summen mit den neuen Coefficienten bilden und die Rechnung wie früher durchführen.

Anm. 2. Ist nur eine Unbekannte vorhanden und haben die ursprünglichen, durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen die Form:

$$0 = n + a x,$$
$$0 = n' + a' x,$$
$$0 = n'' + a'' x, \text{ etc.},$$

so wird also $x = -\frac{[an]}{[aa]}$ mit dem wahrscheinlichen Fehler $r_x = \frac{r}{\sqrt{[aa]}}$, wo r der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung ist.

25. Zur Erläuterung des Vorigen diene das folgende Beispiel, das Bessel's Bestimmung der Verbesserung der Refractionsconstante entnommen ist, im 7. Bande der Königsberger Beobachtungen p. XXIII etc. Von den dort gegebenen 52 Gleichungen sind nur die folgenden 20 ausgewählt, deren Gewichte als gleich angenommen sind und in denen das numerische Glied eine aus den Beobachtungen eines Sterns hergenommene Gröfse, y die Verbesserung der Refractionsconstante, x dagegen einen bei allen Beobachtungsresultaten vorauszusetzenden constanten Fehler bezeichnet.

Die allgemeine Form der Bedingungsgleichungen ist in diesem Falle:

$$n = x + b y,$$

indem der im Vorigen mit a bezeichnete Factor gleich 1 ist, und die aus den einzelnen Summen hergeleiteten Bedingungsgleichungen sind:

		Uebrig bleibende Fehler
α *Urs. min.*	$0 = +0''.02 + x + 0.2\,y$	$-0''.03$
β *Urs. min.*	$0 = +0.45 + x + 8.2\,y$	$+0.43$
β *Cephei*	$0 = +0.10 + x + 20.1\,y$	$+0.14$
α *Urs. maj.*	$0 = -0.14 + x + 36.0\,y$	-0.03
α *Cephei*	$0 = -0.62 + x + 43.9\,y$	-0.47
δ *Cephei*	$0 = -0.25 + x + 65.9\,y$	0.00
ε *Cephei*	$0 = -0.03 + x + 74.9\,y$	$+0.26$
μ *Cephei*	$0 = -1.24 + x + 77.8\,y$	-0.94
α *Cassiop.*	$0 = +0.59 + x + 75.5\,y$	$+0.88$
γ *Urs. maj.*	$0 = -0.47 + x + 79.6\,y$	-0.16
β *Draconis*	$0 = 0.00 + x + 104.5\,y$	$+0.42$
γ *Draconis*	$0 = -0.51 + x + 114.3\,y$	-0.04
η *Urs. maj.*	$0 = -1.20 + x + 125.6\,y$	-0.68
α *Persei*	$0 = +0.12 + x + 142.1\,y$	$+0.72$
α *Aurigae*	$0 = -1.31 + x + 216.8\,y$	-0.37
α *Cygni*	$0 = -1.64 + x + 254.8\,y$	-0.53
ε *Aurigae*	$0 = -1.39 + x + 280.2\,y$	-0.16
γ *Androm.*	$0 = -1.24 + x + 393.5\,y$	$+0.51$
η *Aurigae*	$0 = -1.80 + x + 419.6\,y$	$+0.06$
β *Persei*	$0 = -2.16 + x + 481.2\,y$	-0.01

Um nun hieraus die Gleichungen für die wahrscheinlichsten Werthe von x und y zu finden (Gl. (A), (B) in No. 23), hat man zuerst alle Summen $[aa]$, $[ab]$, $[an]$, $[bb]$ und $[bn]$ zu bilden. In diesem Falle, wo die Anzahl der Unbekannten so gering und einer der Coefficienten constant und gleich eins ist, ist diese Berechnung sehr leicht; hat man aber mehr Unbekannte und sind deren Coefficienten z. B. a, b, c, d, so thut man gut, noch die algebraischen Summen aller Coefficienten einer jeden Gleichung, die allgemein mit s bezeichnet werden sollen, zu berechnen und damit auch die Summen $[as]$, $[bs]$, $[cs]$, etc., zu bilden, da man dann für die Richtigkeit der Rechnung die folgenden Prüfungen hat:

$$[ns] = [an] + [bn] + [cn] + [dn],$$
$$[as] = [aa] + [ab] + [ac] + [ad],$$
etc.

Bildet man die Summen, so findet man die Gleichungen für die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von x und y:

$$+20.000\,x + 3014.80\,y - 12.72 = 0,$$
$$+3014.80\,x + 844586.1\,y - 3700.65 = 0,$$

und die Auflösung macht sich nach dem folgenden Schema, das sich leicht auf mehrere Unbekannte ausdehnen läfst:

	$[aa]$	$[ab]$	$[an]$	$[nn]$
	$+20.000$	$+3014.80$	-12.72	20.28
	1.301030	3.479259	1.104487_n	$\frac{[an]^2}{[aa]}$ 8.09
$[an] = -12.72$		$[bb]$	$[bn]$	12.19
$[ab]x = +13.78$		$+844586.1$	-3700.65	$\frac{[bn_1]^2}{[bb_1]}$ 8.15
$+1.06$		$+454452.0$	-1917.41	$[nn_2] = 4.04$
0.025306_n		$[bb_1] = +390134.1$	$[bn_1] = -1783.24$	
1.301030			$\log [bn_1]$ 3.251210	
$\log x = 8.724276_n$			$\log [bb_1]$ 5.591214	
$x = -0''.053$			$\log y = 7.659996$	
			$y = +0.0045708$	

Hätte man die Gröfsen $[as]$, $[bs]$, etc. gebildet, so erhielte man auch zur Prüfung dieser Rechnung $[bb_1] = [bs_1]$; bei 3 Unbekannten würde man haben $[bb_1] + [bc_1] = [bs_1]$ und $[cc_2] = [cs_2]$; und ähnlich für mehr Unbekannte.

Um nun auch die wahrscheinlichen Fehler von x und y zu bestimmen, bedarf man ausser $[b b_1]$ noch der Gröfse $[a a_1] = [a a] - \frac{[a b]\,[a b]}{[b b]} = +9.2384$. Man erhält dann für den wahrscheinlichen Fehler der aus den Beobachtungen gefundenen Gröfse n für einen Stern

$$r = 0.67449 \sqrt{\frac{[n n_2]}{18}} = \pm 0.3195,$$

und darum für die wahrscheinlichen Fehler von x und y:

$$r(x) = \frac{0''.3195}{\sqrt{[a a_1]}} = \pm 0''.105,$$

$$r(y) = \frac{0''.3195}{\sqrt{[b b_1]}} = \pm 0''.0005116,$$

woraus man sieht, dafs die Bestimmung von x aus obigen Gleichungen sehr ungenau ist, da der wahrscheinliche Fehler den gefundenen Werth von x übersteigt, dafs aber der wahrscheinliche Fehler der gefundenen Verbesserung der Refractionsconstante nur $\frac{1}{9}$ derselben beträgt.

Substituirt man die wahrscheinlichsten Werthe von x und y in die obigen Gleichungen, so erhält man die dann bei den einzelnen Gleichungen noch übrig bleibenden Fehler, die zur Raumersparnifs und besseren Vergleichung schon neben die obigen Gleichungen gesetzt sind. Bildet man die Summe der Quadrate dieser übrig bleibenden Fehler, so erhält man 4.04 übereinstimmend mit $[n n_2]$, wodurch man noch eine Prüfung der Richtigkeit der Rechnung hat.

Anm. Vergl. über die Methode der kleinsten Quadrate: Gauss, Theoria motus corporum coelestium pag. 205 et seq. Gauss, Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Encke, in den Anhängen zu den Berliner Jahrbüchern für 1834, 1835 und 1836.

E. Die Entwickelung periodischer Functionen aus gegebenen numerischen Werthen

26. Die periodischen Functionen werden in der Astronomie häufig angewandt, da viele Aufgaben darauf hinauskommen, Perioden aufzusuchen, in denen sich einzelne Erscheinungen wiederholen und da letztere immer in gewissen Grenzen enthalten sind und nicht unendlich werden, so werden nur solche periodische Functionen in Betracht kommen, welche Sinus und Cosinus der veränderlichen Gröſsen enthalten. Ist daher X eine solche periodische Function, so kann man dafür die folgende Form annehmen:

$$X = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

Der gewöhnlich vorkommende Fall ist nun der, daſs für gewisse Werthe von x die numerischen Werthe von X gegeben sind, aus denen die Coefficienten zu bestimmen sind und die Lösung dieser Aufgabe wird dann besonders bequem, wenn die Peripherie in eine Anzahl von n gleiche Theile getheilt und die numerischen Werthe von X für die Werthe von $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{n}$, $x = 2\frac{2\pi}{n}$ etc. bis $x = (n-1)\frac{\pi}{2n}$ gegeben sind, da man in dem Falle einige die Auflösung erleichternde Sätze anwenden kann, die zuerst gegeben werden sollen.

Ist nämlich A ein aliquoter Theil der Peripherie, sodaſs $nA = 2\pi$ ist, so ist die Summe der Reihe

$$\sin A + \sin 2A + \sin 3A + \ldots + \sin (n-1) A$$

immer gleich Null und ebenso die Summe der Reihe

$$\cos A + \cos 2A + \cos 3A + \ldots + \cos (n-1) A,$$

die letztere ausgenommen für den Fall, wo A gleich 2π oder gleich einem Vielfachen von 2π ist, in welchem Falle die Summe der Reihe gleich n wird.

Der letzte Fall ist an und für sich klar, da dann die Reihe aus n Gliedern besteht, deren jedes eins ist. Es sind also nur noch die beiden andern Sätze zu beweisen. Setzt man nun:

$$\cos r\frac{2\pi}{n} + i \sin r\frac{2\pi}{n} = T^r,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ und $T = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, so wird:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \cos r \frac{2\pi}{n} + i \sum_{r=0}^{r=n-1} \sin r \frac{2\pi}{n} = \sum_{r=0}^{r=n-1} T^r = \frac{T^n - 1}{T - 1}.$$

Da nun $T^n = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ ist, so wird:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \cos r \frac{2\pi}{n} + i \sum_{r=0}^{r=n-1} \sin r \frac{2\pi}{n} = 0,$$

woraus folgt, daſs:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \sin r \frac{2\pi}{n} = 0 \qquad (1)$$

ist und zwar ohne Ausnahme, weil rechts nichts Imaginäres vorkommt. Ferner wird auch:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \cos r \frac{2\pi}{n} = 0 \qquad (2)$$

im Allgemeinen. Nur wenn $n = 0$ ist, wird $\frac{T^n - 1}{T - 1}$ von der Form $\frac{0}{0}$ und hat den Werth n, wie man durch Differentiation sieht.

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) folgen leicht andere, von denen in der Folge ebenfalls Gebrauch gemacht wird. Es ist nämlich:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \sin r \frac{2\pi}{n} \cos r \frac{2\pi}{n} = \tfrac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n-1} \sin 2r \frac{2\pi}{n} = 0, \qquad (3)$$

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \left(\cos r \frac{2\pi}{n}\right)^2 = \tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n-1} \cos 2r \frac{2\pi}{n} = \tfrac{1}{2} n \text{ im Allgemeinen} \qquad (4)$$

$$= n \text{ im Ausnahmefall,}$$

endlich:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \left(\sin r \frac{2\pi}{n}\right)^2 = \tfrac{1}{2} n - \tfrac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n-1} \cos 2r \frac{2\pi}{n} = \tfrac{1}{2} n \text{ im Allgemeinen} \qquad (5)$$

$$= 0 \text{ im Ausnahmefall.}$$

27. Man setze nun:

$$X = a_p \cos p x + b_p \sin p x,$$

wo für p also nach einander alle Werthe von 0 ab zu setzen sind. Ist dann q eine bestimmte Zahl, so hat man:

$$X \cos q x = \tfrac{1}{2} a_p \cos (p+q) x + \tfrac{1}{2} a_p \cos (p-q) x$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_p \sin (p+q) x + \tfrac{1}{2} b_p \sin (p-q) x.$$

Setzt man nun in dieser Gleichung für x nach und nach die Werthe von $x=0$, $x=A$, $x=2A$, etc. bis zu $x=(n-1)A$, wo $A=\frac{2\pi}{n}$, so wird, wenn man die einzelnen Gleichungen addirt, nach den Sätzen (1) und (2) auf der rechten Seite alles Null werden bis auf die Summe der Cosinus-Glieder, in denen $(p+q)A=2k\pi$ oder $(p-q)A=2k\pi$ ist, die den Factor n bekommt. Da $A=\frac{2\pi}{n}$ ist, so ist für die übrig bleibenden Glieder $p+q=kn$ oder $p-q=kn$, also $p=-q+kn$ oder $=+q+kn$. Bezeichnet man also den dem Werthe rA von x entsprechenden Werth von X mit X_{rA}, so wird:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} X_{rA} \cos q A = \frac{n}{2} a_{-q+kn} + \frac{n}{2} a_{q+kn}$$

$$= \frac{n}{2} [a_{-q} + a_q + a_{n-q} + a_{n+q} + a_{2n-q} + a_{2n+q} + \ldots].$$

Da aber bei X keine Coefficienten mit negativem Index vorkommen, so muſs man $a_{-q}=0$ setzen und erhält:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} X_{rA} \cos q A = \frac{n}{2} [a_q + a_{n-q} + a_{n+q} + a_{2n-q} + a_{2n+q} + \ldots]. \quad (6)$$

Hier kommen nun zwei besondere Fälle vor. Ist nämlich $q=0$, so ist $a_{-q}=a_q$, $a_{n-q}=a_{n+q}$ etc., mithin:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} X_{rA} = n [a_0 + a_n + a_{2n} + \ldots]. \quad (7)$$

Ist ferner n eine gerade Zahl und $q=\frac{1}{2}n$, so fällt a_{-q} weg und a_q vereinigt sich mit a_{n-q}, etc., sodaſs auch für diesen Fall:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} X_{rA} \cos \tfrac{1}{2} n A = n [a_{\frac{1}{2}n} + a_{\frac{3}{2}n} + \ldots]. \quad (8)$$

Da
$$X \sin q x = \tfrac{1}{2} a_p \sin (p+q) x - \tfrac{1}{2} a_p \sin (p-q) x$$
$$+ \tfrac{1}{2} b_p \cos (p-q) x - \tfrac{1}{2} b_p \cos (p+q) x,$$

so findet man ganz auf dieselbe Weise:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} X_{rA} \sin q A = \frac{n}{2} [b_q - b_{n-q} + b_{n+q} - b_{2n-q} + b_{2n+q} - \ldots]. \quad (9)$$

Nimmt man nun, je nach der Convergenz der Reihe, n grofs genug an, sodafs man auf der rechten Seite der Gleichungen (6) bis (9) alle Glieder bis auf das erste vernachlässigen kann, so kann man aus diesen Gleichungen die Cosinus-Coefficienten von $q=0$ bis $q=\frac{1}{2}n$ und die Sinus-Coefficienten bis $q=\frac{1}{2}n-1$ bestimmen, indem ein gröfseres q nur Wiederholungen der früheren Gleichungen giebt. Man sieht aber auch, dafs je gröfser man n nimmt, desto genauer die Werthe der ersten Coefficienten erhalten werden, dafs aber die letzten nothwendig immer ungenau bleiben. So ist z. B. für $n=12$ und $q=4$:

$$\Sigma X \cos 4x = 6\,(a_4 + a_8 + \ldots),$$

also wird der Werth von a_4 schon um a_8 fehlerhaft; hätte man dagegen $n=24$ genommen, so wäre derselbe Coefficient erst um a_{20} fehlerhaft geworden.

Aus dem Obigen erhält man also die folgenden Gleichungen:

$$a_p = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{r=n-1} X_{rA} \cos rpA,$$

$$b_p = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{r=n-1} X_{rA} \sin rpA,$$

mit der Ausnahme, dafs für $p=0$ und $p=\frac{1}{2}n$ der Factor $\frac{1}{n}$ statt $\frac{2}{n}$ wird.

Es ist nun immer vortheilhaft, für n eine durch 4 theilbare Zahl zu nehmen, weil dann jeder Quadrant in eine gewisse Anzahl Theile getheilt ist und sich die Werthe der Sinus und Cosinus nur mit wechselndem Zeichen wiederholen. Da dann die Cosinus der Winkel, die einander zu 360° ergänzen, dieselben sind, so kann man die Summe der Gröfsen bilden, deren Index einander zu 360° ergänzen, und diese mit dem Cosinus multipliciren; bei den Sinusgliedern hat man dagegen die Gröfsen, deren Index einander zu 360° ergänzen, von einander abzuziehen. Bezeichnet man die Summe zweier solcher Gröfsen, z. B. $X_A + X_{(n-1)A}$ mit $\underset{+}{X}_A$, dagegen die Differenz $X_A - X_{(n-1)A}$ mit $\underset{-}{X}_A$, so wird:

$$a_p = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{r=\frac{1}{2}n} \underset{+}{X_{rA}} \cos rpA,$$

$$b_p = \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{r=(\frac{1}{2}n-1)} \underset{-}{X_{rA}} \sin rpA.$$

Bezeichnet man hier wieder die Summe oder Differenz zweier Cosinus-Glieder, deren Index einander zu 180° ergänzen, mit $\underset{++}{X_{rA}}$ und $\underset{+-}{X_{rA}}$, und die Summe oder Differenz zweier Sinus-Glieder, deren Index einander zu 180° ergänzen, mit $\underset{-+}{X_{rA}}$ und $\underset{--}{X_{rA}}$, so erhält man:

$$a_p = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{r=\frac{1}{4}n} \underset{++}{X_{rA}} \cos rpA, \qquad \text{wenn } p \text{ gerade ist,} \qquad (10)$$

mit den vorher erwähnten zwei Ausnahmefällen,

$$a_p = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{r=\frac{1}{4}n} \underset{+-}{X_{rA}} \cos rpA, \qquad \text{wenn } p \text{ ungerade ist,} \qquad (11)$$

$$b_p = \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{r=\frac{1}{4}n-1} \underset{--}{X_{rA}} \sin rpA, \qquad \text{wenn } p \text{ gerade ist,} \qquad (12)$$

$$b_p = \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{r=\frac{1}{4}n-1} \underset{-+}{X_{rA}} \sin rpA, \qquad \text{wenn } p \text{ ungerade ist.} \qquad (13)$$

Wäre z. B. $n = 12$, so würde man hieraus erhalten:

$$a_0 = \tfrac{1}{12} \left\{ \underset{++}{X_0} + \underset{++}{X_{30}} + \underset{++}{X_{60}} + \underset{++}{X_{90}} \right\},$$

$$a_1 = \tfrac{1}{6} \left\{ \underset{+-}{X_0} + \underset{+-}{X_{30}} \cos 30 + \underset{+-}{X_{60}} \cos 60 \right\},$$

$$a_2 = \tfrac{1}{6} \left\{ \underset{++}{X_0} + \underset{++}{X_{30}} \cos 60 - \underset{++}{X_{60}} \cos 60 - \underset{++}{X_{90}} \right\},$$

etc.

$$b_1 = \tfrac{1}{6} \left\{ \underset{-+}{X_{30}} \sin 30 + \underset{-+}{X_{60}} \sin 60 + \underset{-+}{X_{90}} \right\},$$

$$b_2 = \tfrac{1}{6} \left\{ \underset{--}{X_{30}} \sin 60 + \underset{--}{X_{60}} \sin 60 \right\},$$

etc.

28. Will man eine periodische Function bis zu einem bestimmten Gliede entwickeln, so müssen so viele numerische Werthe gegeben sein, als man Coefficienten bestimmen will.

Sind die gegebenen Werthe vollkommen richtig, so wird man dann auch die Coefficienten so genau erhalten, als es die Theorie zuläſst, nur um so weniger genau, je gröſser der Index des Coefficienten bei einer gegebenen Anzahl von Werthen ist. Sind aber diese Werthe der Function von Beobachtungen genommen, so wird man, um die Beobachtungsfehler zu eliminiren, so viele Beobachtungen als möglich anwenden, oder die Peripherie in viel mehr Theile theilen, als zur Bestimmung der Coefficienten nothwendig ist. Die Gleichungen sollten in diesem Falle nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden; man überzeugt sich aber leicht, daſs diese Methode genau auf dieselben Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten führt, als die in No. 27 gegebenen, daſs also die dort gefundenen Werthe in der That die wahrscheinlichsten sind.

Sind nämlich die n Werthe X_0, X_A, X_{2A} bis $X_{(n-1)A}$ aus den Beobachtungen gegeben, so würde man aus ihnen die folgenden Gleichungen erhalten, wenn man voraussetzt, daſs die Function nur die Sinus und Cosinus der einfachen Winkel enthält:

$$
\begin{aligned}
0 &= -X_0 + a_0 + a_1,\\
0 &= -X_A + a_0 + a_1 \cos A + b_1 \sin A,\\
0 &= -X_{2A} + a_0 + a_1 \cos 2A + b_1 \sin 2A,\\
&\vdots\\
0 &= -X_{(n-1)A} + a_0 + a_1 \cos(n-1)A + b_1 \sin(n-1)A,
\end{aligned}
$$

und nach den Regeln der Methode der kleinsten Quadrate erhielte man hieraus als die Gleichungen des Minimums die folgenden, wenn man mit $[\cos A]$ die Summe aller Cosinus von A, von $A = 0$ bis $A = n - 1$, etc. bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
n a_0 + [\cos A]\, a_1 + [\sin A]\, b_1 - [X_A] &= 0,\\
[\cos A]\, a_0 + [\cos A^2]\, a_1 + [\sin A \,.\, \cos A]\, b_1 - [X_A \cos A] &= 0, \quad (14)\\
[\sin A]\, a_0 + [\cos A \sin A]\, a_1 + [\sin A^2]\, b_1 - [X_A \sin A] &= 0.
\end{aligned}
$$

Nimmt man aber auf die Gleichungen (3), (4), (5) in No. 26 Rücksicht, so sieht man, daſs dieselben in die folgenden übergehen:

$$a_0 = \frac{1}{n}[X_A],$$

$$a_1 = \frac{2}{n}[X_A \cos A],$$

$$b_1 = \frac{2}{n}[X_A \sin A],$$

Gleichungen, die mit den in No. 27 gefundenen übereinstimmen. Man sieht auch, dafs, was hier für die drei ersten Coefficienten gezeigt ist, für eine beliebige Anzahl gilt.

Man kann nun auch den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung und der Coefficienten finden. Ist nämlich $[vv]$ die Summe der Quadrate der Fehler, die nach der Substitution der wahrscheinlichsten Werthe in die Bedingungsgleichungen übrig bleiben, so wird der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung:

$$r = 0.67449 \sqrt{\frac{[vv]}{n-3}},$$

der von $a_0 = \frac{r}{\sqrt{n}}$,

$$a_1 = \frac{r}{\sqrt{[\cos A^2]}} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{n}},$$

$$b_1 = \frac{r}{\sqrt{[\sin A^2]}} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Ein Beispiel hierzu findet man in No. 6 des siebenten Abschnitts.

Anm. Vergl. Encke's Jahrbuch für 1857 pag. 334 und folgende.

Leverrier giebt in Annales de l'Observatoire Imperial Tome I. eine andre Methode zur Bestimmung der Coefficienten, die auch von Encke im Jahrbuch für 1860 in veränderter Form gegeben ist.

Sphärische Astronomie.

Erster Abschnitt.

Die scheinbare Himmelskugel und deren tägliche Bewegung.

In der sphärischen Astronomie betrachtet man die Oerter der Gestirne an der scheinbaren Himmelskugel, indem man dieselben mittelst sphärischer Coordinaten auf gewisse an der Himmelskugel erdachte gröſste Kreise bezieht. Die sphärische Astronomie giebt dann die Mittel an die Hand, sowohl den Ort der Himmelskörper in Bezug auf diese gröſsten Kreise, als auch die Lage dieser letzteren gegen einander zu bestimmen. Man muſs daher zuerst diese gröſsten Kreise, deren Ebenen die Grundebenen der verschiedenen Coordinatensysteme sind, kennen lernen und zugleich die Mittel, die man anzuwenden hat, um den Ort eines Himmelskörpers, der für eine dieser Grundebenen gegeben ist, auf ein anderes Coordinatensystem zu reduciren.

Einige dieser Coordinaten sind unabhängig von der täglichen Bewegung der Himmelskugel, andere sind dagegen auf Ebenen bezogen, welche an der täglichen Bewegung nicht Theil nehmen. Die Gestirne werden daher, wenn sie auf letztere Ebenen bezogen werden, ihren Ort beständig ändern und es wird von Wichtigkeit sein, diese Veränderungen und die dadurch hervorgebrachten Erscheinungen kennen zu lernen. Da die Gestirne auſser dieser allen gemeinschaftlichen Bewegung noch andere, wenn auch viel langsamere zeigen, vermöge welcher dieselben ihren Ort auch in Bezug auf die von der täglichen Bewegung unabhängigen Coordinatensysteme verändern, so wird es nie genügen, den Ort eines Him-

melskörpers allein zu bestimmen, sondern man bedarf noch immer der Angabe der Zeit, für welche dieser Ort gilt. Es ist daher nothwendig, kennen zu lernen, auf welche Weise man sich der täglichen Bewegung der Himmelskugel theils allein, theils in Verbindung mit der Bewegung der Sonne an derselben als Maafs der Zeit bedient.

I. Die verschiedenen Systeme von Ebenen und Kreisen an der scheinbaren Himmelskugel.

1. Die Sterne erscheinen uns an einer hohlen Kugelfläche, der scheinbaren Himmelskugel, die wegen der Bewegung der Erde um ihre Axe sich in der entgegengesetzten Richtung, d. h. von Osten nach Westen um uns zu bewegen scheint. Denkt man sich an einem Orte auf der Oberfläche der Erde eine gerade Linie parallel mit der Axe der Erde, so wird dieselbe vermöge der Axendrehung der Erde die Oberfläche eines Cylinders beschreiben, deren Basis der Parallelkreis des Ortes ist; da aber die Entfernung der Sterne im Verhältnifs zum Durchmesser der Erde unendlich grofs ist, so wird die sich immer parallel bleibende Linie die scheinbare Himmelskugel in denselben Punkten schneiden wie die Axe der Erde. Diese Punkte, welche an der Himmelskugel gegen die Erde unbeweglich erscheinen, heifsen die Pole der Himmelskugel oder Weltpole, und zwar der dem Nordpole der Erde entsprechende, also auf der nördlichen Halbkugel der Erde sichtbare, der nördliche Weltpol, der gegenüberstehende der südliche Weltpol. Denkt man sich nun eine Linie parallel mit dem Erdäquator, also senkrecht auf der ersteren, so wird diese vermöge der täglichen Bewegung eine Ebene beschreiben, deren Durchschnitt wegen der unendlichen Entfernung der Himmelskugel mit dem gröfsten Kreis zusammenfällt, dessen Pole die Weltpole sind und der der Aequator heifst. Eine gerade Linie, die einen von 90 Grad verschiedenen Winkel mit der Erdaxe macht, wird durch die Umdrehung die Oberfläche eines Doppelkegels beschreiben, der die Himmelskugel in zwei kleinen, dem Aequator

parallelen Kreisen schneidet, deren Abstand von den Polen gleich dem Winkel ist, welchen diese Linie mit der Axe macht. Solche kleine Kreise werden Parallelkreise genannt.

Die Ebene, welche die Oberfläche der Erde an einem Orte berührt, schneidet die Himmelskugel in einem gröfsten Kreise, welcher die sichtbare Halbkugel von der unsichtbaren scheidet, und der Horizont genannt wird. Die Neigung der Weltaxe gegen diese Ebene ist gleich der geographischen Breite des Ortes. Die Tangente an dem Meridian des Ortes wird wegen der Umdrehung wieder einen Doppelkegel beschreiben, der die Himmelskugel in zwei Parallelkreisen schneidet, deren Abstand von dem nächsten Pole gleich der Breite des Ortes ist und da die Ebene des Horizonts so herumgeführt wird, dafs sie den Doppelkegel immer berührt, so werden die beiden Parallelkreise zwei Zonen einschliefsen, von denen die zunächst dem sichtbaren Pole gelegene immer über dem Horizonte des Orts bleibt, während die andere immer unter demselben verweilt. Alle übrigen Sterne werden aber auf- und untergehen und sich in Parallelkreisen in einer im Allgemeinen schiefen Richtung gegen den Horizont von Ost nach West herumbewegen. Eine auf der Ebene des Horizonts senkrechte Linie ist nach dem höchsten Punkte der sichtbaren Hemisphäre gerichtet, der das Zenith genannt wird, während der gegenüberstehende unter dem Horizonte befindliche Punkt das Nadir genannt wird. Wegen der täglichen Bewegung wird diese Linie die Himmelskugel in einem kleinen Kreise schneiden, dessen Abstand vom Pole gleich dem Complement der Breite des Ortes ist; alle Sterne daher, welche diesen Abstand vom Weltpole haben, werden durch das Zenith des Ortes gehen. Da die auf dem Horizonte senkrechte Linie sowohl als eine der Weltaxe parallele in der Ebene des Meridians des Ortes liegen, so schneidet diese Ebene die Himmelskugel in einem gröfsten Kreise, der durch die Weltpole, sowie durch Zenith und Nadir geht und ebenfalls der Meridian genannt wird, und wegen der täglichen Bewegung kommen alle Sterne während einer Umdrehung zweimal in die Ebene desselben. Der Theil des Meridians vom sichtbaren Pole durch das Zenith bis zum un-

sichtbaren Pole entspricht dem Meridiane des Ortes auf der Erdkugel, während der andere Theil dem Meridiane eines Ortes entspricht, dessen Länge um 180 Grad oder 12 Stunden verschieden ist. Kommt ein Stern in den ersteren Theil des Meridians, so sagt man, er ist in oberer Culmination, dagegen in unterer Culmination, wenn derselbe den letzteren Theil des Meridians erreicht. Nur diejenigen Sterne sind daher in der oberen Culmination sichtbar, deren Abstand vom unsichtbaren Pole gröſser als die Breite ist, während in der unteren Culmination nur solche gesehen werden können, deren Abstand vom sichtbaren Pole kleiner als die Breite des Ortes ist. Der Bogen des Meridians zwischen dem Pole und dem Horizont ist die Polhöhe und nach dem Vorigen gleich der Breite des Ortes, der Bogen des Meridians zwischen dem Aequator und dem Horizont die Aequatorhöhe. Beide ergänzen einander zu 90 Grad.

2. Um nun den Ort eines Sterns an der scheinbaren Himmelskugel in Bezug auf den Horizont anzugeben, bedient man sich zweier sphärischen Coordinaten. Man denkt sich durch das Zenith und das Gestirn, dessen Ort man angeben will, einen gröſsten Kreis gelegt, der also auf dem Horizonte senkrecht steht. Bestimmt man nun den Durchschnittspunkt dieses Kreises mit dem Horizonte, zählt dann von hier aus in dem gröſsten Kreise aufwärts die Anzahl von Graden zwischen dem Horizonte und dem Gestirne und ebenso im Horizonte die Anzahl der Grade bis zum Meridian, so ist der Ort des Gestirnes bestimmt. Den durch das Zenith und das Gestirn gehenden gröſsten Kreis nennt man den Verticalkreis des Sterns; der Bogen dieses Kreises zwischen dem Horizonte und dem Sterne heiſst die Höhe, der Bogen des Horizonts zwischen dem Verticalkreise und dem Meridian das Azimut des Sterns. Letzteres zählt man vom Südpunkte des Meridians durch Westen, Norden etc. von 0 bis 360°. Statt der Höhe braucht man auch häufig die Zenithdistanz, d. h. den Bogen des Verticalkreises zwischen dem Sterne und dem Zenith, die also das Complement der Höhe ist. Kleine Kreise, welche dem Horizonte parallel sind, nennt man noch Horizontalkreise oder Almucantarats.

Statt durch diese sphärischen Coordinaten kann man den

Ort eines Sternes auch durch rechtwinklige Coordinaten angeben, bezogen auf ein Axensystem, von denen die Axe der z senkrecht auf der Ebene des Horizontes steht, während die Axen der x und y in der Ebene desselben liegen und zwar so, dafs die Axe der x nach dem Anfangspunkte der Azimute, die positive Axe der y nach dem Azimute 90° oder dem Westpunkte gerichtet ist. Bezeichnet man dann das Azimut durch A, die Höhe durch h, so hat man:

$$x = \cos h \cos A, \quad y = \cos h \sin A, \quad z = \sin h.$$

Anm. Um diese sphärischen Coordinaten beobachten zu können, hat man ein diesem Coordinatensystem vollständig entsprechendes Instrument, den Höhen- und Azimutalkreis. Dieser besteht im Wesentlichen aus einem horizontalen, getheilten Kreise, welcher auf drei Fufsschrauben steht und mittelst einer Wasserwage horizontal gestellt werden kann. Dieser Kreis stellt die Ebene des Horizonts vor. Im Mittelpunkte desselben steht eine lothrechte, also nach dem Zenith gerichtete Säule, die einen zweiten Kreis, parallel mit der Säule, also senkrecht auf dem Horizonte stehend, trägt. Um den Mittelpunkt dieses zweiten Kreises bewegt sich ein Fernrohr, welches mit einem Index verbunden ist, vermittelst dessen man auf dem Kreise die Richtung des Fernrohrs angeben kann. Die verticale Säule, welche sammt dem Kreise und Fernrohr beweglich ist, trägt einen anderen Index, welcher auf dem Horizontalkreis die Stellung der Säule angiebt. Weifs man nun, welche Punkte auf den Kreisen dem Meridian und dem Zenithpunkte entsprechen, so kann man durch ein solches Instrument, wenn man das Fernrohr auf einen Stern richtet, das Azimut und die Zenithdistanz oder Höhe desselben finden.

Aufserdem hat man noch andre Instrumente, mit denen man nur Höhen beobachten kann. Sie heifsen Höheninstrumente, während Instrumente, mit denen man nur Azimute beobachtet, Theodolithen heifsen.

3. Das Azimut und die Höhe eines Sterns ändern sich wegen der Umdrehung der Erde beständig und sind auch in demselben Augenblicke an verschiedenen Orten auf der Erde verschieden. Da es nun für gewisse Zwecke erforderlich ist, die Oerter der Sterne durch Coordinaten zu geben, die für alle Orte dieselben sind und nicht von der täglichen Bewegung abhängen, so mufs man die Sterne auch auf gröfste Kreise beziehen, die an der Himmelskugel fest sind. Legt man durch den Pol und den Stern einen gröfsten Kreis, so heifst der Bogen desselben, der zwischen dem Aequator und dem Sterne enthalten ist, die Abweichung oder Declination des Sterns, dagegen der Bogen zwischen dem Sterne und dem Pole die Polardistanz desselben. Der gröfste

Kreis selbst wird daher auch der **Declinations-** oder **Abweichungskreis** des Sterns genannt. Die Declination wird positiv genommen, wenn der Stern in dem Theile des Declinationskreises ist, der zwischen dem Aequator und dem Nordpole enthalten ist, negativ dagegen, wenn der Stern sich in dem Theile zwischen dem Aequator und dem Südpole befindet. Declination und Polardistanz ergänzen einander zu 90 Grad und entsprechen der Höhe und Zenithdistanz im ersten Coordinatensysteme.

Der Bogen des Aequators zwischen dem Declinationskreise des Sterns und dem Meridian, oder der dadurch gemessene Winkel am Pole, heifst der **Stundenwinkel** des Sterns und kann als zweite Coordinate benutzt werden. Man zählt denselben vom Meridiane im Sinne der täglichen Bewegung der Himmelskugel, d. h. von Ost nach West von 0^0 bis 360^0 herum.

Die Declinationskreise, die auch Stundenkreise genannt werden, entsprechen den Meridianen auf der Erdkugel, und man sieht sogleich, dafs, wenn ein Stern im Meridiane ist, derselbe für einen Ort, dessen östliche Länge k ist, in demselben Augenblicke den Stundenwinkel k hat, und allgemein, wenn ein Stern an einem Orte den Stundenwinkel t hat, derselbe an einem andern Orte, dessen Länge k ist (östlich positiv, westlich negativ genommen) in demselben Augenblicke den Stundenwinkel $t+k$ hat.

Statt durch die beiden sphärischen Coordinaten, Declination und Stundenwinkel, kann man den Ort der Gestirne auch wieder durch rechtwinklige Coordinaten angeben, indem man denselben auf drei Coordinatenaxen bezieht, von denen die positive Axe der z auf dem Aequator senkrecht und nach dem Nordpole gerichtet ist, während die Axen der x und y in der Ebene des Aequators liegen, und zwar so, dafs die positive Axe der x nach dem Nullpunkte, die positive Axe der y dagegen nach dem neunzigsten Grade der Stundenwinkel gerichtet ist. Bezeichnet man dann die Declination mit δ, den Stundenwinkel mit t, so hat man:

$$x' = \cos\delta\cos t,\quad y' = \cos\delta\sin t,\quad z' = \sin\delta.$$

Anm. Diesem zweiten Coordinatensysteme der Declinationen und Stundenwinkel entsprechend, hat man eine zweite Gattung von Instrumenten, die

man parallactische Instrumente oder Aequatoreale nennt. Bei diesen steht der Kreis, welcher bei der ersten Gattung von Instrumenten dem Horizonte parallel ist, dem Aequator parallel, sodafs die darauf senkrechte Säule sich in der Richtung der Weltaxe befindet. Dann ist der Kreis, welcher dieser Säule parallel ist, ein Declinationskreis. Kennt man aber die Punkte der Kreise, welche dem Meridian, als Anfangspunkte der Stundenwinkel und dem Pole entsprechen, so kann man durch ein solches Instrument die Stundenwinkel und Polardistanzen oder Declinationen der Gestirne finden.

4. In dem letzteren Coordinatensystem ist die eine Coordinate, die Declination, unveränderlich, während der Stundenwinkel der Zeit proportional wächst und in demselben Augenblicke an verschiedenen Orten auf der Erde um den Längenunterschied der Orte verschieden ist. Um nun auch die zweite Coordinate unveränderlich zu haben, wählt man anstatt des veränderlichen Punktes, in welchem der Meridian den Aequator durchschneidet, einen festen Punkt des Aequators als Anfangspunkt, und zwar einen der Punkte, in welchem der Aequator von dem gröfsten Kreise, den der Mittelpunkt der Sonne, vom Mittelpunkte der Erde gesehen, im Laufe eines Jahres unter den Sternen von Westen nach Osten beschreibt, geschnitten wird. Diesen gröfsten Kreis nennt man die Ecliptic oder Sonnenbahn, und die Neigung derselben gegen den Aequator, die ungefähr $23\frac{1}{2}$ Grade beträgt, die Schiefe der Ecliptic. Die Durchschnittspunkte der Ecliptic mit dem Aequator heifsen der Frühlings- und der Herbst-Tag- und Nachtgleichenpunkt, weil auf der ganzen Erde Tag und Nacht gleich sind, wenn die Sonne am 21sten März und 23sten September jeden Jahres in diesen Punkten steht*). Die Punkte der Ecliptic, welche 90^0 von den Tag- und Nachtgleichenpunkten abstehen, heifsen die Sonnenwendepunkte.

Die neu eingeführte Coordinate, die im Aequator vom Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkte an gezählt wird, heifst die gerade Aufsteigung oder die Rectascension des Gestirns. Man zählt dieselbe von 0^0 bis 360^0 von Westen nach Osten herum, also entgegengesetzt der täglichen

---

*) Da nämlich die Sonne dann im Aequator steht, Aequator und Horizont aber als gröfste Kreise einander halbiren, so verweilt die Sonne an diesen Tagen ebenso lange über als unter dem Horizont.

Bewegung. Statt der sphärischen Coordinaten der Rectascension und Declination kann man wieder, ebenso wie früher, rechtwinklige Coordinaten einführen, indem man den Ort der Sterne auf drei auf einander senkrechte Axen bezieht, von denen die positive Axe der z senkrecht auf dem Aequator und nach dem Nordpole gerichtet ist, während die Axen der x und y in der Ebene des Aequators liegen, und zwar so, daſs die positive Axe der x nach dem Anfangspunkte, die positive Axe der y nach dem 90sten Grade der Rectascensionen gerichtet ist. Bezeichnet man dann die Rectascension mit α, so hat man:

$$x'' = \cos\delta \cos\alpha, \quad y'' = \cos\delta \sin\alpha, \quad z'' = \sin\delta.$$

Die Coordinaten α und δ sind also für jeden Stern constant; um aber daraus den Ort eines Gestirns an der scheinbaren Himmelskugel für einen bestimmten Augenblick zu erhalten, muſs man noch die Lage des Frühlingspunktes gegen den Meridian für diesen Augenblick kennen, also den Stundenwinkel des Frühlingspunktes, welcher die Sternzeit genannt wird. Von dieser gehen 24 Stunden auf die Zeit einer vollen Umdrehung der Himmelskugel oder den Sterntag. Es ist 0^h Sternzeit an einem Orte, wenn der Frühlingspunkt im Meridian ist, 1^h wenn der Stundenwinkel des Frühlingspunktes 15^0 oder 1^h ist. Dies ist der Grund, weshalb der Aequator auſser in 360^0 auch noch in 24 Stunden getheilt wird.

Bezeichnet man die Sternzeit mit Θ, so ist immer:

$$\Theta - t = \alpha,$$

also

$$t = \Theta - \alpha.$$

Ist also z. B. die Rectascension eines Sterns $190^0\,20'$, die Sternzeit $\Theta = 4^h$, so ist $t = 229^0\,40'$ oder $130^0\,20'$ östlich.

Aus der Gleichung für t folgt, daſs, wenn $t = 0$ ist, $\Theta = \alpha$ wird. Jedes Gestirn kommt also in den Meridian oder culminirt zu einer Sternzeit, welche gleich seiner Rectascension in Zeit ausgedrückt ist. Kennt man daher die gerade Aufsteigung eines Sterns, welcher in einem bestimmten Augenblicke im Meridian ist, so hat man dadurch auch die Sternzeit dieses Augenblicks *).

---

*) Die Verwandlung von Bogen in Zeit und umgekehrt muſs man sehr häufig machen. Hat man Bogen in Zeit zu verwandeln, so muſs man mit 15

Es folgt auch aus dem Vorigen, dafs, wenn die Sternzeit an einem Orte Θ ist, in demselben Augenblicke die Sternzeit an einem andern Orte, dessen Längenunterschied k ist, $\Theta + k$ sein mufs, wo k positiv oder negativ genommen werden mufs, je nachdem der zweite Ort östlich oder westlich vom ersten ist.

Anm. Die Coordinaten des dritten Systems kann man durch Instrumente der zweiten Gattung finden, wenn man die Sternzeit kennt. In einem bestimmten Falle lassen sich die Coordinaten auch durch Instrumente der ersten Gattung finden, nämlich beim Durchgange der Sterne durch den Meridian, da man die Rectascensionen durch die Beobachtung der Durchgangszeiten, die Declinationen durch die Beobachtung der Höhen der Sterne im Meridian erhält, wenn die Aequator- oder Polhöhe des Beobachtungsortes bekannt ist. Zu diesen Beobachtungen dient der Meridiankreis. Soll das Instrument nicht zum Höhenmessen, sondern blos zur Beobachtung der Durchgangszeiten der Sterne durch den Meridian dienen, ist dasselbe also ein reines Azimutalinstrument, welches in der Ebene des Meridians aufgestellt ist, so heifst es Passageninstrument. Beobachtet man an einem solchen Instrumente nach einer guten, nach Sternzeit regulirten, Uhr die Durchgangszeiten der Sterne durch den Meridian, so findet man ihre Rectascensionsunterschiede. Dafs der Anfangspunkt der Rectascensionen nicht unmittelbar zu beobachten ist, macht es etwas schwieriger, die absoluten Rectascensionen zu finden.

5. Aufser den vorigen bedient man sich noch eines vierten Coordinatensystems, dessen Grundebene die Ecliptic ist. Gröfste Kreise, welche durch die Pole der Ecliptic geben, also senkrecht auf derselben stehen, heifsen Breitenkreise, und der Bogen eines solchen Breitenkreises, welcher zwischen der Ecliptic und dem Gestirne enthalten ist, heifst die Breite des Gestirns. Dieselbe ist positiv, wenn das Gestirn in der nördlichen der beiden von der Ecliptic gebil-

---

dividiren und die bei den Graden und Minuten bleibenden Reste mit 4 multipliciren, um dieselben in Zeitminuten und Zeitsecunden zu verwandeln.

So wird: $239^0\ 18'\ 46''.75$

$= 15^h,\ 4 \times 14 + 1$ Minuten, $4 \times 3 + 3$ Secunden und $0^s.117$

$= 15^h\ 57^m\ 15^s.117.$

Hat man umgekehrt Zeit in Bogen zu verwandeln, so mufs man die Stunden mit 15 multipliciren, die Minuten und Secunden aber mit 4 dividiren, um dieselben in Grade und Bogenminuten zu verwandeln, die übrig bleibenden Reste aber wieder mit 15 multipliciren.

So wird: $15^h\ 57^m\ 15^s.117$

$= 225 + 14$ Graden, $15 + 3$ Minuten und 46.75 Secunden

$= 239^0\ 18'\ 46''.75.$

deten Halbkugeln liegt, negativ, wenn das Gestirn auf der südlichen Halbkugel liegt. Die andre Coordinate, die Länge, wird in der Ecliptic gezählt und ist der Bogen zwischen dem Breitenkreise des Gestirns und dem Frühlingspunkte. Sie wird von 0^0 bis 360^0 herum in demselben Sinne wie die Rectascension gezählt, also der täglichen Bewegung der Himmelskugel entgegengesetzt *). Der Breitenkreis, dessen Länge Null ist, heifst der Colur der Nachtgleichen, derjenige dagegen, dessen Länge 90^0 ist, der Colur der Sonnenwenden. Der Bogen dieses Colurs, welcher zwischen dem Aequator und der Ecliptic enthalten ist, ebenso der Bogen zwischen dem Pole des Aequators und dem der Ecliptic ist gleich der Schiefe der Ecliptic.

Die Länge wird im Folgenden immer durch λ, die Breite durch β, die Schiefe der Ecliptic durch ε bezeichnet.

Drückt man die sphärischen Coordinaten β und λ durch rechtwinklige aus, bezogen auf drei auf einander senkrechte Axen, von denen die positive Axe der z auf der Ecliptic senkrecht und nach dem Nordpole derselben gerichtet ist, während die Axen der x und y in der Ebene der Ecliptic liegen, und zwar so, dafs die positive Axe der x nach dem Nullpunkte, die positive Axe der y nach dem neunzigsten Grade der Länge gerichtet ist, so hat man:

$$x''' = \cos\beta\cos\lambda, \quad y''' = \cos\beta\sin\lambda, \quad z''' = \sin\beta.$$

Die Coordinaten der Länge und Breite werden nie durch directe Beobachtungen, sondern immer nur durch Rechnung aus den Coordinaten der andern Systeme gefunden.

Anm. Da die Bewegung der Sonne nur scheinbar ist, vielmehr die Erde sich jährlich um die Sonne herum bewegt, so ist es gut, sich die Bedeutung der oben gegebenen Kreise auch für diesen Fall klar zu machen. Der Mittelpunkt der Erde bewegt sich in einer Ebene um die Sonne, die durch den Mittelpunkt der Sonne geht und die scheinbare Himmelskugel in einem gröfsten Kreise, der Ecliptic, schneidet. Die Länge der Erde von der Sonne gesehen ist daher immer 180^0 von der Länge der Sonne, von der Erde gesehen, verschieden. Die Axe der Erde macht einen Winkel von $66\frac{1}{2}^0$ mit dieser Ebene und bleibt während der Bewegung der Erde um die Sonne sich immer parallel, sie beschreibt daher im Laufe eines Jahres die Fläche eines schiefen Cylinders, dessen Basis die Erdbahn ist. Wegen der unend-

*) Die Längen der Gestirne werden oft auch in Zeichen angegeben, deren jedes 30 Grade enthält. So ist 6 Zeichen 15 Grade = 195^0 Länge.

lichen Entfernung der scheinbaren Himmelskugel wird aber die Axe auch in allen diesen verschiedenen Lagen die Himmelskugel in denselben Punkten, den Weltpolen, zu durchschneiden scheinen, deren Abstand von den Polen der Ecliptic $23\frac{1}{2}^0$ ist. Ebenso wird der Erdäquator durch die Bewegung der Erde parallel mit sich herumgeführt und die Durchschnittslinie mit der Ebene der Erdbahn, obwohl sie immer parallel bleibt, ändert doch ihre Lage im Raume im Laufe eines Jahres um den vollen Durchmesser der Erdbahn. Aber wegen der unendlichen Entfernung der Himmelskugel fallen die Durchschnitte aller Ebenen, in die der Erdäquator nach und nach gebracht wird, mit dem gröfsten Kreise zusammen, dessen Pole die Weltpole sind, und die Durchschnittslinien der beiden Ebenen sind alle nach dem Durchschnittspunkte der gröfsten Kreise des Aequators und der Ecliptic gerichtet.

II. Die Verwandlung der verschiedenen Systeme von Coordinaten in einander.

6. Um den Ort eines Gestirns, der auf das Coordinatensystem der Azimute und Höhen bezogen ist auf das Coordinatensystem der Stundenwinkel und Declinationen zu reduciren, hat man nur die Axe der z im ersten Systeme in der Ebene der x und z nach der Richtung von der positiven Axe der x nach der positiven Axe der z zu um den Winkel $90^0 - \varphi$ (wo φ die Polhöhe bezeichnet) zu drehen, da die Axen der y in beiden Systemen zusammenfallen, und erhält dann nach der Formel (1 a) für die Transformation der Coordinaten oder auch nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man das Dreieck zwischen dem Zenith, dem Pole und dem Sterne betrachtet *):

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A \\ \cos\delta \sin t &= \cos h \sin A \\ \cos\delta \cos t &= \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos A. \end{aligned}$$

Will man die Formeln in einer zur logarithmischen Berechnung bequemeren Form haben, so setze man:

$$\begin{aligned} \sin h &= m \cos M \\ \cos h \cos A &= m \sin M, \end{aligned}$$

---

*) Die drei Seiten dieses Dreiecks sind respective:

$$90^0 - h,\ 90^0 - \delta \text{ und } 90^0 - \varphi$$

und die denselben gegenüberstehenden Winkel:

$$t,\ 180^0 - A \text{ und der Winkel am Stern.}$$

wodurch man erhält:

$$\sin\delta = m\sin(\varphi - M)$$
$$\cos\delta\sin t = \cos h\sin A$$
$$\cos\delta\cos t = m\cos(\varphi - M).$$

Diese Formeln geben die gesuchten Gröſsen ohne alle Zweideutigkeit. Denn da alle Stücke durch den Sinus und Cosinus gefunden werden, so hat man nur auf die Zeichen gehörig zu achten, um für die gesuchten Stücke immer die rechten Quadranten zu nehmen. Die Hülfswinkel, welche man zur Umformung solcher Formeln einführt, haben immer eine geometrische Bedeutung, die sich in jedem Falle leicht finden läſst. Geometrisch betrachtet beruht nämlich die Einführung der Hülfswinkel darauf, daſs man das schiefwinklige sphärische Dreieck entweder in zwei rechtwinklige Dreiecke theilt oder zu einem rechtwinkligen ergänzt. Im gegenwärtigen Falle muſs man sich von dem Stern auf die gegenüberliegende Seite $90-\varphi$ oder deren Verlängerung ein Perpendikel gefällt denken, und da:

$$\operatorname{tang} h = \cos A \operatorname{cotang} M,$$

so ist nach der dritten der Formeln (10) in No. 8 der Einleitung M der Bogen zwischen dem Zenith und dem Fuſspunkte des Perpendikels; ferner ist nach der ersten der Formeln (10) m der Cosinus des Perpendikels selbst, da:

$$\sin h = \cos P\cos M,$$

wenn man das Perpendikel durch P bezeichnet:

Es sei für die Polhöhe $\varphi = 52^\circ 30' 16''.0$ gegeben:

$$h = 16^\circ 11' 44''.0 \quad A = 202^\circ 4' 15''.5.$$

Dann ist die Rechnung die folgende:

$\cos A$	9.9669481 $_n$	$m\sin M$	9.9493620 $_n$
$\cos h$	9.9824139	$m\cos M$	9.4454744
$\sin A$	9.5749045 $_n$	$M =$	$-72^\circ 35' 54''.61$
		$\sin M$	9.9796542 $_n$

$$\varphi - M = 125^\circ 6' 10''.61$$

$\sin(\varphi - M)$	9.9128171	$\cos\delta\sin t$	9.5573184 $_n$	$\sin\delta$	9.8825249
m	9.9697078	$\cos\delta\cos t$	9.7294114 $_n$	$\cos\delta$	9.8104999
$\cos(\varphi - M)$	9.7597036 $_n$	$t =$	213 56 2.22	$\delta =$	+49 43 46.00
		$\cos t$	9.9189115 $_n$.		

7. Bei weitem häufiger wird der umgekehrte Fall angewandt, wo man einen Ort, der auf das Coordinatensystem der Stundenwinkel und Declinationen bezogen ist, auf das

Coordinatensystem der Azimute und Höhen reduciren will. Man hat dann wieder nach Formel (1) für die Transformation der Coordinaten folgende Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t$$
$$\cos h \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t,$$

denen man wieder leicht durch Einführung von Hülfswinkeln eine bequemere Form geben kann. Setzt man nämlich:

$$\cos\delta \cos t = m \cos M$$
$$\sin\delta \quad = m \sin M$$

so ist:

$$\sin h = m \cos(\varphi - M)$$
$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t$$
$$\cos h \cos A = m \sin(\varphi - M)$$

oder auch:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\cos M \operatorname{tang} t}{\sin(\varphi - M)}$$
$$\operatorname{tang} h = \frac{\cos A}{\operatorname{tang}(\varphi - M)} \; ^{*}).$$

Sucht man die Zenithdistanz allein, so sind die folgenden Formeln bequem. Aus der ersten Formel für $\sin h$ erhält man:

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2,$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}z^2 = \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)^2 + \cos\varphi \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}t^2.$$

Setzt man nun:

$$n = \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)$$
$$m = \sqrt{\cos\varphi \cos\delta},$$

so ist:
$$\sin\tfrac{1}{2}z^2 = n^2\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\sin\tfrac{1}{2}t^2\right),$$

oder, wenn man setzt:

$$\frac{m}{n}\sin\tfrac{1}{2}t = \operatorname{tang}\lambda$$

$$\sin\tfrac{1}{2}z = \frac{n}{\cos\lambda}.$$

Ist $\sin\lambda$ gröfser als $\cos\lambda$, so ist es vortheilhafter, die Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}z = \frac{m}{\sin\lambda}\sin\tfrac{1}{2}t$$

---

*) Da das Azimut immer auf derselben Seite des Meridians liegt wie der Stundenwinkel, so kann man auch bei Anwendung dieser letzteren Formeln niemals über den Quadranten im Zweifel sein, in welchem man dasselbe zu nehmen hat.

zu berechnen. Man mufs hier übrigens, wie man später sehen wird, für Sterne, welche südlich vom Zenith culminiren, $\varphi - \delta$, für Sterne dagegen, die nördlich vom Zenith culminiren, $\delta - \varphi$ in der Formel zur Berechnung von n brauchen.

Wendet man auf das Dreieck zwischen dem Zenith, dem Pole und dem Sterne die Gaufsischen Formeln an, so erhält man, wenn man den Winkel am Sterne mit p bezeichnet:

$$\cos\tfrac{1}{2}z \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(A-p) = \sin\tfrac{1}{2}t \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}z \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(A-p) = \cos\tfrac{1}{2}t \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}z \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(A+p) = \sin\tfrac{1}{2}t \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}z \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(A+p) = \cos\tfrac{1}{2}t \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta).$$

Rechnet man das Azimut vom Nordpuncte aus, wie man es für den Polarstern wohl thut, so hat man $180 - A$ statt A in diese Formeln einzuführen und erhält:

$$\cos\tfrac{1}{2}z \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(p+A) = \cos\tfrac{1}{2}t \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(\delta-\varphi)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}z \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(p+A) = \sin\tfrac{1}{2}t \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(\delta+\varphi)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}z \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(p-A) = \cos\tfrac{1}{2}t \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(\delta-\varphi)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}z \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(p-A) = \sin\tfrac{1}{2}t \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(\delta+\varphi).$$

Häufig kommt der Fall vor, dafs man für eine bestimmte Polhöhe eine grofse Menge solcher Verwandlungen zu machen hat *), für welche man der bequemeren Rechnung wegen im Voraus Tafeln berechnen will. Für diesen Fall ist folgende Transformation besonders bequem. Es war:

$$(a)\qquad \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$(b)\qquad \cos h \sin A = \cos\delta \sin t$$
$$(c)\qquad \cos h \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t$$

Bezeichnet man mit A_0 und δ_0 diejenigen Werthe von A und δ, die wenn man sie in die vorstehenden Gleichungen setzt, $h = 0$ geben, so hat man:

$$(d)\qquad 0 = \sin\varphi \sin\delta_0 + \cos\varphi \cos\delta_0 \cos t$$
$$(e)\qquad \sin A_0 = \cos\delta_0 \sin t$$
$$(f)\qquad \cos A_0 = -\cos\varphi \sin\delta_0 + \sin\varphi \cos\delta_0 \cos t.$$

Multiplicirt man (f) mit $\cos\varphi$ und subtrahirt davon die Gleichung (d), nachdem man dieselbe mit $\sin\varphi$ multiplicirt hat, multiplicirt man ferner die Gleichung (f) mit $\sin\varphi$ und addirt dazu die Gleichung (d), nachdem man dieselbe mit $\cos\varphi$ multiplicirt hat, so erhält man:

---

*) Wenn man z. B. Sterne, deren Ort durch Rectascension und Declination gegeben ist, an einem Instrumente einstellen will, an dem man nur Höhen und Azimute ablesen kann. Man mufs dann vorher aus der Rectascension und Sternzeit den Stundenwinkel berechnen.

$$\cos A_0 \cos \varphi = -\sin \delta_0$$
$$\cos A_0 \sin \varphi = \cos \delta_0 \cos t$$
$$\sin A_0 = \cos \delta_0 \sin t.$$

Setzt man dann:

$$\sin \varphi = \sin \gamma \cos B$$
$$\cos \varphi \cos t = \sin \gamma \sin B$$
$$\cos \varphi \sin t = \cos \gamma,$$

so erhält man aus der Gleichung (d):

$$0 = \sin \gamma \sin (\delta_0 + B)$$

oder:

$$\delta_0 = -B$$

und aus (a):

$$\sin h = \sin \gamma \sin (\delta + B).$$

Ferner erhält man, wenn man vom Producte der Gleichungen (b) und (f) das Product der Gleichungen (c) und (e) abzieht:

$$\cos h \sin (A - A_0) = \cos \varphi \sin t \sin (\delta - \delta_0) = \cos \gamma \sin (\delta + B)$$

und ebenso, wenn man zum Producte der Gleichungen (c) und (f) das Product der Gleichungen (b) und (e) und das der Gleichungen (a) und (d) addirt:

$$\cos h \cos (A - A_0) = \cos \delta \cos \delta_0 \sin t^2 + \sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos t^2$$
$$= \cos (\delta - \delta_0) = \cos (\delta + B).$$

Das System der Formeln ist also vollständig:

$$\left.\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \gamma \cos B \\ \cos \varphi \cos t &= \sin \gamma \sin B \\ \cos \varphi \sin t &= \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin B &= \cos A_0 \cos \varphi \\ \cos B \cos t &= \cos A_0 \sin \varphi \\ \cos B \sin t &= \sin A_0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin \gamma \sin (\delta + B) \\ \cos h \cos (A - A_0) &= \cos (\delta + B) \\ \cos h \sin (A - A_0) &= \cos \gamma \sin (\delta + B) \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Setzt man $D = \sin \gamma$, $C = \cos \gamma$, $A - A_0 = u$, so gehen diese Formeln in die folgenden über:

$$\tang B = \operatorname{cotg} \varphi \cos t$$
$$\tang A_0 = \sin \varphi \tang t$$
$$\sin h = D \sin (B + \delta)$$
$$\tang u = C \tang (B + \delta)$$
$$A = A_0 + u$$

und D und C sind dann der Sinus und Cosinus eines Winkels γ, der gegeben ist durch die Gleichung:

$$\text{cotang}\,\gamma = \sin B \,\text{tang}\, t = \text{cotang}\,\varphi \sin A_0 \,^{*)}.$$

Dies sind die von Gaufs in „Schumachers Hülfstafeln, neu herausgegeben von Warnstorff, pag. 135 ff.“ mitgetheilten Formeln. Bringt man nun die Gröfsen D, C, B und A_0 in Tafeln, deren Argument t ist, so ist also die Berechnung der Höhe und des Azimuts aus dem Stundenwinkel und der Declination auf die Berechnung der Formeln:

$$\sin h = D \sin (B + \delta)$$
$$\text{tang}\, u = C \,\text{tang}\, (B + \delta)$$
$$A = A_0 + u$$

zurückgeführt. In Warnstorffs Hülfstafeln findet man eine solche Tafel für die Polhöhe der Altonaer Sternwarte berechnet. Man hat übrigens nur nöthig, diese Tafeln von $t = 0$ bis $t = 6^h$ zu berechnen. Denn aus der Gleichung $\text{tang}\, A_0 = \sin \varphi \,\text{tang}\, t$ folgt, dafs A_0 und t immer in demselben Quadranten liegen, dafs man also für einen Stundenwinkel $= 12^h - t$ nur $180^0 - A$ zu nehmen hat. Ferner folgt aus den Gleichungen für B, dafs dieser Winkel negativ wird, wenn $t > 6^h$ oder $> 90^0$ ist und dafs man für einen Stundenwinkel $12^h - t$ den Werth $- B$ anzuwenden hat. Die Gröfsen

$$C = \cos \varphi \sin t \quad \text{und } D = \sqrt{\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2 \cos t^2}$$

werden dagegen gar nicht geändert, wenn man $180^0 - t$ statt t in diese Ausdrücke setzt. Liegt t zwischen 12^h und 24^h, so hat man nur die Rechnung mit dem Complement von t zu 24^h durchzuführen und nachher für das gefundene A sein Complement zu 360^0 zu nehmen.

Es ist nun leicht, die geometrische Bedeutung der Hülfswinkel zu finden. Da δ_0 derjenige Werth von δ ist, der, in die erste der ursprünglichen Gleichungen gesetzt, $h = 0$ macht, so ist δ_0 die Declination desjenigen Punktes, in welchem der durch den Stern gelegte Stundenkreis den Horizont schneidet und ebenso ist A_0 das Azimut dieses Punktes. Da ferner

---

*) Es ist nämlich nach den Formeln (2):

$$\text{cotang}\,\varphi \sin A_0 = \sin B \,\text{tang}\, t.$$

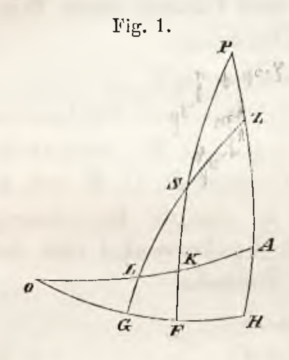


Fig. 1.

$B = -\delta_0$, so ist $B + \delta$ der Bogen SF Fig. 1*) des bis zum Horizonte verlängerten Stundenkreises. Betrachtet man dann das rechtwinklige Dreieck FOK, welches vom Horizonte, dem Aequator und der Seite $FK = B$ gebildet wird, so hat man nach der sechsten der Formeln (10) der Einleitung, weil der Winkel an O gleich $90^0 - \varphi$ ist:

$$\sin \varphi = \cos B \sin OFK.$$

Da aber auch $\sin \varphi = D \cos B$ ist, so ist D der Sinus, mithin C der Cosinus des Winkels OFK. Endlich ist, wie leicht zu sehen, der Bogen $FH = A_0$ und der Bogen $FG = u$.

Man findet also die vorher gegebenen Formeln durch die Betrachtung der drei rechtwinkligen Dreiecke PFH, OFK und SFG. Das erste Dreieck giebt:

$$\text{tang}\, A_0 = \text{tang}\, t \sin \varphi,$$

das zweite:

$$\text{tang}\, B = \text{cotang}\, \varphi \cos t$$

$$\text{cotang}\, \gamma = \sin B\, \text{tang}\, t = \text{cotg}\, \varphi \sin A_0,$$

und endlich das dritte:

$$\sin h = \sin \gamma \sin (B + \delta)$$

$$\text{tang}\, u = \cos \gamma\, \text{tang}\, (B + \delta).$$

Derselben Hülfsgröfsen kann man sich nun auch für die Auflösung der umgekehrten in No. 6 betrachteten Aufgabe bedienen, aus der Höhe und dem Azimute eines Sterns seinen Stundenwinkel und seine Declination zu berechnen. Man hat nämlich in dem rechtwinkligen Dreiecke SKL, wenn man LG mit B, LK mit u, AL mit A_0 und den Cosinus des Winkels SLK mit C, den Sinus mit D bezeichnet:

$$C\, \text{tang}\, (h - B) = \text{tang}\, u$$

$$D \sin (h - B) = \sin \delta$$

und $$t = A_0 - u,$$

*) In dieser Figur ist P der Pol, Z das Zenith, OH der Horizont, OA der Aequator und S der Stern.

wo jetzt:

$$\operatorname{tang} B = \operatorname{cotang} \varphi \cos A$$
$$\operatorname{tang} A_0 = \sin \varphi \operatorname{tang} A$$

und D und C die Sinus und Cosinus eines Winkels γ sind, der gegeben ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{cotang} \gamma = \sin B \operatorname{tang} A.$$

Man hat also für die Berechnung der Hülfsgröfsen dieselben Formeln wie früher, nur mit dem Unterschiede, dafs überall A statt t vorkommt, und man kann sich daher derselben Hülfstafeln wie vorher bedienen, wenn man nur jetzt als Argument das in Zeit verwandelte Azimut nimmt.

8. Die Cotangente des Winkels γ, welche Gaufs mit E bezeichnet, kann dazu dienen, den Winkel am Stern in dem Dreiecke zwischen Pol, Zenith und Stern zu berechnen. Dieser von dem Vertical- und dem Declinationskreise gebildete Winkel, welcher der parallactische Winkel heifst, wird sehr häufig gebraucht. Hat man die vorher erwähnten Hülfstafeln, in denen auch die Gröfse E aufgeführt ist, so erhält man diesen Winkel, der mit p bezeichnet werden soll, durch die bequeme Formel:

$$\operatorname{tang} p = \frac{E}{\cos(B + \delta)},$$

wie man sogleich sieht, wenn man auf das rechtwinklige Dreieck SGF Fig. 1 die fünfte der Formeln (10) in No. 8 der Einleitung anwendet. Hat man dagegen die Tafeln nicht, so erhält man durch die Formeln der sphärischen Trigonometrie aus dem Dreiecke SPZ:

$$\cos h \sin p = \cos \varphi \sin t$$
$$\cos h \cos p = \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t,$$

oder, wenn man setzt:

$$\cos \varphi \cos t = n \sin N$$
$$\sin \varphi = n \cos N,$$

für logarithmische Rechnung bequemer:

$$\cos h \sin p = \cos \varphi \sin t$$
$$\cos h \cos p = n \cos(\delta + N).$$

Der parallactische Winkel wird unter Anderem gebraucht, wenn man den Einflufs berechnen will, den eine kleine Aenderung in dem Azimut und der Höhe auf den Stundenwinkel und die Declination hat. Man erhält nämlich, wenn man auf das Dreieck zwischen Pol, Zenith und Stern die erste

und dritte der Formeln (11) in No. 9 der Einleitung anwendet:

$$d\delta = \cos p\, dh + \cos t\, d\varphi + \cos h \sin p . dA$$
$$\cos\delta\, dt = -\sin p\, dh + \sin t \sin\delta . d\varphi + \cos h \cos p . dA$$

und ebenso:

$$dh = \cos p\, d\delta - \cos A\, d\varphi - \cos\delta \sin p . dt$$
$$\cos h\, dA = \sin p\, d\delta - \sin A \sin h\, d\varphi + \cos\delta \cos p\, dt.$$

9. Um die Coordinaten der Rectascension und Declination in Coordinaten der Länge und Breite zu verwandeln, hat man nur die Axe der z'' *) in der Ebene der $y''z''$ nach der Richtung von der positiven Axe der y'' nach der positiven Axe der z'' um den Winkel ε, der gleich der Schiefe der Ecliptic ist, zu drehen. Dann erhält man nach den Formen ($1a$) in No. 1 der Einleitung, da die Axen der x'' und x''' in beiden Systemen zusammenfallen:

$$\cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\alpha$$
$$\cos\beta \sin\lambda = \cos\delta \sin\alpha \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon$$
$$\sin\beta = -\cos\delta \sin\alpha \sin\varepsilon + \sin\delta \cos\varepsilon.$$

Diese Formeln kann man auch wieder ableiten, indem man das Dreieck zwischen dem Pole des Aequators, dem Pole der Ecliptic und dem Sterne betrachtet, in welchem die drei Seiten $90^0 - \delta$, $90^0 - \beta$ und ε, die denselben gegenüberstehenden Winkel respective $90^0 - \lambda$, $90^0 + \alpha$ und der Winkel am Stern sind.

Um die obigen Formeln für logarithmische Rechnung bequem einzurichten, führe man die Hülfsgröſsen ein:

$$\begin{aligned} M \sin N &= \sin\delta \\ M \cos N &= \cos\delta \sin\alpha, \end{aligned} \qquad (a)$$

wodurch die drei Gleichungen in die folgenden übergehen:

$$\cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\alpha$$
$$\cos\beta \sin\lambda = M \cos(N - \varepsilon)$$
$$\sin\beta = M \sin(N - \varepsilon),$$

oder, wenn man alle Gröſsen durch Tangenten sucht und für M seinen Werth

$$\frac{\cos\delta \sin\alpha}{\cos N}$$

substituirt, in die folgenden:

*) S. No. 4 dieses Abschnitts.

$$\left.\begin{array}{l} \tang N = \dfrac{\tang \delta}{\sin \alpha} \\ \tang \lambda = \dfrac{\cos(N-\varepsilon)}{\cos N} \tang \alpha \\ \tang \beta = \tang(N-\varepsilon) \sin \lambda \end{array}\right\} \quad (b).$$

Die ursprünglichen Formeln geben α und δ ohne alle Zweideutigkeit; braucht man aber die Formeln (b) zur Rechnung, so kann es zweifelhaft sein, in welchem Quadranten man den Winkel λ zu nehmen hat. Aus der Gleichung

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha$$

folgt aber, dafs man den Winkel λ immer in demjenigen Quadranten zu nehmen hat, der einmal dem Zeichen von $\tang \lambda$ Genüge leistet und dann die Bedingung erfüllt, dafs $\cos \alpha$ und $\cos \lambda$ dasselbe Zeichen haben.

Als Controlle der Rechnung kann man noch die Gleichung anwenden: $\dfrac{\cos(N-\varepsilon)}{\cos N} = \dfrac{\cos \beta \sin \lambda}{\cos \delta \sin \alpha}$, $\quad (c)$

die durch Division der Gleichungen:

$$\cos \beta \sin \lambda = M \cos(N-\varepsilon)$$

und

$$\cos \delta \sin \alpha = M \cos N$$

entsteht.

Die geometrische Bedeutung der Hülfsgröfsen läfst sich leicht finden. N ist der Winkel, welchen der den Frühlingspunkt mit dem Sterne verbindende gröfste Kreis mit dem Aequator bildet und M der Sinus dieses Bogens des gröfsten Kreises.

Beispiel. Es sei:

$$\alpha = 6^0\, 33'\, 29''.30 \quad \delta = -16^0\, 22'\, 35''.45$$
$$\varepsilon = 23^0\, 27'\, 31''.72,$$

dann giebt die Berechnung der Formeln (b) und (c):

$\cos \delta$	9.9820131	$\tang \alpha$	9.0605604
$\tang \delta$	9.4681562$_n$	$\dfrac{\cos(N-\varepsilon)}{\cos N}$	9.0292017$_n$
$\sin \alpha$	9.0577093	$\lambda =$	$359^0\, 17'\, 43''.91$
$N =$	$-68^0\, 45'\, 41''.88$		
$\varepsilon =$	$+23\;\; 27\;\; 31\;.72$	$\tang(N-\varepsilon)$	1.4114653
		$\sin \lambda$	8.0897293$_n$
$N-\varepsilon =$	$-92\;\; 13\;\; 13\;.60$	$\beta =$	$-17^0\, 35'\, 37''.53$
$\cos(N-\varepsilon)$	8.5882086$_n$	$\cos \beta =$	9.9791948
$\cos N$	9.5590069		

$$\cos \beta \sin \lambda = 8.0689241_n$$
$$\cos \delta \sin \alpha = 9.0397224$$
$$9.0292017_n$$

Wendet man auf das Dreieck zwischen dem Sterne, dem Pole des Aequators und dem Pole der Ecliptic die Gaufsischen Formeln an, so erhält man, wenn man den Winkel am Stern mit $90^0 - E$ bezeichnet: *)

$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}(E-\lambda) = \cos(45^0 + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin[45^0 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta)]$$
$$\sin(45 - \tfrac{1}{2}\beta)\cos\tfrac{1}{2}(E-\lambda) = \sin(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)\cos[45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta)]$$
$$\cos(45 - \tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}(E+\lambda) = \sin(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)\sin[45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\delta)]$$
$$\cos(45 - \tfrac{1}{2}\beta)\cos\tfrac{1}{2}(E+\lambda) = \cos(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)\cos[45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\delta)],$$

Formeln, die besonders bequem sind, wenn man zugleich mit den Gröfsen λ und β auch die Kenntnifs des Winkels $90^0 - E$ verlangt.

Anm. Encke hat im Jahrbuche für 1831 noch Tafeln gegeben, die für eine genäherte Berechnung der Länge und Breite aus der Rectascension und Declination äufserst bequem sind. Sie beruhen auf der Transformation der drei Grundgleichungen in No. 9, ähnlich der in No. 7 dieses Abschnitts für die dort erwähnten Tafeln benutzten.

10. Für den umgekehrten Fall, wenn man die Coordinaten eines Sternes in Bezug auf die Ecliptic in Coordinaten in Bezug auf den Aequator verwandeln will, werden die Formeln ganz ähnlich. Man erhält dann durch die Formeln (1) für die Transformation der Coordinaten oder auch aus dem vorher betrachteten sphärischen Dreiecke:

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda$$
$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon$$
$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon.$$

Dieselben Gleichungen erhält man auch, wenn man in den drei ursprünglichen Gleichungen in No. 9 β und λ mit δ und α vertauscht und den Winkel ε negativ nimmt. Auf dieselbe Weise findet man dann auch aus den Formeln (b):

$$\operatorname{tang} N = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\lambda}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N}\operatorname{tang}\lambda$$

$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}(N+\varepsilon)\sin\alpha$$

und aus (c) die Prüfungsgleichung:

$$\frac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N} = \frac{\cos\delta\sin\alpha}{\cos\beta\sin\lambda},$$

wo jetzt N den Winkel bedeutet, welchen der den Stern mit

---

*) Gauss Theoria motus pag. 64.

dem Frühlingspunkte verbindende gröſste Kreis mit der Ecliptic macht.

Die Gauſsischen Gleichungen geben endlich für diesen Fall:

$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta)\sin\tfrac{1}{2}(E+\alpha) = \sin(45^0 + \tfrac{1}{2}\lambda)\sin[45^0 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\beta)]$$
$$\sin(45 - \tfrac{1}{2}\delta)\cos\tfrac{1}{2}(E+\alpha) = \cos(45 + \tfrac{1}{2}\lambda)\cos[45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\beta)]$$
$$\cos(45 - \tfrac{1}{2}\delta)\sin\tfrac{1}{2}(E-\alpha) = \cos(45 + \tfrac{1}{2}\lambda)\sin[45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\beta)]$$
$$\cos(45 - \tfrac{1}{2}\delta)\cos\tfrac{1}{2}(E-\alpha) = \sin(45 + \tfrac{1}{2}\lambda)\cos[45 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\beta)].$$

Ein Beispiel für diesen Fall anzuführen ist nicht weiter nöthig, da die Formeln den früheren ganz ähnlich sind.

Anm. Für die Sonne, welche sich in der Ebene der Ecliptic bewegt, werden diese Ausdrücke einfacher. Bezeichnet man nämlich die Länge der Sonne durch L, ihre Retascension und Declination durch A und D, so erhält man:

$$\tang A = \tang L \cos\varepsilon$$
$$\sin D = \sin L \sin\varepsilon$$

oder auch:

$$\tang D = \tang\varepsilon \sin A.$$

11. Den Winkel am Sterne in dem Dreiecke zwischen dem Pole des Aequators, dem Pole der Ecliptic und dem Sterne, welcher von dem Declinations- und Breitenkreise gebildet wird, findet man zugleich mit λ und β oder α und δ, wenn man die Gauſsischen Formeln zur Berechnung dieser Gröſsen anwendet, indem, wenn man diesen Winkel mit η bezeichnet, $\eta = 90 - E$ ist. Braucht man aber diesen Winkel, ohne die Gauſsischen Formeln berechnet zu haben, so findet man denselben durch die Gleichungen:

$$\cos\beta\sin\eta = \cos\alpha\sin\varepsilon$$
$$\cos\beta\cos\eta = \cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha$$

oder:

$$\cos\delta\sin\eta = \cos\lambda\sin\varepsilon$$
$$\cos\delta\cos\eta = \cos\varepsilon\cos\beta - \sin\varepsilon\sin\beta\sin\lambda,$$

oder, wenn man setzt:

$$\cos\varepsilon = m\cos M$$
$$\sin\varepsilon\sin\alpha = m\sin M$$

oder:

$$\cos\varepsilon = n\cos N$$
$$\sin\varepsilon\sin\lambda = n\sin N$$

durch die Gleichungen:

$$\cos\beta\sin\eta = \cos\alpha\sin\varepsilon$$
$$\cos\beta\cos\eta = m\cos(M - \delta)$$

oder:

$$\cos\delta \sin\eta = \cos\lambda \sin\varepsilon$$
$$\cos\delta \cos\eta = n \cos(N + \beta).$$

Man braucht diesen Winkel wieder, wenn man den Einfluſs untersuchen will, den kleine Aenderungen in den Gröſsen λ, β und ε auf α und δ und umgekehrt haben. Man erhält nämlich, wenn man auf das betrachtete Dreieck die erste und dritte der Formeln (11) in No. 9 der Einleitung anwendet:

$$d\beta = \cos\eta\, d\delta - \cos\delta \sin\eta\,.\, d\alpha - \sin\lambda\, d\varepsilon$$
$$\cos\beta\, d\lambda = \sin\eta\, d\delta + \cos\delta \cos\eta\,.\, d\alpha + \cos\lambda \sin\beta\, d\varepsilon,$$

und umgekehrt:

$$d\delta = \cos\eta\, d\beta + \cos\beta \sin\eta\,.\, d\lambda + \sin\alpha\, d\varepsilon$$
$$\cos\delta\, d\alpha = -\sin\eta\, d\beta + \cos\beta \cos\eta\,.\, d\lambda - \cos\alpha \sin\delta\,.\, d\varepsilon.$$

Anm. Die obige Annahme, daſs der Mittelpunkt der Sonne sich immer in der Ebene der Ecliptic bewegt, ist nicht in aller Strenge richtig, vielmehr hat die Sonne wegen der Störungen durch die Planeten in der Regel eine kleine nördliche oder südliche Breite, die indessen nie eine Bogensecunde übersteigt. Man muſs daher die Rectascension und Declination, wenn dieselben nach den in der Anmerkung zu 10 gegebenen Formeln berechnet sind, noch für die Breite corrigiren. Wird dieselbe aber mit B bezeichnet, so hat man noch die Differentialformeln:

$$dA = -\frac{\sin\eta}{\cos D}\,.\, dB,$$
$$dD = \cos\eta\,.\, dB,$$

oder, wenn man die Werthe von $\sin\eta$ und $\cos\eta$ aus den Formeln für $\cos\beta \sin\eta$ und $\cos\delta \cos\eta$, nachdem man darin $\beta = 0$ gesetzt, substituirt:

$$\cos D\, dA = -\cos A \sin\varepsilon\,.\, dB,$$
$$dD = \frac{\cos\varepsilon}{\cos D}\,.\, dB.$$

12. Der Vollständigkeit wegen sollen jetzt noch die Formeln für die Transformation des ersten Coordinatensystems in das vierte gegeben werden, wiewohl dieselbe nicht angewandt wird.

Man hat zuerst in Bezug auf die Ebene des Horizonts:

$$x = \cos A \cos h,$$
$$y = \sin A \cos h,$$
$$z = \sin h.$$

Dreht man die Axe der x in der Ebene der xz nach der positiven Seite der Axe der z zu um den Winkel $90^0 - \varphi$, so erhält man die neuen Coordinaten:

$$x' = x \sin\varphi + z \cos\varphi,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z \sin\varphi - x \cos\varphi.$$

Dreht man dann die Axe der x' in der Ebene der x', y', die die Ebene des Aequators ist, um den Winkel Θ, sodafs die Axe der x'' jetzt mit dem Frühlingspunkte zusammenfällt, so erhält man, wenn man bedenkt, dafs die positive Axe der y'' nach dem neunzigsten Grade der Rectascensionen gerichtet sein mufs und dafs Stundenwinkel und Rectascensionen in entgegengesetztem Sinne gezählt werden:

$$x'' = x' \cos\Theta + y' \sin\Theta$$
$$-y'' = y' \cos\Theta - x' \sin\Theta$$
$$z'' = z'.$$

Dreht man endlich die Axe der y'' in der Ebene der $y''z''$ nach der positiven Axe der z'' zu um den Winkel ε, so erhält man:

$$x''' = x''$$
$$y''' = y'' \cos\varepsilon + z'' \sin\varepsilon$$
$$z''' = -y'' \sin\varepsilon + z'' \cos\varepsilon,$$

und da man aufserdem hat:

$$x''' = \cos\beta \cos\lambda$$
$$y''' = \cos\beta \sin\lambda$$
$$z''' = \sin\beta,$$

so kann man durch Elimination von x', y', z' und x'', y'', z'' dann λ und β unmittelbar durch A, h, φ, Θ und ε ausdrücken.

III. Die tägliche Bewegung als Maafs der Zeit.

Sternzeit, Sonnenzeit, mittlere Zeit.

13. Da die tägliche Umdrehung der Himmelskugel oder eigentlich die Umdrehung der Erde um ihre Axe vollkommen gleichförmig vor sich geht, so dient uns dieselbe als Maafs der Zeit. Die Zeit, welche die Erde zu einer einmaligen Umdrehung um ihre Axe braucht, also die Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen desselben Fixsterns verfliefst, nennt man einen Sterntag. Man fängt denselben zu zählen an, oder man sagt, dafs es 0^h Sternzeit ist, in dem Augenblicke, wo der Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkt durch den Meridian geht. Ebenso sagt man, dafs es 1^h, 2^h, 3^h, etc. nach Sternzeit ist, wenn der Stundenwinkel des Frühlingspunkts 1^h, 2^h, 3^h, etc. beträgt, d. h. also,

wenn derjenige Punkt des Aequators culminirt, dessen Rectascension 1^h, 2^h, 3^h, etc. oder 15^0, 30^0, 45^0, etc. ist.

Man wird in der Folge sehen, dafs der Frühlings- und Herbst-Tag- und Nachtgleichenpunkt keine festen Punkte sind, sondern dafs sich dieselben auf der Ecliptic langsam bewegen. Diese Bewegung ist aus zwei andern zusammengesetzt, von denen die eine der Zeit proportional ist, also sich mit der täglichen Bewegung der Himmelskugel verbindet, die andere aber eine periodische ist. Diese letztere Bewegung bewirkt, dafs der Stundenwinkel des Frühlingspunktes sich nicht vollkommen gleichförmig ändert, dafs also strenge genommen die Sternzeit kein vollkommen gleichförmiges Maafs ist. Indessen ist diese Ungleichförmigkeit äufserst gering, da die Periode von 19 Jahren nur die beiden Maxima $+ 1^s$ und $- 1^s$ enthält.

14. Wenn die Sonne am 21. März im Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkte steht, so geht sie an diesem Tage nahe um 0^h Sternzeit durch den Meridian. Die Sonne bewegt sich nun aber in der Ecliptic vorwärts und da sie am 23. September im Herbst-Tag- und Nachtgleichenpunkte steht, also 12^h Rectascension hat, so culminirt sie an diesem Tage nahe um 12^h Sternzeit. Die Zeit der Culmination der Sonne durchläuft daher in einem Jahre alle Zeiten des Sterntages und wegen dieser Unbequemlichkeit wird die Sternzeit im bürgerlichen Leben nicht angewendet, sondern die Sonne selbst als Zeitmesser gebraucht. Man nennt den jedesmaligen Stundenwinkel der Sonne die wahre Sonnenzeit und die Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen der Sonne verfliefst, einen wahren Sonnentag. Es ist 0^h wahre Zeit an einem Orte, wenn der Mittelpunkt der Sonne durch den Meridian geht. Da die Rectascension der Sonne aber sich nicht gleichförmig ändert, so hat diese wahre Zeit wieder das Unbequeme, dafs sie nicht gleichförmig fortgeht. Zwei Ursachen bewirken diese ungleichförmige Bewegung der Sonne in Rectascension, die Neigung der Ecliptic gegen den Aequator und die ungleichförmige Bewegung der Sonne in der Ecliptic selbst. Diese jährliche Bewegung der Sonne ist eine scheinbare und von der Bewegung der Erde um die Sonne erzeugt. Nach den Keplerschen Gesetzen bewegt sich

nun die Erde in einer Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht und zwar so, dafs die Linie vom Mittelpunkte der Erde zum Mittelpunkte der Sonne (der Radius vector der Erde) in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt. Da nun die Fläche der Ellipse gleich $a^2\pi\sqrt{1-e^2}$ ist, so wird, wenn man mit τ die Länge des siderischen Jahres bezeichnet, d. h. die Zeit, in welcher die Erde einen vollen Umlauf um die Sonne vollendet, die Flächengeschwindigkeit F der Erde $\frac{a^2\pi\sqrt{1-e^2}}{\tau}$, oder wenn man die halbe grofse Axe der Ellipse gleich Eins setzt und statt der Excentricität e den Winkel φ einführt, bestimmt durch die Gleichung $e = \sin\varphi$:

$$F = \frac{\pi\cos\varphi}{\tau}.$$

Nennt man dann T die Zeit, wann die Erde der Sonne am nächsten ist oder die Zeit des Perihels, so wird für eine andere Zeit t der Sector, welchen der Radius vector seit der Zeit des Perihels durchlaufen hat $= F(t-T)$. Dieser Sector wird aber auch durch das bestimmte Integral ausgedrückt $\frac{1}{2}\int_0^v r^2\,dv$, wo r der Radius vector, v aber der Winkel ist, welchen derselbe zur Zeit t mit der grofsen Axe macht oder die wahre Anomalie der Erde. Man hat daher die Gleichung:

$$2F(t-T) = \int_0^v r^2\,dv.$$

Da nun für die Ellipse $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = \frac{a\cos\varphi^2}{1+e\cos v}$, so würde das obige Integral complicirt werden. Man kann aber für v einen anderen Winkel einführen; da nämlich der Radius vector für das Perihel $= a - ae$, für das Aphel $= a + ae$ ist, so kann man setzen $r = a(1-\cos E)$, wo E ein Winkel ist, der mit v zugleich verschwindet. Denn aus beiden Ausdrücken von r erhält man dann zur Bestimmung von E die Gleichung:

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v},$$

woraus man sieht, dafs E immer einen möglichen Werth hat, da der Werth der rechten Seite immer kleiner als ∓ 1 ist.

Durch eine leichte Transformation erhält man noch:

$$\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} = \cos v \quad \text{und} \quad \frac{\cos\varphi \sin E}{1 - e\cos E} = \sin v$$

und durch Differentiation der beiden Ausdrücke von r:

$$\frac{dv}{dE} = \frac{a\cos\varphi}{r}.$$

Führt man nun die Variable E in das obige bestimmte Integral ein, so erhält man:

$$2F(t-T) = a^2\cos\varphi \int_0^E (1 - e\cos E)\,dE = a^2\cos\varphi\,(E - e\sin E),$$

mithin, wenn man die halbe grofse Axe wieder eins setzt und den vorher gefundenen Werth für F substituirt:

$$\frac{2\pi}{\tau}(t-T) = E - e\sin E,$$

wo $\frac{2\pi}{\tau}$ die mittlere tägliche siderische Bewegung der Erde ist, d. h. die tägliche Bewegung, welche die Erde haben würde, wenn dieselbe den vollen Umkreis um die Sonne in der Zeit τ mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschriebe. Die linke Seite der letzteren Gleichung drückt daher den Winkel aus, den eine solche fingirte Erde, welche sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, in der Zeit $t-T$ um die Sonne beschrieben haben würde. Man nennt diesen Winkel die mittlere Anomalie, und wenn man dieselbe mit M bezeichnet, so kann man die obige Gleichung auch schreiben:

$$M = E - e\sin E,$$

und nachdem man aus dieser den Hülfswinkel E bestimmt, findet man die wahre Anomalie aus der Gleichung:

$$\operatorname{tang} v = \frac{\cos\varphi \sin E}{\cos E - e}.$$

Bei einer kleinen Excentricität ist es aber bequemer, den Unterschied der wahren und mittleren Anomalie in eine Reihe zu entwickeln, wofür man verschiedene, elegante Methoden hat, deren Auseinandersetzung hier zu weit führen würde. Wenn man aber nur wenige Glieder nöthig hat, wie es für den gegenwärtigen Zweck genügend ist, so kann man dieselben leicht auf folgende Weise finden. Da für $e=0$ $v=M$ ist, so hat man:

$$v = M + v'_0 \cdot e + \tfrac{1}{2} v''_0 \cdot e^2 + \tfrac{1}{6} v'''_0 \cdot e^3 + \ldots,$$

wo v'_0, v''_0, etc. den ersten, zweiten, etc. Differentialquotien-

ten, von ν nach e genommen, bezeichnen, nachdem man in deren Ausdrucke $\nu = 0$ gesetzt hat.

Differenzirt man die Gleichung $\sin\nu = \frac{\cos\varphi \sin E}{1 - \cos E}$ logarithmisch, so erhält man:

$$\frac{\cos\nu}{\sin\nu}\, d\nu = \frac{dE}{\sin E} \cdot \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} + \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \cdot \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E},$$

oder
$$d\nu = \frac{\sin\nu}{\sin E} \cdot dE + \frac{\sin\nu}{\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{a\cos\varphi}{r}\, dE + \frac{\sin\nu}{\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Differenzirt man aber auch die Gleichung für M, indem man nur E und e als variabel ansieht, so wird:

$$dE = \sin\nu\, d\varphi$$

$$\frac{d\nu}{d\varphi} = \frac{\sin\nu}{\cos\varphi}(2 + e\cos\nu) \text{ und } \frac{d\nu}{de} = \frac{\sin\nu}{\cos\varphi^2}(2 + e\cos\nu).$$

Wird hierin $e = 0$ gesetzt, so erhält man: $\nu'_0 = 2\sin M$.

Um nun auch die höheren Differentialquotienten zu finden, setze man $P = \frac{\sin\nu}{\cos\varphi^2}$ und $Q = 2 + e\cos\nu$. Dann erhält man leicht, wenn man auch die Differentialquotienten von P und Q, nachdem man darin $e = 0$ gesetzt hat, mit P'_0, Q'_0, etc. bezeichnet:

$$\begin{aligned}
P'_0 &= \cos M \,.\, \nu'_0 = \sin 2M,\\
Q'_0 &= \cos M,\\
\nu''_0 &= \sin M \,.\, Q'_0 + 2P'_0 = \tfrac{5}{2}\sin 2M,\\
P''_0 &= \cos M \,.\, \nu''_0 - \sin M \,.\, {\nu'_0}^2 + 2\sin M = \tfrac{9}{4}\sin 3M + \tfrac{1}{4}\sin M,\\
Q''_0 &= -2\sin M \,.\, \nu'_0 = -4\sin M^2,\\
\nu'''_0 &= \sin M \,.\, Q''_0 + 2Q'_0 \,.\, P'_0 + 2P''_0 = \tfrac{13}{2}\sin 3M - \tfrac{3}{2}\sin M.
\end{aligned}$$

Es wird somit:

$$\begin{aligned}
\nu &= M + e \,.\, 2\sin M + e^2 \,.\, \tfrac{5}{4}\sin 2M + e^3\left(\tfrac{13}{12}\sin 3M - \tfrac{1}{4}\sin M\right)\\
&= M + (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\sin M + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2M + \tfrac{13}{12}e^3\sin 3M + \ldots
\end{aligned}$$

Für die Erdbahn ist für das Jahr 1850 $e = 0.0167712$. Substituirt man diesen Werth und multiplicirt mit 206265, um alles in Secunden zu erhalten, so wird:

$$\nu = M + 6918''.37\sin M + 72''.52\sin 2M + 1''.05\sin 3M,$$

wo der periodische Theil, den man zur mittleren Anomalie hinzuzulegen hat, um die wahre zu erhalten, die Mittelpunktsgleichung genannt wird.

Da nun die scheinbare Winkelbewegung der Sonne gleich der Winkelbewegung der Erde um die Sonne ist, so erhält man die wahre Länge der Sonne, wenn man zu ν die Länge π der Sonne addirt, welche dieselbe hat zur Zeit, wenn die Erde im Perihel ist. $M + \pi$ wird aber die Länge sein, wel-

che die fingirte, mittlere Sonne, welche sich in der Ecliptic gleichförmig bewegt, haben würde, oder die mittlere Länge. Bezeichnet man erstere mit λ, letztere mit L, so hat man also für die wahre Länge der Sonne den folgenden Ausdruck:

$$\lambda = L + 6918''.37 \sin M + 72''.52 \sin 2M + 1''.05 \sin 3M\text{*}),$$

oder, wenn man L statt M einführt, wie es für das Folgende nöthig ist, da man hat $M = L - \pi$ und $\pi = 280^0\, 21'\, 41''.0$ ist:

$$\begin{aligned}\lambda = L &+ 1244''.31 \sin L &&+ 6805''.56 \cos L \\ &- 67\,.82 \sin 2L &&+ 25\,.66 \cos 2L \\ &- 0\,.54 \sin 3L &&- 0\,.90 \cos 3L.\end{aligned}$$

Um nun aus der Länge der Sonne die Rectascension herzuleiten, dient die Formel:

$$\tang A = \tang \lambda \,.\, \cos \varepsilon,$$

oder wenn man hierauf Formel (17) in No. 11 der Einleitung anwendet:

$$A = \lambda - \tang \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^2 \sin 2\lambda + \tfrac{1}{2} \tang \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^4 \sin 4\lambda - \ldots$$

und, wenn man für ε den Werth $\varepsilon = 23^0\, 27'\, 31''.0$ einführt und wieder mit 206265 multiplicirt:

$$A = \lambda - 8891''.56 \sin 2\lambda + 191''.65 \sin 4\lambda - 5''.51 \sin 6\lambda + 0''.18 \sin 8\lambda,$$

wo der periodische Theil, mit ungekehrtem Zeichen genommen, die Reduction auf die Ecliptic genannt wird.

Substituirt man nun noch in der letzten Formel die zuletzt gefundene Reihe für λ und entwickelt die Sinus der mehrgliedrigen Gröfsen, so findet man nach gehöriger Reduction und Division mit 15, um alles in Zeit ausgedrückt zu erhalten:

$$\begin{aligned}A = L &+ 86^s.53 \sin L &&+ 434^s.15 \cos L \\ &- 596\,.64 \sin 2L &&+ 1\,.69 \cos 2L \\ &- 3\,.77 \sin 3L &&- 18\,.77 \cos 3L \\ &+ 13\,.23 \sin 4L &&- 0\,.19 \cos 4L \\ &+ 0\,.16 \sin 5L &&+ 0\,.82 \cos 5L \\ &- 0\,.36 \sin 6L &&+ 0\,.02 \cos 6L \\ &- 0\,.01 \sin 7L &&- 0\,.04 \cos 7L.\end{aligned}$$

15. Da sich die Rectascensionen der Sonne ungleichförmig ändern, so ist auch die wahre Sonnenzeit, die gleich dem jedesmaligen Stundenwinkel der Sonne ist, kein gleichförmiges Zeitmaafs. Man hat daher eine andre gleichförmige Zeit, die

---

*) Hierzu müssen strenge genommen noch die Störungen der Länge durch die Planeten hinzugefügt werden, auch müfste auf die kleinen Bewegungen des Punktes der Nachtgleichen Rücksicht genommen werden.

mittlere Sonnenzeit eingeführt, welche durch die Bewegung einer zweiten, fingirten Sonne gegeben ist, die sich mit derselben gleichförmigen Geschwindigkeit im Aequator bewegt wie die vorher eingeführte mittlere Sonne in der Ecliptie. Die Rectascension dieser mittleren Sonne ist also gleich der Länge der ersten mittleren Sonne L. Es ist mittlerer Mittag an einem Orte, wenn die mittlere Sonne im Meridian, wenn also die Sternzeit gleich der mittleren Länge der Sonne ist, und der jedesmalige Stundenwinkel dieser mittleren Sonne ist die mittlere Zeit, die bei astronomischen Angaben von einem Mittage zum andern von 0^h bis 24^h fortgezählt wird.

Nach Hansen ist nun die mittlere Rectascension der Sonne L für 1850 Jan. 0 0^h mittlere Pariser Zeit:

$$18^h\ 39^m\ 9^s.261,$$

und da die Länge des tropischen Jahres d. h. der Zeit, in welcher die Sonne einen vollen Umlauf in Bezug auf den Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkt vollendet, 365.2422008 Tage ist, so wird die mittlere tägliche tropische Bewegung der Sonne:

$$\frac{360^\circ}{365.2422008} = 59'\ 8''.33 \text{ oder } = 3^m\ 56^s.555 \text{ in Zeit,}$$

$$\text{Bewegung in 365 Tagen} = 23^h 59^m\ \ 2^s.706 = -57^s.294,$$

$$\text{Bewegung in 366 Tagen} = 24\ \ 2\ \ 59.261 = +2^m\ 59^s.261.$$

Danach kann man nun die Sternzeit für irgend eine andre Zeit berechnen. Um die Sternzeit im Mittage eines andern Meridians zu berechnen, hat man für den mittleren Mittag Jan. 0 1850 die Sternzeit

$$18^h\,39^m\ 9^s.261 + \frac{k}{24} \times 3^m\ 56^s.555,$$

wo k den Längenunterschied von Paris in Stunden bezeichnet, westlich positiv, östlich negativ genommen*).

Das Verhältniſs der mittleren Zeit zur wahren Zeit ergiebt sich unmittelbar aus der obigen Gleichung für A. Die mittlere Sonne wird bald vor der wahren Sonne voraus, bald hinter derselben zurück sein, je nach dem Zeichen des periodischen Theils der Formel für A.

---

*) Hierbei ist wieder noch die periodische kleine Bewegung des Frühlingsäquinoctiums zu berücksichtigen, die noch zu addiren ist.

Berechnet man L für den mittleren Mittag eines Ortes, so ist, da L gleich der Sternzeit im mittleren Mittag ist, der durch die obige Formel gegebene Werth von $L - A$ der Stundenwinkel der Sonne im mittleren Mittage *). Man nennt nun Zeitgleichung die Gröfse, die man zur wahren Zeit zu addiren hat, um die mittlere zu erhalten. Um daher aus dem obigen Ausdrucke für $L - A$ die Zeitgleichung x für den Augenblick des wahren Mittags zu erhalten, mufs man den Stundenwinkel $L - A$ in mittlere Zeit verwandeln und mit entgegengesetztem Zeichen nehmen. Ist aber n die mittlere tägliche Bewegung der Sonne in Zeit und $n + w$ die wahre tägliche Bewegung der Sonne für den bestimmten Tag, so werden 24 Stunden mittlerer Zeit gleich $24 - w$ Stunden wahrer Zeit sein, und man hat daher

$$x : A - L = 24^h : 24^h - w,$$

$$\text{oder } x = (A - L)\,\frac{24^h}{24^h - w}.$$

Aus der obigen Gleichung für A kann man den Gang der Zeitgleichung im Laufe eines Jahres leicht ersehen. Setzt man nämlich $A - L = 0$ und nimmt nur die drei bedeutendsten Glieder mit, so erhält man die Gleichung

$$0 = 86.5 \sin L - 596.6 \sin 2L + 434.1 \cos L,$$

aus der man die Werthe von L erhält, wenn die Zeitgleichung 0 ist, nämlich $L = 23^0\ 16'$, $L = 83^0\ 26'$, $L = 160^0\ 15'$, $L = 273^0\ 3'$, Werthe die dem 15. April, 14. Juni, 31. August und 24. December entsprechen. Die Zeiten, wenn die Zeitgleichung ein Maximum wird, ergeben sich aus der Differentialgleichung und man findet die 4 Maxima

	$+ 14^m\ 31^s$,	$- 3^m\ 53^s$,	$+ 6^m\ 12^s$,	$- 16^m\ 18^s$
für	Febr. 12,	Mai 14,	Juli 26,	Nov. 18.

Der wahre Tag ist am längsten, wenn die Aenderung der Zeitgleichung in einem Tage ein Maximum und positiv ist. Dies findet um Dec. 23 statt, wo diese Aenderung 30^s, also die Dauer eines wahren Tages $24^h\ 0^m\ 30^s$ ist. Der wahre

---

*) Der obige Ausdruck giebt $L - A$ nur genähert. Der strenge Werth mufs aus den Sonnentafeln berechnet werden, er ist gleich der mittleren Länge weniger der wahren Rectascension der Sonne. Die neuesten Sonnentafeln sind: die von Hansen und Olufsen, Tables du Soleil. Copenhague 1853. und Leverrier's Sonnentafeln. Annales de l'Observatoire Impériale. Tome IV.

Tag wird dagegen am kürzesten, wenn die Aenderung der Zeitgleichung in einem Tage wieder ein Maximum, aber negativ ist, und dies findet Mitte September statt, wo die Aenderung der Zeitgleichung -21^s, also die Dauer des wahren Tages $23^h\ 59^m\ 39^s$ beträgt.

Das Vorige enthält Alles, was zur Verwandlung der drei Zeiten in einander nöthig ist; indessen wird es gut sein, die Regeln im Folgenden zusammenzustellen.

16. Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit und umgekehrt. Da die Sonne durch die scheinbare Bewegung von Westen nach Osten von einer Frühlingsnachtgleiche zur andern eine volle tägliche Umdrehung gegen die Fixsterne verliert, so mufs in einem tropischen Jahre genau ein Sterntag mehr sein als darin mittlere Tage enthalten sind, und es ist daher:

$$\text{ein Sterntag} = \frac{365.242201}{366.242201} \text{ mittleren Tagen}$$

$$= \text{einem mittleren Tage} - 3^m\ 55^s.909 \text{ mittlere Zeit,}$$

$$\text{und ein mittlerer Tag} = \frac{366.242201}{365.242201} \text{ Sterntagen}$$

$$= \text{einem Sterntage} + 3^m\ 56^s.555 \text{ Sternzeit.}$$

Ist also Θ die Sternzeit, M die mittlere Zeit und Θ_0 die Sternzeit, die für $M=0$ d. h. für den mittleren Mittag stattfindet, so ist:

$$M = (\Theta - \Theta_0)\frac{24^h - 3^m\ 55^s.909}{24^h}$$

und

$$\Theta = \Theta_0 + M\frac{24^h + 3^m\ 56^s.555}{24^h}.$$

Die Sternzeit im mittleren Mittage kann nach dem Vorigen berechnet, oder den astronomischen Ephemeriden entnommen werden, wo diese Gröfse der Bequemlichkeit wegen für jeden mittleren Mittag aufgeführt wird.

Zur weiteren Erleichterung der Rechnung hat man dann noch Tafeln, welche die Werthe

$$\frac{24^h - 3^m\ 55^s.909}{24^h}.t$$

und

$$\frac{24^h + 3^m\ 56^s.555}{24^h}.t$$

für die einzelnen Werthe der Zeit t geben. Solche Tafeln findet man ebenfalls in den astronomischen Ephemeriden und in allen Sammlungen astronomischer Tafeln.

Beispiel. 1849 Juni 9 14^h 16^m $36^s.35$ Sternzeit für Berlin in mittlere Zeit zu verwandeln.

Die Sternzeit im mittleren Mittage beträgt nach Encke's Jahrbuche für diesen Tag

$$5^h\ 10^m\ 48^s.30,$$

also sind vom mittleren Mittage bis zur gegebenen Zeit 9^h 5^m $48^s.05$ Sternzeit verflossen und diese sind nach den Hülfstafeln, oder wenn man die Multiplication mit

$$\frac{24^h - 3^m\ 55^s.909}{24^h}$$

macht, 9^h 4^m $18^s.63$ mittlere Zeit. Wäre die mittlere Zeit gegeben, so würde man dieselbe nach den Hülfstafeln in Sternzeit verwandeln und diese zu der Sternzeit im mittleren Mittage addiren, um die zu der gegebenen mittleren Zeit gehörige Sternzeit zu finden.

17. Verwandlung der wahren Zeit in mittlere und umgekehrt. Um wahre Zeit in mittlere Zeit zu verwandeln, hat man einfach für die gegebene wahre Zeit die Zeitgleichung aus den Ephemeriden zu nehmen und diese zu der gegebenen Zeit algebraisch hinzuzulegen. Nach dem Berliner Jahrbuche hat man die Zeitgleichung im wahren Mittage:

		I. Diff.	II. Diff.
1849 Juni 8	$-1^m\ 20^s.73$		
		$+11^s.36$	
9	$1\ \ 9\ .37$		$+0^s.27.$
		$11\ .63$	
10	$0\ \ 57\ .74$		

Ist also die wahre Zeit 9^h 5^m $23^s.60$ für den 9. Juni gegeben, so findet man dafür die Zeitgleichung -1^m $4^s.98$, also die mittlere Zeit 9^h 4^m $18^s.62$.

Um mittlere Zeit in wahre zu verwandeln, dient dieselbe Zeitgleichung. Da diese aber in den Ephemeriden für wahre Zeit gegeben ist, so müfste man eigentlich schon die wahre Zeit kennen, um die Zeitgleichung interpoliren zu können. Bei der geringen täglichen Aenderung derselben wird es aber hinreichend sein, wenn man die gegebene mittlere Zeit dadurch in wahre verwandelt, dafs man eine Zeitgleichung an die gegebene Zeit anbringt, welche nur ungefähr der gege-

benen Zeit entspricht. Mit dieser genäherten wahren Zeit interpolirt man dann die Zeitgleichung. Ist z. B. die mittlere Zeit $9^h\ 4^m\ 18^s.62$ gegeben, so nehme man als Zeitgleichung -1^m. Mit der wahren Zeit $9^h\ 5^m\ 18^s.6$ findet man dann die Zeitgleichung $-1^m\ 4^s.98$, also die wahre Zeit $9^h\ 5^m\ 23^s.60$.

Im Nautical Almanac ist ausser der Zeitgleichung für jeden wahren Mittag auch die Gröſse $L - A$, die man zur mittleren Zeit hinzuzulegen hat, um die wahre zu erhalten, für jeden mittleren Mittag gegeben. Dadurch wird die Rechnung in beiden Fällen dieselbe, indem man sich zur Verwandlung der mittleren Zeit in wahre der zweiten Tafel bedient.

18. Verwandlung der wahren Zeit in Sternzeit und umgekehrt. Da die wahre Zeit nichts Anders als der Stundenwinkel der Sonne ist, so braucht man nur die Rectascension der Sonne zu addiren, um die Sternzeit zu erhalten.

Nach dem Encke'schen Jahrbuche hat man die folgenden Rectascensionen der Sonne für die wahren Mittage in Berlin:

			I. Diff.	
1849	Juni 8	$5^h\ 5^m\ 30^s.79$		
	9	$9\ \ 38\ .75$	$+4^m\ 7^s.96$	$+0^s.27.$
	10	$13\ \ 46\ .98$	$4\ \ 8\ .23$	

Soll man nun $9^h\ 5^m\ 23^s.60$ wahre Zeit für Juni 9 in Sternzeit verwandeln, so hat man für diese Zeit die Rectascension der Sonne gleich $5^h\ 11^m\ 12^s.75$, also die Sternzeit gleich $14^h\ 16^m\ 36^s.35$.

Um Sternzeit in wahre Zeit zu verwandeln, bedarf man einer genäherten Kenntniſs der wahren Zeit für die Interpolation der geraden Aufsteigung der Sonne. Zieht man aber von der gegebenen Sternzeit die Rectascension der Sonne ab, welche für den Anfang des Tages gilt, so erhält man die Anzahl der Sternstunden, welche seitdem verflossen sind. Diese Sternstunden müſste man in wahre Zeit verwandeln. Es reicht aber hin, dieselben in mittlere Zeit zu verwandeln und für diese Zeit die Rectascension der Sonne zu interpoliren. Zieht man diese dann von der gegebenen Sternzeit ab, so erhält man die wahre Zeit.

Juni 9 ist die Rectascension der Sonne zu Anfang des

Tages gleich $5^h\,9^m\,38^s.75$, also sind bis zur Sternzeit $14^h\,16^m\,36^s.35$ verflossen $9^h\,6^m\,57^s.60$ Sternzeit oder $9^h\,5^m\,28^s.00$ mittlere Zeit. Interpolirt man für diese Zeit die Rectascension der Sonne, so erhält man wieder $5^h\,11^m\,12^s.75$, also die wahre Zeit $9^h\,5^m\,23^s.60$.

Man kann diese Verwandlung auch ebenso bequem vornehmen, wenn man aus der Sternzeit die mittlere Zeit sucht und aus dieser vermittelst der Zeitgleichung die wahre Zeit.

Anm. Um diese Verwandlungen für die Zeit t eines Meridians zu machen, dessen Längenunterschied von dem den Ephemeriden zum Grunde liegenden Meridiane k ist, positiv wenn westlich, negativ wenn östlich, müssen die aus den Ephemeriden genommenen Gröfsen, Sternzeit im mittleren Mittage, Zeitgleichung und Rectascension der Sonne für die Zeit $t+k$ interpolirt werden.

IV. Besondere Erscheinungen der täglichen Bewegung.

19. Vermöge der täglichen Bewegung kommt jedes Gestirn zweimal in den Meridian eines Ortes, nämlich in obere Culmination, wenn die Sternzeit gleich der Rectascension des Gestirns ist, in untere Culmination, wenn die Sternzeit um 12 Stunden gröfser als die Rectascension ist. Die Zeit der Culmination eines Fixsterns ergiebt sich daher unmittelbar. Hat aber das Gestirn eine eigene Bewegung, so müfste man eigentlich schon die Zeit der Culmination kennen, um die dann stattfindende Rectascension berechnen zu können.

Für die Sonne giebt die in den Ephemeriden gegebene Zeitgleichung im wahren Mittage die mittlere Zeit der Culmination für den bestimmten Meridian, für welchen die Ephemeride gilt, und die für die wahre Zeit k interpolirte Zeitgleichung die mittlere Zeit der Culmination für einen andern Meridian, dessen westlicher Längenunterschied k ist.

Die Oerter des Mondes und der Planeten werden in den Ephemeriden für den mittleren Mittag eines bestimmten Meridians gegeben. Bezeichnet man dann mit $f(\alpha)$ die Rectascension des Gestirns in Zeit im Mittage, mit t die Zeit der Culmination, so wird die Rectascension des Gestirns zur

Zeit der Culmination nach der Newtonschen Interpolationsformel, wenn man die dritten Differenzen vernachlässigt:

$$f(a) + tf'(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{t(t-1)}{1.2} f''(a),$$

oder noch etwas genauer:

$$f(a) + tf'(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{t(t-1)}{1.2} f''(a + \tfrac{1}{2}).$$

Da diese nun gleich der Sternzeit in dem Augenblicke sein mufs, so erhält man, wenn Θ_0 die Sternzeit im mittleren Mittage und das Interval der Argumente für $f(a)$ 24 Stunden ist, die Gleichung:

$$\Theta_0 + t(24^h\, 3^m\, 56^s.56) = f(a) + tf'(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{t(t-1)}{1.2} f''(a + \tfrac{1}{2}),$$

also

$$t = \frac{f(a) - \Theta_0}{[24^h\, 3^m\, 56^s.56 - f'(a + \tfrac{1}{2})] - \frac{t-1}{2} f''(a + \tfrac{1}{2})}.$$

Hier kommt auf der rechten Seite noch t vor, da aber die zweiten Differenzen immer klein sind, so kann man zur Berechnung der Formel auf der rechten Seite für t den Näherungswerth anwenden $\frac{f(a) - \Theta_0}{24^h\, 3^m\, 56^s.56 - f'(a + \frac{1}{2})}$ *).

Die Gröfse $f(a) - \Theta_0$ ist der östliche Stundenwinkel des Gestirns für den Mittag des Meridians, für welchen die Ephemeride gilt; ist k die Länge eines anderen Ortes, wieder positiv genommen, wenn westlich, so würde der östliche Stundenwinkel für diesen Ort $f(a) - \Theta_0 + k$ sein, also würde die Culminationszeit für diesen Ort in Zeit des ersten Meridians:

$$t' = \frac{f(a) - \Theta_0 + k}{24^h\, 3^m\, 56^s.56 - f'(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{t'-1}{2} f''(a + \tfrac{1}{2})}$$

und die Ortszeit der Culmination $t = t' - k$.

Beispiel. Es seien die folgenden Rectascensionen des Mondes für mittlere Berliner Zeit gegeben:

---

*) Wäre das Interval der Argumente von $f(a)$ 12 Stunden anstatt 24 Stunden, so würde in der obigen Formel das erste Glied im Nenner $12^h\, 1^m\, 58^s.28$ werden, und wenn man von einem Werthe $f(a)$ ausginge, dessen Argument die Mitternacht wäre, so würde man $\Theta_0 + 12^h\, 1^m\, 58^s.28$ statt Θ_0 anwenden.

	$f(a)$		
1861 Juli 14.5	$13^h\ 7^m\ 5^s.3$		
		+ 27 17.6	
15.0	13 34 22 .9		+ 41.2
		27 58.8	
15.5	14 2 21 .7		43.5,
		28 42.3	
16.0	14 31 4 .0		

sowie die Sternzeit im mittleren Mittage Juli 15 $\Theta_0 = 7^h\ 33^m\ 7^s.9$. Man soll die Culminationszeit des Mondes für Greenwich finden.

Da der Längenunterschied von Greenwich $k = +53^m 34^s.9$ ist, so wird der Zähler von t' $6^h\ 54^m\ 49^s.9$, die ersten Glieder des Nenners werden $11^h\ 33^m\ 59^s.5$, also der genäherte Werth von t' gleich 0.59775; damit wird die Correction des Nenners $+ 8^s.5$ und der verbesserte Werth von t' gleich 0.59762 oder $7^h\ 10^m\ 17^s.0$, mithin die Ortszeit der Culmination $6^h\ 16^m\ 42^s.1$.

Für die untere Culmination würde man, wenn a wieder das der unteren Culmination nahe liegende Argument bezeichnet, die Gleichung haben:

$$\Theta_0 + t\,(24^h\ 3^m\ 56^s.6) = 12^h + f(a) + tf'(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{t\,(t-1)}{1.2} f''(a + \tfrac{1}{2}),$$

und die allgemeine Formel wird daher:

$$t' = \frac{12^h + f'(a) - \Theta_0 + k}{24^h\, 3^m\, 56^s.56 - f'(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{t'-1}{2} f''(a+\tfrac{1}{2})},$$

oder, wenn hier das Interval der Argumente 12 Stunden ist:

$$t' = \frac{12^h + f(a) - \Theta_0 + k}{12^h\, 1^m\, 58^s.3 - f'(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{t'-1}{2} f''(a+\tfrac{1}{2})}.$$

B e i s p i e l. Wollte man die untere Culmination des Mondes für Greenwich Juli 15 finden, so würde man hier von Juli 15.5 ausgehen, also würde der Zähler $7^h\ 20^m\ 50^s.4$, die ersten Glieder des Nenners würden $11^h\ 33^m\ 16^s.0$, mithin der genäherte Werth von t' gleich 0.6359 und der verbesserte Werth 0.63577 oder $7^h\ 37^m\ 45^s.1$. Die untere Culmination findet daher statt um $19^h\ 37^m\ 45^s.1$ Berliner Zeit oder um $18^h\ 44^m\ 10^s.2$ Greenwicher Zeit.

20. In No. 7 war die Gleichung gefunden:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t.$$

Befindet sich das Gestirn im Horizonte, ist also $h = 0$, so erhält man hieraus:

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_0\,,$$

also

$$\cos t_0 = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta.$$

Vermittelst dieser Formel findet man also für eine bestimmte Polhöhe φ den Stundenwinkel eines auf- oder untergehenden Gestirns, dessen Declination δ ist. Den Werth dieses Stundenwinkels absolut genommen, nennt man den halben Tagbogen des Sterns. Kennt man die Sternzeit, zu welcher der Stern durch den Meridian geht oder seine Rectascension, so kann man also die Sternzeit des Auf- oder Untergangs berechnen, je nachdem man den absoluten Werth von t_0 von der Rectascension abzieht oder zu derselben hinzufügt. Aus der Sternzeit findet man dann nach dem Vorigen die mittlere Zeit.

Beispiel. Man soll berechnen, um welche Zeit der Stern Arcturus für Berlin auf- und untergeht. Für den Anfang des Jahres 1861 hat man für Arcturus:

$$\alpha = 14^h\, 9^m\, 19^s.3 \qquad \delta = +19^0\, 54'\, 29''.$$

Ferner ist:

$$\varphi = 52^0\, 30'\, 16''.$$

Damit findet man den halben Tagbogen

$$t_0 = 118^0\, 10'\, 1''.3 = 7^h\, 52^m\, 40^s.$$

Arcturus geht also auf um $6^h\, 16^m\, 39^s$ und unter um $22^h\, 1^m\, 59^s$ Sternzeit.

Um die Zeit des Auf- und Untergangs eines beweglichen Gestirns zu finden, mufs man die Declination für die Zeit des Auf- und Untergangs kennen und die Aufgabe mufs daher dadurch gelöfst werden, dafs die Rechnung doppelt geführt wird. Für die Sonne wird dies einfach. Nimmt man zuerst einen genäherten Werth für die Declination, so erhält man einen genäherten Werth des Stundenwinkels der Sonne oder der wahren Zeit des Auf- und Untergangs. Da die Declinationen der Sonne in den Ephemeriden für die wahren Mittage gegeben sind, so kann man dann durch Interpolation die Declination für den Auf- und Untergang finden und damit die Rechnung wiederholen.

Für den Mond wird die Rechnung etwas weitläuftiger. Berechnet man die mittleren Zeiten der oberen und unteren Culmination des Mondes, so kann man die jedem Stundenwinkel des Mondes entsprechende mittlere Zeit finden. Man findet dann mit einer genäherten Declination des Mondes den Stundenwinkel für die Zeit des Auf- und Untergangs

und somit die mittlere Zeit zuerst genähert und wiederholt dann die Rechnung mit der für diese Zeit interpolirten Declination. Ein Beispiel findet sich in No. 14 des dritten Abschnitts.

Anm. Die Gleichung für den Stundenwinkel des Auf- und Untergangs läfst sich noch in eine andere Form bringen. Zieht man nämlich dieselbe von Eins ab und addirt sie auch dazu, so erhält man durch Division der neuen Gleichungen:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}.$$

21. Die obige Formel für $\cos t_0$ giebt von allen Erscheinungen Rechenschaft, welche der Auf- und Untergang der Sterne je nach ihrer verschiedenen Lage gegen den Aequator für alle Orte auf der Oberfläche der Erde darbietet.

Ist δ positiv, steht also der Stern nördlich vom Aequator, so wird für Orte unter nördlicher Breite $\cos t_0$ negativ; dann ist also t_0 gröfser als 90^0 und der Stern verweilt daher längere Zeit über dem Horizonte als unter demselben. Für Sterne mit südlicher Declination wird dagegen t_0 kleiner als 90^0, diese verweilen also für Orte auf der nördlichen Halbkugel der Erde kürzere Zeit über dem Horizonte als unter demselben. Auf der südlichen Halbkugel der Erde, wo φ negative Werthe hat, verhält es sich umgekehrt, indem dort der Tagbogen der südlichen Sterne gröfser als 12 Stunden ist. Ist $\varphi = 0$, so wird t_0 für jeden Werth von δ gleich 90^0; unter dem Aequator verweilen also alle Sterne gleich lange Zeit über dem Horizonte wie unter demselben. Ist $\delta = 0$, so wird für jeden Werth von φ ebenfalls $t_0 = 90^0$. Für Aequatorsterne ist also die Zeit, während welcher sie über dem Horizonte sind, für alle Orte der Erde gleich der Zeit, während welcher sie unter demselben sind.

Steht also die Sonne nördlich vom Aequator, so sind auf der nördlichen Halbkugel der Erde die Tage länger als die Nächte, und umgekehrt, wenn sie südlich steht. Ist aber die Sonne im Aequator, so ist für alle Orte der Erde Tag und Nacht gleich. Unter dem Aequator selbst ist dies immer der Fall.

Der Werth von t_0 wird übrigens nur so lange möglich sein, als $\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta < 1$ ist. Soll also ein Gestirn für

einen Ort, dessen Polhöhe φ ist, noch untergehen, so mufs tang $\delta <$ cotang φ oder $\delta < 90^0 - \varphi$ sein. Ist $\delta = 90^0 - \varphi$, so wird $t = 180^0$ und das Gestirn berührt dann nur in der unteren Culmination den Horizont. Ist $\delta > 90 - \varphi$, so geht das Gestirn nie unter, ist dagegen die südliche Declination gröfser als $90^0 - \varphi$, so kommt das Gestirn gar nicht mehr über den Horizont.

Da die Declination der Sonne immer zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegt, so haben diejenigen Orte der Erde, für welche die Sonne auch nur einen Tag im Jahre nicht auf- oder untergeht, eine nördliche oder südliche Polhöhe gleich $90^0 - \varepsilon$ oder $66\frac{1}{2}{}^0$. Diese Orte liegen in den beiden Polarkreisen. Die den Polen der Erde noch näher liegenden Orte haben die Sonne im Sommer desto längere Zeit ununterbrochen über dem Horizonte und im Winter unter demselben, je näher sie selbst den Polen liegen.

Anm. Ein Punkt des Aequators geht auf, wenn sein Stundenwinkel 6^h ist. Ist also die Rectascension dieses Punktes α, so erhält man die Sterne, welche zu gleicher Zeit aufgehen, wenn man einen gröfsten Kreis durch diesen Punkt des Aequators und durch die Punkte der Sphäre legt, deren Rectascensionen $\alpha - 6^h$ und $\alpha + 6^h$ und deren Declinationen beziehlich $-(90^0 - \varphi)$ und $+90^0 - \varphi$ sind. Ebenso erhält man die Sterne, welche mit diesem Punkte des Aequators untergehen, wenn man einen gröfsten Kreis durch die Punkte legt, deren Rectascensionen $\alpha + 6^h$ und $\alpha - 6^h$ und deren Declinationen beziehlich $-(90^0 - \varphi)$ und $90^0 - \varphi$ sind. Der Punkt, welcher beim Aufgange des Punktes α im Horizonte in der unteren Culmination war, wird aber jetzt in oberer Culmination φ Grade über dem Pole oder in der Höhe 2φ über dem nördlichen Horizonte sein. Unter der Polhöhe 45^0 machen daher alle Sternbilder eine Drehung von 90^0 vom Aufgange zum Untergange, da der halbe gröfste Kreis, der mit einem Punkte des Aequators zu gleicher Zeit aufging, beim Untergange desselben Punktes des Aequators senkrecht auf dem Horizonte steht. Unter dem Aequator gehen aber alle Sterne, die zu gleicher Zeit aufgehen, auch zu gleicher Zeit unter.

22. Um den Punkt des Horizonts zu finden, wo ein Stern auf- und untergeht, hat man nur in der in No. 6 gefundenen Gleichung:

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A,$$

$h = 0$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$\cos A_0 = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \qquad (b).$$

Der negative Werth von A_0 ist das Azimut des Sterns bei seinem Aufgange, der positive Werth das Azimut bei seinem Untergange. Die Entfernung des Sterns vom wahren Ost- oder Westpunkte nennt man die Morgen- oder Abendweite des Sterns. Bezeichnet man diese durch $A_{,}$, so ist:

$$A_0 = 90 + A_{,}$$

also:

$$\sin A_{,} = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \qquad (c),$$

wo $A_{,}$ positiv ist, wenn der Punkt des Auf- oder Untergangs vom Ost- oder Westpunkte nach Norden liegt, negativ, wenn derselbe nach Süden liegt.

Der Formel (c) für die Morgen- und Abendweite kann man auch wieder eine andre Gestalt geben, wenn man schreibt:

$$\frac{1 + \sin A_{,}}{1 - \sin A_{,}} = \frac{\sin \psi + \sin \delta}{\sin \psi - \sin \delta},$$

wo $\psi = 90 - \varphi$ ist. Daraus erhält man dann:

$$\operatorname{tang}\left(45 - \frac{A_{,}}{2}\right)^2 = \frac{\operatorname{tang}\frac{\psi - \delta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\psi + \delta}{2}}.$$

Für Arcturus erhält man danach mit den vorher gegebenen Werthen von δ und φ

$$A_{,} = 34^\circ\, 0'.9.$$

23. Setzt man in der Gleichung:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$1 - 2 \sin \frac{1}{2} t^2$ für $\cos t$, so erhält man:

$$\sin h = \cos (\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} t^2.$$

Daraus sieht man zuerst, daſs zu gleichen Werthen von t zu beiden Seiten des Meridians auch gleiche Höhen gehören. Ferner wird, weil das zweite Glied immer negativ ist, h für $t = 0$ ein Maximum und dies Maximum selbst, oder die Zenithdistanz des Sterns bei seiner oberen Culmination, ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\cos z = \cos (\varphi - \delta) \qquad (d),$$

nämlich

$$z = \varphi - \delta \text{ oder } = \delta - \varphi.$$

Nimmt man also allgemein:

$$z = \delta - \varphi,$$

so mufs man südliche Zenithdistanzen negativ nehmen, weil für Sterne, die auf der Südseite des Zeniths culminiren, $\delta < \varphi$ ist.

Für die untere Culmination oder für $t = 180^0$ wird dagegen h ein Minimum, wie man am leichtesten sieht, wenn man $180 + t'$ für t einführt, wo also t' von dem Theile des Meridians unter dem Pole ab gerechnet ist. Dann wird nämlich:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta \cos t',$$

oder wenn man wieder $1 - 2 \sin \frac{1}{2} t'^2$ für $\cos t'$ setzt:

$$\sin h = \cos\,[180^0 \mp (\varphi + \delta)] + 2 \cos\varphi \cos\delta \sin \tfrac{1}{2} t'^2.$$

Da das zweite Glied der rechten Seite immer positiv ist, so wird h ein Minimum, wenn $t' = 0$ ist, d. h. in der unteren Culmination und zwar:

$$\cos z = \cos\,[180^0 \mp (\varphi + \delta)].$$

Da z immer kleiner als 90^0 sein mufs, wenn der Stern in der unteren Culmination sichtbar ist, so gilt das obere Zeichen, wenn φ also auch δ positiv ist, das untere Zeichen für Orte auf der südlichen Halbkugel, und man hat daher nach dem Vorigen:

$$z = 180^0 - (\varphi + \delta),$$

für Orte auf der nördlichen Erdhalbkugel, und

$$z = -(180^0 + \varphi + \delta)$$

für Orte auf der südlichen Halbkugel zu nehmen.

Die Declination von α Lyrae ist $38^0\,39'$, also ist für die Polhöhe von Berlin $\delta - \varphi = -13^0\,51'$. Der Stern α Lyrae geht also bei seiner oberen Culmination für Berlin südlich vom Zenith in einer Entfernung von $13^0\,51'$ durch den Meridian. Ferner ist $180^0 - \varphi - \delta$ oder die Zenithdistanz bei der unteren Culmination gleich $88^0\,51'$.

24. Die gröfste Höhe eines Gestirns findet nur dann im Meridian statt, wenn die Declination desselben während der Zeit seines Verweilens über dem Horizonte sich nicht ändert. Ist die Declination dagegen veränderlich, so erreicht das Gestirn aufserhalb des Meridians seine gröfste Höhe. Differenzirt man die Formel:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$

indem man z, δ und t als veränderlich ansieht, so erhält man:

$$-\sin z\, dz = [\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t]\, d\delta - \cos\varphi \cos\delta \sin t\, dt$$

und hieraus für den Fall, dafs z ein Maximum oder $dz = 0$ ist:

$$\sin t = \frac{d\delta}{dt}[\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\delta \cos t].$$

Aus dieser Gleichung findet man den Stundenwinkel des Gestirns zur Zeit seiner gröfsten Höhe. $\frac{d\delta}{dt}$ ist das Verhältnifs der Aenderung der Declination zur Aenderung des Stundenwinkels, sodafs, wenn z. B. dt eine Bogensecunde bedeutet, $\frac{d\delta}{dt}$ die Aenderung der Declination in $\frac{1}{15}$ einer Zeitsecunde ist. Da dies Verhältnifs bei allen Gestirnen klein ist, so wird man sin t mit dem Bogen vertauschen und cos t gleich Eins setzen können und erhält dann für den Stundenwinkel der gröfsten Höhe:

$$t = \frac{d\delta}{dt}[\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\delta]\frac{206265}{15} \qquad (g),$$

wo $\frac{d\delta}{dt}$ die Aenderung der Declination in einer Zeitsecunde ist und t in Zeitsecunden gefunden wird. Diesen Stundenwinkel t hat man dann immer zu der Zeit der Culmination algebraisch zu addiren, um die Zeit der gröfsten Höhe zu erhalten.

Culminirt das Gestirn südlich vom Zenith und nähert sich das Gestirn dem Nordpole, ist also $\frac{d\delta}{dt}$ positiv, so findet, wenn φ positiv ist, die gröfste Höhe nach der Culmination statt; nimmt dagegen die Declination ab, so tritt die gröfste Höhe vor der Culmination ein. Das Umgekehrte findet statt, wenn das Gestirn zwischen dem Pole und Zenith culminirt.

25. Differenzirt man die Formeln:

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t,$$
$$\cos h \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t,$$

so erhält man:

$$\sin h \frac{dh}{dt} = \cos\delta\,[\sin\varphi \cos A \sin t - \cos t \sin A],$$

$$\cos h \frac{dA}{dt} = \cos\delta\,[\cos A \cos t + \sin\varphi \sin t \sin A],$$

oder:

$$\frac{dh}{dt} = -\cos\delta \sin p = -\cos\varphi \sin A,$$

$$\cos h \frac{dA}{dt} = +\cos\delta \cos p. \qquad (h)$$

Häufig braucht man noch die zweiten Differentialquotienten. Es ist aber:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\cos\varphi \cos A \,.\, \frac{dA}{dt},$$

$$= -\frac{\cos\varphi \cos\delta \cos A \cos p}{\cos h}. \qquad (i)$$

Ebenso hat man:

$$\frac{dz}{dt} = \cos\delta \sin p = \cos\varphi \sin A,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\cos\varphi \cos\delta \cos A \cos p}{\cos h}. \qquad (k)$$

Ferner findet man aus der zweiten der Formeln (h):

$$\cos h^2 \frac{d^2 A}{dt^2} = -\cos h \cos\delta \sin p \frac{dp}{dt} + \cos\delta \cos p \sin h \frac{dh}{dt}.$$

Man erhält aber durch die Differentiation der Formel:

$$\sin\varphi = \sin h \sin\delta + \cos h \cos\delta \cos p,$$

$$\cos h \cos\delta \sin p \frac{dp}{dt} = [\cos h \sin\delta - \sin h \cos\delta \cos p] \frac{dh}{dt}.$$

Folglich wird auch:

$$\cos h^2 \frac{d^2 A}{dt^2} = + [\cos h \sin\delta - 2\cos\delta \sin h \cos p] \cos\delta \sin p,$$

oder auch, wenn man A statt p einführt:

$$\cos h^2 \frac{d^2 A}{dt^2} = -\cos\varphi \sin A [\cos h \sin\delta + 2\cos\varphi \cos A].$$

26. Da man hat:

$$\frac{dh}{dt} = -\cos\varphi \sin A,$$

so wird $\frac{dh}{dt} = 0$, also h ein Maximum oder Minimum, wenn $\sin A = 0$, also der Stern im Meridian ist.

Ferner wird $\frac{dh}{dt}$ ein Maximum sein, wenn $\sin A = \pm 1$, also $A = 90^0$ oder $= 270^0$ ist.

Die Höhe eines Sterns ändert sich also am schnellsten in dem Augenblicke, wo derselbe durch den Verticalkreis geht, dessen Azimut 90^0 oder 270^0 ist. Diesen Verticalkreis nennt man den ersten Vertical.

Um die Zeit des Durchgangs der Sterne durch diesen ersten Vertical, so wie ihre Höhe in demselben zu finden, hat man nur in den Formeln in No. 6 dieses Abschnitts $A = 90$ zu setzen oder das in diesem Falle rechtwinklige Dreieck zwischen Stern, Zenith und Pol zu betrachten und erhält:

$$\left.\begin{aligned}\cos t &= \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\varphi} \\ \sin h &= \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}\end{aligned}\right\} \quad (l).$$

Endlich wird:

$$\sin p = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}.$$

Ist $\delta > \varphi$, so wird $\cos t$ unmöglich, also kommt dann der Stern gar nicht mehr in den ersten Vertical, sondern culminirt zwischen Zenith und Pol. Ist δ negativ, so wird $\cos t$ negativ; da aber unter nördlichen Polhöhen die Stundenwinkel der südlichen Sterne immer kleiner als 90 sind, so lange sich dieselben über dem Horizonte befinden, so kommen dieselben auch nicht in den sichtbaren Theil des ersten Verticals.

Für Arcturus und die Polhöhe von Berlin erhält man:

$$t = 73^0\ 52'.1 = 4^h\ 55^m\ 28^s$$
$$h = 25^0\ 24'.9.$$

Arcturus kommt also für Berlin in den ersten Vertical vor der Culmination um $9^h\ 13^m\ 51^s$ und nach derselben um $19^h\ 4^m\ 47^s$.

Ist der Stundenwinkel nahe bei 0, so findet man t durch den Cosinus und h durch den Sinus sehr ungenau. Man erhält aber dann aus der Formel für $\cos t$ auf dieselbe Weise wie früher:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}$$

und nimmt dann für die Berechnung der Höhe die folgende Formel:

$$\operatorname{cotang} h = \operatorname{tang} t \cos\varphi.$$

27. Da man hat:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cos\delta\cos p}{\cos h},$$

so sieht man, daſs dieser Differentialquotient gleich Null wird, daſs also ein Stern nur seine Höhe für einen Augenblick ändert, wenn $\cos p = o$ wird, also der Verticalkreis des Sterns auf dem Declinationskreise senkrecht ist. Da aber:

$$\cos p = \frac{\sin\varphi - \sin h \sin\delta}{\cos h \cos\delta}$$

ist, so sieht man, daſs dies statt findet, wenn $\sin h = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$ ist.

Ein solcher Fall findet also nur statt für diejenigen Circumpolarsterne, deren Declination gröſser als die Polhöhe

ist und zwar da, wo der Verticalkreis den Parallelkreis berührt. Der Stern ist dann in seiner gröfsten Digression und das Azimut zu der Zeit ist gegeben durch die Gleichung:

$$\sin A = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}$$

und der Stundenwinkel durch die Gleichung:

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \delta}.$$

Für den Polarstern, dessen Declination für 1861 gleich 88° 34′ 6″ und für die Polhöhe von Berlin findet man:

$$t = \pm 88^0\ 8'\ 0'' = 5^h\ 52^m\ 32^s,$$

$$A = 2^0\ 21'\ 9'' \text{ vom Nordpunkte gerechnet, } h = 52^0\ 31'.7.$$

28. Zum Schlusse soll noch die Zeit bestimmt werden, in welcher die Scheiben der Sonne und des Mondes sich durch einen gegebenen gröfsten Kreis bewegen.

Ist $\Delta\alpha$ die Zunahme der Rectascension des Gestirns in Zeitsecunden zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen, so erhält man die Sternzeit x, in welcher sich dasselbe durch einen gewissen Stundenwinkel t bewegt, da für die hier zu betrachtenden kleinen Stundenwinkel die Bewegung der Sonne und des Mondes als gleichförmig angenommen werden kann, aus der Proportion:

$$x : t = 86400 + \Delta\alpha : 86400$$

also

$$x = t \frac{1}{1 - \dfrac{\Delta\alpha}{86400 + \Delta\alpha}}$$

oder wenn man das zweite Glied des Nenners, welches gleich der Zunahme der Rectascension des Gestirns in Zeit in einer Secunde Sternzeit ist, mit λ bezeichnet:

$$x = t \cdot \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Ist nun der westliche Rand des Gestirns im Meridian, so ist der östliche Stundenwinkel des Mittelpunkts, wenn man den scheinbaren Halbmesser mit R bezeichnet, gegeben durch die Gleichung:

$$\cos R = \sin \delta^2 + \cos \delta^2 \cos t$$

oder

$$\sin \tfrac{1}{2} R = \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} t.$$

Man hat daher, da t klein ist, für diesen Stundenwinkel in Zeit:

$$t = \frac{R}{15 \cos \delta}$$

und mithin die Sternzeit der Culmination der Sonne:

$$2x = \frac{2R}{15 . \cos \delta} \cdot \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Ist der obere Rand des Gestirns im Horizonte, so ist der untere Rand um $2R$ unter dem Horizonte, und da $\frac{dz}{dt} = \cos \delta \sin p$, so wird der Unterschied der Stundenwinkel des oberen und unteren Randes in Zeit:

$$\frac{2R}{15 . \cos \delta \sin p}$$

und mithin die Dauer des Auf- oder Untergangs des Gestirns in Sternzeit gleich

$$\frac{2R}{15 . \cos \delta \sin p} \cdot \frac{1}{1 - \lambda},$$

wo p durch die Gleichung gegeben ist:

$$\cos p = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}.$$

Legt man einen Verticalkreis an den Mittelpunkt und Rand des Gestirns, so findet man den Unterschied der Azimute derselben aus der Gleichung:

$$\sin \tfrac{1}{2} R = \cos h \sin \tfrac{1}{2} a$$

oder, da a klein ist, aus:

$$R = \cos h . a.$$

Da aber $dt = \frac{\cos h \, dA}{\cos \delta \cos p}$, so erhält man für die Sternzeit, in welcher das Gestirn durch einen Höhenkreis geht:

$$\frac{2R}{15 \cos \delta . \cos p} \cdot \frac{1}{1 - \lambda},$$

$$\text{wo } \cos p = \frac{\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t}{\cos h}.$$

Zweiter Abschnitt.

Von den Veränderungen der Fundamental-Ebenen, auf welche die Oerter der Sterne bezogen werden.

Da die Pole ihre Lage auf der Oberfläche der Erde nicht ändern, so ist der Winkel zwischen der Ebene des Horizonts eines Ortes und der Erdaxe sowie der Ebene des Erdäquators constant. Dasselbe ist daher der Fall mit der Lage des Poles und des Aequators der scheinbaren Himmelskugel gegen den gröſsten Kreis des Horizonts. Da aber die Lage der Weltaxe im Raume durch die Anziehung der Sonne und des Mondes geändert wird, so fällt der ideale gröſste Kreis des Aequators sowie der ideale Pol zu verschiedenen Zeiten mit verschiedenen Sternen zusammen oder die Sterne scheinen ihre Lage gegen den Aequator zu ändern. Ferner bewirken die Anziehungen der Planeten eine Aenderung der Lage der Ebene der Erdbahn im Raume; die Bahn, welche der Mittelpunkt der Sonne im Laufe eines Jahres zu beschreiben scheint, fällt daher im Laufe der Zeit ebenfalls mit verschiedenen Sternen zusammen. Durch die Bewegungen beider Ebenen entsteht daher sowohl eine Aenderung der gegenseitigen Neigung oder der Schiefe der Ecliptic als auch eine Aenderung der Durchschnittspunkte der denselben entsprechenden gröſsten Kreise. Die Längen und Breiten der Sterne sowie die Rectascensionen und Declinationen der Sterne sind daher ebenfalls veränderlich und es ist vor Allem wichtig, die Aenderungen dieser Gröſsen kennen zu lernen.

Um sich einen deutlichen Begriff von den gegenseitigen Bewegungen des Aequators und der Ecliptic zu machen, muſs man dieselben auf eine feste Ebene beziehen, wofür nach Laplace derjenige gröſste Kreis genommen wird, mit welchem

die Ebene der Ecliptic zu Anfang des Jahres 1750 zusammenfiel. Die physische Astronomie lehrt nun, daſs die Anziehung der Sonne und des Mondes auf das Erdsphäroid eine Bewegung der Erdaxe und somit des Aequators gegen die feste Ecliptic erzeugt, vermöge welcher die Durchschnittspunkte eine langsame, rückgängige Bewegung auf der festen Ebene haben und zugleich eine periodische, die von den Oertern der Sonne und des Mondes und der Lage der Mondknoten abhängig ist. Die erstere heiſst die Luni-Solar-Präcession, die zweite, periodische Bewegung die Luni-Solar-Nutation in Länge. Auſserdem erzeugt diese Anziehung eine periodische, von denselben Gröſsen abhängige Aenderung der Neigung des Aequators gegen die feste Ebene, welche die Luni-Solar-Nutation der Schiefe heiſst.

Da ferner die gegenseitigen Anziehungen der Planeten Aenderungen in den Neigungen und der Lage der Durchschnittslinien der Planetenbahnen mit der festen Ecliptic erzeugen, so ändert auch die Ebene der Erdbahn ihre Lage gegen die feste Ecliptic, mit der dieselbe im Jahre 1750 zusammenfiel. Dadurch entsteht also eine Aenderung der Neigung der wahren Ecliptic gegen den Aequator, welche die Säcularänderung der Schiefe heiſst; ferner ist die Bewegung der Durchschnittspunkte des Aequators und der wahren Ecliptic auf letzterer, welche die allgemeine Präcession genannt wird, verschieden von der Bewegung des Aequators auf der festen Ecliptic, der Luni-Solar-Präcession *).

Diese Aenderung der Ebene der Erdbahn hat aber noch eine andre Wirkung. Da sich nämlich vermöge derselben die Lage der Bahnen der Sonne und des Mondes gegen den Erdäquator, obwohl sehr langsam, ändert, so muſs daher eine der Nutation ähnliche Bewegung des Aequators nur von sehr langer Periode entstehen, durch die sowohl die Neigung des Aequators gegen die Ecliptic als auch die Lage der Durchschnittspunkte geändert wird. Wegen der sehr langen Periode dieser Aenderungen werden dieselben aber mit der Säcularänderung der Schiefe und der Präcession zusammenge-

---

*) Die periodischen Glieder, die Nutation, bleiben für die feste und bewegliche Ecliptic dieselben.

nommen. Die durch die Störungen der Planeten indirect erzeugte Bewegung des Aequators ändert daher ein wenig die Luni-Solar- und die allgemeine Präcession, ebenso die Winkel, welche die feste und bewegliche Ecliptic mit dem Aequator machen *).

I. Die Präcession.

1. Laplace giebt in §. 44 des sechsten Buches der Mécanique céleste die Ausdrücke für die verschiedenen langsamen Bewegungen des Aequators und der Ecliptic, welche sich auf Zeiträume von etwa 1200 Jahren vor und nach der Epoche von 1750 anwenden lassen, indem die Säcularstörungen der Erdbahn so weit berücksichtigt sind, daſs sie für so lange Zeiträume ausreichen. Bessel hat hieraus diese Aenderungen nach Potenzen der Zeit entwickelt und giebt in der Vorrede zu seinen Tabulae Regiomontanae die Ausdrücke derselben bis auf die zweite Potenz der Zeit, die für mehrere Jahrhunderte vor oder nach der Epoche ausreichen. Danach ist die jährliche Luni-Solar-Präcession für die Zeit $1750 + t$:

$$\frac{dl_{\prime}}{dt} = 50''.37572 - 0''.000243589\, t$$

oder die Aenderung selbst in dem Zeitraume von 1750 bis $1750 + t$:

$$l_{\prime} = t\,.\,50''.37572 - t^2\, 0''.0001217945,$$

und dies ist also der Bogen der festen Ecliptic zwischen den Durchschnittspunkten derselben mit dem Aequator zu Anfang der Jahre 1750 und $1750 + t$.

Ferner ist die jährliche allgemeine Präcession:

$$\frac{dl}{dt} = 50''.21129 + 0''.0002442966\, t$$

und die Aenderung selbst in dem Zeitraume von 1750 bis $1750 + t$:

$$l = t\, 50''.21129 + t^2\, 0''.0001221483,$$

---

*) In den in Reihen entwickelten Ausdrücken nur die von t^2 abhängigen Glieder.

und dies ist der Bogen der wahren Ecliptic zwischen den Durchschnittpunkten derselben mit dem Aequator zu Anfang der Jahre 1750 und $1750 + t$.

Ferner ist der Winkel zwischen dem Aequator und der festen Ecliptic für $1750 + t$:

$$\varepsilon_0 = 23^\circ\, 28'\, 18''.0 + t^2\, 0''.0000098423$$

und der Winkel zwischen dem Aequator und der wahren Ecliptic, welcher die mittlere Schiefe der Ecliptic genannt wird:

$$\varepsilon = 23^\circ\, 28'\, 18''.0 - t\, 0''.48368 - t^2\, 0''.00000272295 \text{ *)}.$$

sodafs man noch hat:

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = + 0''.00001968466\, t,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - 0''.48368 - 0''.0000054459\, t.$$

Es sei nun Fig. 2 AA_0 der Aequator und EE_0 die Ecliptic, beide für das Jahr 1750, ferner bezeichne $A'A''$ und $\varepsilon\varepsilon'$ den Aequator und die Ecliptic für $1750 + t$, so ist das Stück

---

*) Bessel hat die numerischen Werthe der in der Mécanique céleste gegebenen Ausdrücke etwas geändert, indem er die Säcularstörungen der Erde mit einer verbesserten Venusmasse berechnet und das in t multiplicirte Glied der Luni-Solar-Präcession $l_{\prime}$ aus neueren Beobachtungen bestimmt hat. Die jährliche Abnahme der Schiefe der Ecliptic, wie dieselbe nach den neuesten Bestimmungen aus den Beobachtungen folgt, ist von der im Texte gegebenen etwas verschieden, nämlich $0''.4645$. Es ist aber der obige Werth für die im Folgenden zu gebende Berechnung der Gröfsen π und Π, welche die Lage der wahren Ecliptic gegen die feste bestimmen, beibehalten, wie dies von Bessel geschehen und auch richtiger ist, da diese Werthe mit den auf denselben Massen beruhenden Werthen von $\frac{dl}{dt}$ für die Bestimmung von π und Π verbunden werden. Die in t^2 multiplicirten Glieder, die von den durch die Planeten erzeugten Störungen abhängen, beruhen auf den von Laplace angewandten Massen und bedürfen einer genaueren Bestimmung.

Peters giebt in seiner Schrift: Numerus constans nutationis, mit den neuesten Planetenmassen die folgenden Werthe, die auf das Jahr 1750 und auf die Besselsche Constante der Luni-Solar-Präcession reducirt sind:

$$l_{\prime} = t\, 50''.37572 - t^2\, 0''.0001084$$

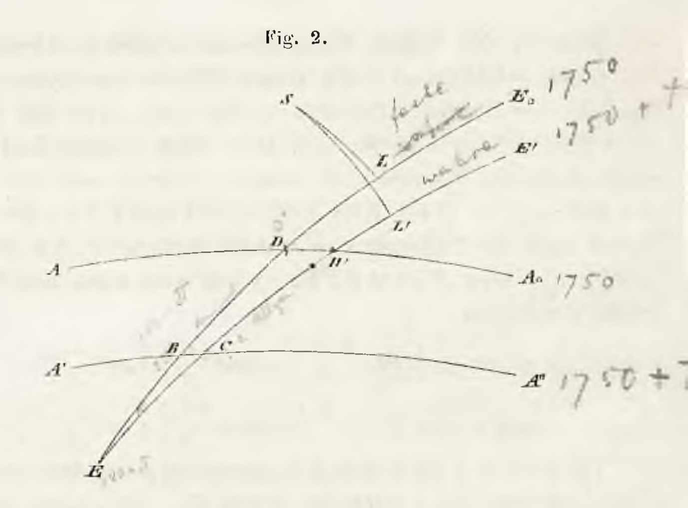
$$l = t\, 50''.21484 + t^2\, 0''.0001134$$

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 28'\, 17''.9 + 0''.00000735\, t^2$$

$$\varepsilon = 23^\circ 28'\, 17''.9 - 0''.4738\, t - 0''.00000140\, t^2.$$

Da die Besselschen Werthe aber fast allgemein angewandt werden, so sind dieselben im Texte beibehalten.

Fig. 2.



BD der festen Ecliptic, um welches der Aequator auf derselben sich rückwärts bewegt hat, die Lunisolarpräcession in t Jahren gleich l_1. Ferner sind BCE und $A'BE$ beziehlich die Neigung der festen und der wahren Ecliptic gegen den Aequator gleich ε_1 und ε. Ist dann S irgend ein Stern, so ist, wenn SL und SL' senkrecht auf die feste und die wahre Ecliptic gezogen sind, DL die Länge des Sterns für 1750, dagegen CL' die Länge des Sterns für $1750 + t$. Bezeichnet man durch D' denselben Punkt der beweglichen Ecliptic, welcher in der festen mit D bezeichnet wurde, so ist der Bogen CD', d. h. also der Bogen der wahren Ecliptic zwischen dem Aequinoctium von 1750 und dem von $1750 + t$ die allgemeine Präcession. Dieser Theil der Präcession in Länge ist für alle Sterne gleich. Um daraus die vollständige Präcession in Länge für einen Stern zu erhalten, hat man zu der allgemeinen Präcession nur noch $D'L' - DL$ hinzuzufügen. Dieser Theil ist aber wegen der langsamen Aenderung der Schiefe bedeutend kleiner als der erstere. Um denselben zu berechnen, bedarf man der Lage der wahren Ecliptic gegen die feste, die durch die Säcularstörungen der Erde gegeben ist, die man aber auch aus den obigen Ausdrücken herleiten kann. Nennt man nämlich Π die Länge des aufsteigenden Knotens der wahren Ecliptic auf der festen (d. h. denjenigen Durchschnittspunkt beider gröfsten Kreise, von

welchem ab die wahre Ecliptic eine nördliche Breite über der festen erhält) und zählt diesen Winkel vom festen Aequinoctium des Jahres 1750 ab, so hat man, weil die Längen in der Richtung von B nach D gezählt werden und E der niedersteigende Knoten der wahren Ecliptic auf der festen, also $DE = 180^0 - \Pi$ ist, $BE = 180^0 - \Pi - l_,$ und $CE = 180^0 - \Pi - l$. Nennt man die Neigung der wahren Ecliptic gegen die feste π, hier also den Winkel BEC, so hat man nach den Napierschen Analogien:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\pi \,.\, \sin \left\{ \Pi + \frac{l_, + l}{2} \right\} = \sin \frac{l_, - l}{2} \operatorname{tang} \frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{2},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\pi \,.\, \cos \left\{ \Pi + \frac{l_, + l}{2} \right\} = \cos \frac{l_, - l}{2} \operatorname{tang} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2}.$$

Da B der Punkt des Aequators ist, welcher im Jahre 1750 in D war, so ist BC das Stück des Aequators, um welches sich der Durchschnittspunkt der Ecliptic während der Zeit t auf dem Aequator vorwärts bewegt hat. Bezeichnet man diesen Bogen, der die Präcession durch die Planeten während der Zeit t genannt wird, mit a, so erhält man aus demselben Dreiecke:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \,.\, \cos \frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{2} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (l_, - l) \cos \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man nun a, π und Π in Reihen entwickeln, die nach Potenzen der Zeit t fortschreiten. Die letzte Gleichung giebt, wenn man:

$$\varepsilon_0 + \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) \text{ statt } \frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{2}$$

einführt und die Sinus und Tangenten der kleinen Winkel $l_, - l$, a und $\varepsilon - \varepsilon_0$ mit dem Bogen vertauscht:

$$a = \frac{l_, - l}{\cos \varepsilon_0} + \tfrac{1}{2} \frac{(l_, - l)}{\cos \varepsilon_0{}^2} \sin \varepsilon_0 \,.\, \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{206265},$$

oder wenn man für $l_,$, l und $\varepsilon - \varepsilon_0$ ihre Ausdrücke setzt, die die Formen $\lambda_, t + \lambda'_, t^2$, $\lambda t + \lambda' t^2$ und $\eta t + \eta' t^2$ haben, so wird:

$$a = t \,.\, \frac{\lambda_, - \lambda}{\cos \varepsilon_0} + t^2 \left\{ \frac{\lambda'_, - \lambda'}{\cos \varepsilon_0} + \tfrac{1}{2} \frac{(\lambda_, - \lambda)\,\eta}{206265} \,.\, \frac{\sin \varepsilon_0}{\cos \varepsilon_0{}^2} \right\}$$

und, wenn man die numerischen Werthe einsetzt:

$$a = t \,.\, 0.17926 - t^2\, 0''.0002660393,$$

$$\frac{da}{dt} = \quad 0.17926 - t \,.\, 0''.0005320786.$$

Ferner ist:

$$\tang\left\{\Pi+\frac{l_{,}+l}{2}\right\}=\tang\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varepsilon+\varepsilon_0}{2}}{\sin\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2}},$$

und

$$\tang\tfrac{1}{2}\pi^2=\left\{\tang\frac{l_{,}-l}{2}^2\tang\frac{\varepsilon+\varepsilon_0}{2}^2+\tang\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2}^2\right\}\cos\frac{l_{,}-l}{2}^2,$$

oder auf dieselbe Weise wie oben:

$$\tang\left\{\Pi+\tfrac{1}{2}(l_{,}+l)\right\}=\frac{a\sin\varepsilon_0}{\varepsilon-\varepsilon_0}+\frac{\frac{1}{2}a\cos\varepsilon_0}{206265}$$

$$\pi^2=a^2\sin\varepsilon_0{}^2+(\varepsilon-\varepsilon_0)^2+\frac{a^2\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{206265}.$$

Setzt man auch hier für $\varepsilon-\varepsilon_0$ und a die Ausdrücke $\eta t+\eta' t^2$ und $\alpha t+\alpha' t^2$, so ist:

$$\Pi+\tfrac{1}{2}(l+l_{,})=\text{arc tang}\frac{\alpha\sin\varepsilon_0}{\eta}$$
$$+t\left\{\frac{\alpha'\eta\sin\varepsilon_0-\alpha\eta'\sin\varepsilon_0}{\eta^2}206265+\tfrac{1}{2}\alpha\cos\varepsilon_0\right\}\cos\Pi^2$$

$$\pi=t\sqrt{\alpha^2\sin\varepsilon_0{}^2+\eta^2}+\frac{t^2}{\pi}\left\{\alpha\alpha'\sin\varepsilon_0{}^2+\eta\eta'+\frac{\frac{1}{2}\alpha^2\eta\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0}{206265}\right\},$$

oder, wenn man die numerischen Werthe substituirt:

$$\Pi=171^\circ\,36'\,10''-t\,.\,5''.21$$
$$\pi=t\,.\,0''.48892-t^2\,0''.0000030715$$
$$\frac{d\pi}{dt}=0''.48892-t\,.\,0''.0000061430.$$

2. Nachdem man nun die gegenseitigen Aenderungen der Ebenen, auf welche die Oerter der Sterne bezogen werden, kennt, ist es leicht, die dadurch hervorgebrachten Aenderungen der Oerter der Sterne selbst zu bestimmen. Bezeichnet λ und β die Länge und Breite eines Sterns, bezogen auf die wahre Ecliptic zur Zeit $1750+t$, so sind die Coordinaten des Sterns in Bezug auf diese Grundebene, wenn man als Anfangspunkt der Zählung der Längen den aufsteigenden Knoten der wahren Ecliptic auf der festen nimmt:

$$\cos\beta\cos(\lambda-\Pi-l),\quad\cos\beta\sin(\lambda-\Pi-l),\quad\sin\beta.$$

Ist dann L und B die Länge und Breite des Sterns, bezogen auf die feste Ecliptic für 1750, so sind die drei Coordinaten in Bezug auf diese Grundebene und von demselben Anfangspunkte gerechnet:

$$\cos B\cos(L-\Pi),\quad\cos B\sin(L-\Pi),\quad\sin B.$$

Da nun die Grundebenen beider Coordinatensysteme den Winkel π mit einander bilden, so erhält man durch die Formeln (1a) der Einleitung:

$$\begin{aligned}\cos\beta\cos(\lambda-\Pi-l) &= \cos B\cos(L-\Pi)\\ \cos\beta\sin(\lambda-\Pi-l) &= \cos B\sin(L-\Pi)\cos\pi+\sin B\sin\pi\\ \sin\beta &= -\cos B\sin(L-\Pi)\sin\pi+\sin B\cos\pi.\end{aligned}\qquad (A)$$

Differenzirt man diese Gleichungen, indem man L und B als constant ansieht, so erhält man durch die Differentialformeln (11) in No. 9 der Einleitung, da hier $a=90^0-\beta$, $b=90^0-B$, $c=\pi$, $A=90^0+L-\Pi$, $B=90^0-(\lambda-\Pi-l)$:

$$\begin{aligned}d(\lambda-\Pi-l) &= -d\Pi+\pi\tan\beta\sin(\lambda-\Pi-l)\,d\Pi\\ &\quad+\tan\beta\cos(\lambda-\Pi-l)\,d\pi\\ d\beta &= +\pi\cos(\lambda-\Pi-l)\,d\Pi-\sin(\lambda-\Pi-l)\,d\pi.\end{aligned}$$

Daraus erhält man aber, wenn man durch dt dividirt und $t\frac{d\pi}{dt}$ statt π im Coefficienten von $d\Pi$ setzt, für die jährlichen Aenderungen der Längen und Breiten der Sterne die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dl}{dt}+\tan\beta\cos\left(\lambda-\Pi-l-\frac{d\Pi}{dt}t\right)\frac{d\pi}{dt}\\ \frac{d\beta}{dt} &= -\sin\left(\lambda-\Pi-l-\frac{d\Pi}{dt}t\right)\frac{d\pi}{dt}\end{aligned}$$

oder, da $\Pi+\frac{d\Pi}{dt}t=171^0\,36'\,10''-t.10''.42$ ist, wenn man setzt:

$$\Pi+t\frac{d\Pi}{dt}+l=171^0\,36'\,10''+t\,39''.79=M,$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dl}{dt}+\tan\beta\cos(\lambda-M)\frac{d\pi}{dt}\\ \frac{d\beta}{dt} &= -\sin(\lambda-M)\frac{d\pi}{dt},\end{aligned}\qquad (B)$$

wo die numerischen Werthe für $\frac{dl}{dt}$ und $\frac{d\pi}{dt}$ in der vorigen Nummer gegeben sind.

Bezeichnen wieder L und B die Länge und Breite eines Sterns, bezogen auf die feste Ecliptic und das Aequinoctium für 1750, so wird diese Länge, vom Durchschnittspunkte des Aequators für die Zeit $1750+t$ mit der festen Ecliptic für 1750 gezählt, gleich $L+l_i$ sein, wo l_i der Betrag der Lunisolarpräcession in dem Zeitraume von 1750 bis $1750+t$ ist. Die Coordinaten des Sterns in Bezug auf die Ebene der Ecliptic für 1750 und den eben angenommenen Durchschnittspunkt werden also sein:

$$\cos B\cos(L+l_i),\ \cos B\sin(L+l_i)\ \text{und}\ \sin B.$$

Bezeichnen dann α und δ die Rectascension und Declination des Sterns, bezogen auf den Aequator und das wahre Aequinoctium für die Zeit $1750 + t$, so wird die Rectascension, von dem vorher angenommenen Durchschnittspunkt gezählt, $\alpha + a$ sein. Man hat also für die Coordinaten des Sterns in Bezug auf die Ebene des wahren Aequators und den angenommenen Durchschnittspunkt:

$$\cos\delta\cos(\alpha + a),\ \cos\delta\sin(\alpha + a) \text{ und } \sin\delta.$$

Da beide Coordinatenebenen den Winkel ε_0 mit einander bilden, so erhält man nach den Formeln (1) der Einleitung:

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos(\alpha + a) &= \cos B\cos(L + l_{,}) \\ \cos\delta\sin(\alpha + a) &= \cos B\sin(L + l_{,})\cos\varepsilon_0 - \sin B\sin\varepsilon_0 \qquad (C) \\ \sin\delta &= \cos B\sin(L + l_{,})\sin\varepsilon_0 + \sin B\cos\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Differenzirt man diese Formeln wieder, indem man L und B als constant betrachtet, so erhält man durch die Differentialformeln (11) der Einleitung, da hier im Dreiecke zwischen dem Pole der Ecliptic, dem des Aequators und dem Sterne $a = 90^0 - \delta$, $b = 90^0 - B$, $c = \varepsilon_0$, $A = 90^0 - (L + l_{,})$, $B = 90 + (\alpha + a)$:

$$\begin{aligned} d(\alpha + a) &= [\cos\varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0 \operatorname{tang}\delta\sin(\alpha + a)]\, dl_{,} - \cos(\alpha + a)\operatorname{tang}\delta\, d\varepsilon_0 \\ d\delta &= \cos(\alpha + a)\sin\varepsilon_0\, dl_{,} + \sin(\alpha + a)\, d\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Man hat also für die jährlichen Aenderungen der Rectascensionen und Declinationen der Sterne die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{da}{dt} + [\cos\varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0\operatorname{tang}\delta\sin\alpha]\frac{dl_{,}}{dt} \\ &\qquad + \left\{a\sin\varepsilon_0\frac{dl_{,}}{dt} - \frac{d\varepsilon_0}{dt}\right\}\operatorname{tang}\delta\cos\alpha, \\ \frac{d\delta}{dt} &= \cos\alpha\sin\varepsilon_0\frac{dl_{,}}{dt} - \left\{a\sin\varepsilon_0\frac{dl_{,}}{dt} - \frac{d\varepsilon_0}{dt}\right\}\sin\alpha, \end{aligned}$$

oder mit Vernachlässigung des sehr kleinen letzten Gliedes jeder Gleichung *):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{da}{dt} + [\cos\varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0\operatorname{tang}\delta\sin\alpha]\frac{dl_{,}}{dt}, \\ \frac{d\delta}{dt} &= \cos\alpha\sin\varepsilon_0 \,.\, \frac{dl_{,}}{dt}. \end{aligned}$$

---

*) Der numerische Werth des Coefficienten $a\sin\varepsilon_0\dfrac{dl_{,}}{dt} - \dfrac{d\varepsilon_0}{dt}$ ist $- 0.0000022471\, t$.

Setzt man hier:

$$\cos \varepsilon_0 \frac{dl_1}{dt} - \frac{da}{dt} = m,$$

$$\sin \varepsilon_0 \frac{dl_1}{dt} = n,$$

so erhält man einfach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \operatorname{tang} \delta \sin \alpha, \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

und für die numerischen Werthe von m und n, wenn man die Werthe von ε_0, $\frac{dl_1}{dt}$ und $\frac{da}{dt}$ substituirt:

$$m = 46''.02824 + 0''.0003086450\, t$$

$$n = 20''.06442 - 0''.0000970204\, t.$$

Um nun den Betrag der Präcession in Länge und Breite oder in Rectascension und Declination in dem Zeitraum von $1750 + t$ bis $1750 + t'$ zu erhalten, müſste man die Integrale der Gleichungen (B) oder (D) zwischen den Grenzen t und t' nehmen. Man kann indessen diesen Betrag auch bis auf die Glieder zweiter Ordnung inclusive aus dem Differentialquotienten für die Zeit $\frac{t+t'}{2}$ und der Zwischenzeit finden. Sind nämlich $f(t)$ und $f(t')$ zwei Functionen, deren Differenz $f(t') - f(t)$ man sucht, für diesen Fall also den Betrag der Präcession in der Zeit $t' - t$, so setze man:

$$\tfrac{1}{2}(t' + t) = x,$$

$$\tfrac{1}{2}(t' - t) = \Delta x.$$

Dann ist:

$$f(t) = f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \tfrac{1}{2} \Delta x^2 f''(x),$$

$$f(t') = f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \tfrac{1}{2} \Delta x^2 f''(x),$$

wo $f'(x)$ und $f''(x)$ die ersten und zweiten Differentialquotienten von $f(x)$ bezeichnen. Daraus erhält man aber:

$$f(t') - f(t) = 2 \Delta x f'(x) = (t' - t) f'\left(\frac{t + t'}{2}\right).$$

Um also die Präcession für einen Zeitraum $t' - t$ zu erhalten, hat man nur nöthig, den für das arithmetische Mittel der Zeiten geltenden Differentialquotienten zu berechnen und diesen mit der Zwischenzeit zu multipliciren. Dadurch sind dann auch die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt.

Sucht man nun z. B. den Betrag der Präcession in

Länge und Breite in der Zeit von 1750 bis 1850 für einen Stern, dessen Ort für 1750

$$\lambda = 210^\circ\ 0',\quad \beta = +34^\circ\ 0'$$

ist, so hat man die Werthe von $\frac{dl}{dt}$, $\frac{d\pi}{dt}$ und M für 1800:

$$\frac{dl}{dt} = 50''.22350,\quad \frac{d\pi}{dt} = 0''.48861,\quad M = 172^\circ\ 9'\ 20''.$$

Ferner erhält man, wenn man die Präcession von 1750 bis 1800 annähernd berechnet, für 1800:

$$\lambda = 210^\circ\ 42'.1,\quad \beta = +33^\circ\ 59'\ 8$$

und damit nach den Formeln (B) für 1800:

$$\frac{d\lambda}{dt} = +50''.48122,\quad \frac{d\beta}{dt} = -0''.30447,$$

also für den Betrag der Präcession von 1750 bis 1850:

in Länge $+1^\circ\ 24'\ 8''.12$ und in Breite $-30''.45$.

Will man ebenso den Betrag der Präcession in Rectascension und Declination für 1750 bis 1850 für einen Stern wissen, dessen Rectascension und Declination für 1750:

$$\alpha = 220^\circ\ 1'\ 24'',\quad \delta = +20^\circ\ 21'\ 15''$$

ist, so hat man für 1800:

$$m = 46''.04367,\quad n = 20''.05957,$$

ferner den genäherten Ort des Sterns für diese Zeit:

$$\alpha = 220^\circ\ 35'.8,\quad \delta = +20^\circ\ 8'.6$$

und erhält damit nach den Formeln (D):

$\tang \delta$	9.56444	$n \tang \delta \sin \alpha =$	$-\ \ 4.78806$
$\sin \alpha$	9.81340_n	$m =$	$+46.04367$
$\tang \delta \sin \alpha =$	9.37784_n	$\frac{d\alpha}{dt} =$	$+41.25561$
$n =$	1.30232		
$\cos \alpha =$	9.88042_n,	$\frac{d\delta}{dt} =$	-15.2314

also den Betrag der Präcession von 1750 bis 1850

in Rectascension $+1^\circ\ 8'\ 45''.56$ und in Declination $-25'\ 23''.14$.

In den Verzeichnissen der Sternörter ist gewöhnlich schon neben jedem Sterne die jährliche Präcession in Rectascension und Declination (variatio annua) für die Epoche des Catalogs und außerdem noch die Veränderung derselben in hundert Jahren (variatio saecularis) angeführt. Ist dann t_0 die Epoche des Catalogs, so ist die Präcession des Sterns während der Zeit $t - t_0$, nach dem Vorigen gleich:

$$\left\{\text{variatio annua} + \frac{t - t_0}{200}\,\text{variatio saecularis}\right\}(t - t_0).$$

Differenzirt man die Formeln:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{tang}\delta \sin\alpha,$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos\alpha,$$

indem man alle Gröfsen als variabel betrachtet und bezeichnet die jährlichen Aenderungen von m und n mit m' und n', so erhält man:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{n^2}{w}\sin 2\alpha\,[\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}\delta^2] + \frac{mn}{w}\operatorname{tang}\delta\cos\alpha + m' + n'\operatorname{tang}\delta\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{n^2}{w}\sin\alpha^2\,\operatorname{tang}\delta - \frac{mn}{w}\sin\alpha + n'\cos\alpha,$$

wo w die Zahl 206265 bezeichnet, und durch Multiplication mit 100 ergiebt sich hieraus die variatio saecularis in Rectascension und Declination. Für das obige Beispiel findet man hiernach die variatio saecularis:

in Rectascension $= + 0''.0286,$
in Declination $= + 0''.2654.$

3. Die eben gegebenen Differentialformeln reichen nicht aus, wenn man die Präcession für Sterne berechnen will, die dem Pole sehr nahe stehen. In diesem Falle mufs man sich der strengen Formeln bedienen.

Es sei die Länge und Breite λ und β eines Sterns, bezogen auf die Ecliptic und das Aequinoctium zur Zeit $1750 + t$, gegeben, so erhält man daraus die Länge und Breite L und B, bezogen auf die feste Ecliptic von 1750 durch die folgenden Gleichungen, welche unmittelbar aus den in No. 2 gegebenen Gleichungen (A) folgen:

$$\begin{aligned}\cos B\cos(L-\Pi) &= \cos\beta\cos(\lambda-\Pi-l)\\ \cos B\sin(L-\Pi) &= \cos\beta\sin(\lambda-\Pi-l)\cos\pi - \sin\beta\sin\pi\\ \sin B &= \cos\beta\sin(\lambda-\Pi-l)\sin\pi + \sin\beta\cos\pi.\end{aligned}$$

Sucht man dann die Länge und Breite λ' und β', bezogen auf die Ecliptic und das Aequinoctium zur Zeit $1750 + t'$, so erhält man diese aus L und B durch die folgenden Gleichungen, wenn man die für die Zeit t' geltenden Werthe von Π, π und l durch Π', π' und l' bezeichnet:

$$\begin{aligned}\cos\beta'\cos(\lambda'-\Pi'-l') &= \cos B\cos(L-\Pi')\\ \cos\beta'\sin(\lambda'-\Pi'-l') &= \cos B\sin(L-\Pi')\cos\pi' + \sin B'\sin\pi'\\ \sin\beta' &= -\cos B\sin(L-\Pi')\sin\pi' + \sin B'\cos\pi'.\end{aligned}$$

Eliminirt man B und L aus diesen Gleichungen, so er-

hält man λ' und β' unmittelbar durch λ und β und durch die Werthe von l, Π und π, zu den Zeiten t und t', ausgedrückt.

Für die Rectascension und Declination werden die strengen Gleichungen ganz ähnlich. Ist die Rectascension und Declination α und δ eines Sterns für die Zeit $1750+t$ gegeben, so erhält man daraus die Länge und Breite L und B, bezogen auf die feste Ecliptic von 1750 durch die Gleichungen*):

$$\cos B \cos (L + l_{,}) = \cos \delta \cos (\alpha + a)$$
$$\cos B \sin (L + l_{,}) = \cos \delta \sin (\alpha + a) \cos \varepsilon_0 + \sin \delta \sin \varepsilon_0$$
$$\sin B = -\cos \delta \sin (\alpha + a) \sin \varepsilon_0 + \sin \delta \cos \varepsilon_0.$$

Sucht man nun die Rectascension und Declination α' und δ' für die Zeit $1750+t'$, so erhält man diese aus L und B, wenn man die Werthe von $l_{,}$, a und ε_0 für die Zeit t' durch $l'_{,}$, a' und ε'_0 bezeichnet, durch die folgenden Gleichungen:

$$\cos \delta' \cos (\alpha' + a') = \cos B \cos (L + l'_{,})$$
$$\cos \delta' \sin (\alpha' + a') = \cos B \sin (L + l'_{,}) \cos \varepsilon'_0 - \sin B \sin \varepsilon'_0$$
$$\sin \delta' = \cos B \sin (L + l'_{,}) \sin \varepsilon'_0 + \sin B \cos \varepsilon'_0.$$

Eliminirt man aus beiden Systemen von Gleichungen die Gröſsen B und L, so erhält man, da:

$$\cos B \sin L = -\cos \delta \cos (\alpha + a) \sin l_{,} + \cos \delta \sin (\alpha + a) \cos \varepsilon \cos l_{,} + \sin \delta \sin \varepsilon_0 \cos l_{,}$$
$$\cos B \cos L = \cos \delta \cos (\alpha + a) \cos l_{,} + \cos \delta \sin (\alpha + a) \cos \varepsilon \sin l_{,} + \sin \delta \sin \varepsilon_0 \sin l_{,}$$
$$\sin B = -\cos \delta \cos (\alpha + a) \sin \varepsilon_0 + \sin \delta \cos \varepsilon_0$$

wie man leicht sieht, die folgenden Gleichungen:

$$\cos \delta' \cos (\alpha' + a') = \cos \delta \cos (\alpha + a) \cos (l'_{,} - l_{,}) - \cos \delta \sin (\alpha + a) \sin (l'_{,} - l_{,}) \cos \varepsilon_0 - \sin \delta \sin (l'_{,} - l_{,}) \sin \varepsilon_0$$
$$\cos \delta' \sin (\alpha' + a') = \cos \delta \cos (\alpha + a) \sin (l'_{,} - l_{,}) \cos \varepsilon'_0 + \cos \delta \sin (\alpha + a) [\cos (l'_{,} - l_{,}) \cos \varepsilon_0 \cos \varepsilon'_0 + \sin \varepsilon_0 \sin \varepsilon'_0] + \sin \delta [\cos (l'_{,} - l_{,}) \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon'_0 - \cos \varepsilon_0 \sin \varepsilon'_0]$$
$$\sin \delta' = \cos \delta \cos (\alpha + a) \sin (l'_{,} - l_{,}) \sin \varepsilon'_0 + \cos \delta \sin (\alpha + a) [\cos (l'_{,} - l_{,}) \cos \varepsilon_0 \sin \varepsilon'_0 - \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon'_0] + \sin \delta [\cos (l'_{,} - l_{,}) \sin \varepsilon_0 \sin \varepsilon'_0 + \cos \varepsilon_0 \cos \varepsilon'_0].$$

Denkt man sich nun ein sphärisches Dreieck, dessen drei Seiten $l'_{,} - l_{,}$, $90^0 - z$ und $90^0 + z'$ und dessen den drei Seiten gegenüberliegende Winkel beziehlich Θ, ε'_0 und $180^0 - \varepsilon_0$ sind, so lassen sich die Coefficienten der vorigen Gleichungen,

---

*) Man findet diese Gleichungen aus den Gleichungen (C) in No. 2.

welche $l'_{\prime} - l_{\prime}$, ε_0 und ε'_0 enthalten, durch Θ, z und z' ausdrücken und man findet dann:

$$\begin{aligned}
\cos\delta' \cos(\alpha' + a') &= \cos\delta \cos(\alpha + a)\,[\cos\Theta \cos z \cos z' - \sin z \sin z'] \\
&\quad - \cos\delta \sin(\alpha + a)\,[\cos\Theta \sin z \cos z' + \cos z \sin z'] \\
&\quad - \sin\delta \sin\Theta \cos z' \\
\cos\delta' \sin(\alpha' + a') &= \cos\delta \cos(\alpha + a)\,[\cos\Theta \cos z \sin z' + \sin z \cos z'] \\
&\quad - \cos\delta \sin(\alpha + a)\,[\cos\Theta \sin z \sin z' - \cos z \cos z'] \\
&\quad - \sin\delta \sin\Theta \sin z' \\
\sin\delta' &= \cos\delta \cos(\alpha + a) \sin\Theta \cos z \\
&\quad - \cos\delta \sin(\alpha + a) \sin\Theta \sin z \\
&\quad + \sin\delta \cos\Theta.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin z'$, die zweite mit $\cos z'$ und subtrahirt erstere, multiplicirt dann die erste mit $\cos z'$, die zweite mit $\sin z'$ und addirt die Producte, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\cos\delta' \sin(\alpha' + a' - z') &= \cos\delta \sin(\alpha + a + z) \\
\cos\delta' \cos(\alpha' + a' - z') &= \cos\delta \cos(\alpha + a + z) \cos\Theta - \sin\delta \sin\Theta \qquad (a). \\
\sin\delta' &= \cos\delta \cos(\alpha + a + z) \sin\Theta + \sin\delta \cos\Theta
\end{aligned}$$

Diese Formeln geben unmittelbar α' und δ' durch α, δ, a, a' und die Hülfsgröſsen z, z' und Θ ausgedrückt. Letztere findet man aber, wenn man auf das eben betrachtete sphärische Dreieck die Gauſsischen Formeln anwendet. Dann ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\Theta \cos\tfrac{1}{2}(z' - z) &= \sin\tfrac{1}{2}(l'_{\prime} - l_{\prime}) \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_0 + \varepsilon_0) \\
\sin\tfrac{1}{2}\Theta \sin\tfrac{1}{2}(z' - z) &= \cos\tfrac{1}{2}(l'_{\prime} - l_{\prime}) \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_0 - \varepsilon_0) \\
\cos\tfrac{1}{2}\Theta \sin\tfrac{1}{2}(z' + z) &= \sin\tfrac{1}{2}(l'_{\prime} - l_{\prime}) \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_0 + \varepsilon_0) \\
\cos\tfrac{1}{2}\Theta \cos\tfrac{1}{2}(z' + z) &= \cos\tfrac{1}{2}(l'_{\prime} - l_{\prime}) \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_0 - \varepsilon_0).
\end{aligned}$$

Hier wird es nun immer erlaubt sein, $\sin\frac{1}{2}(z' - z)$ und $\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'_0 - \varepsilon_0)$ mit dem Bogen zu vertauschen und die entsprechenden Cosinus gleich Eins zu setzen, sodaſs man für die Berechnung der drei Hülfsgröſsen die einfachen Formeln erhält:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z' + z) &= \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_0 + \varepsilon_0) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(l'_{\prime} - l_{\prime}) \\
\tfrac{1}{2}(z' - z) &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon'_0 - \varepsilon_0) \frac{\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}(l'_{\prime} - l_{\prime})}{\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_0 + \varepsilon_0)} \qquad (A). \\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta &= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varepsilon'_0 + \varepsilon_0) \sin\tfrac{1}{2}(z' + z).
\end{aligned}$$

Die Formeln (a) kann man durch Einführung eines Hülfswinkels für die Rechnung bequemer einrichten oder auch statt derselben ein anderes System von Gleichungen benutzen, welches man ebenfalls durch die Gauſsischen Gleichungen erhält. Man findet nämlich die Formeln (a), wenn man die drei Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie

auf ein sphärisches Dreieck anwendet, dessen drei Seiten $90^0 - \delta'$, $90^0 - \delta$ und Θ sind und wo den beiden ersteren Seiten die Winkel $\alpha' + a + z$ und $180^0 - \alpha' - a' + z'$ gegenüberstehen. Wendet man statt dessen die Gaufsischen Formeln an, so erhält man, wenn man den dritten Winkel mit c bezeichnet und der Kürze wegen $\alpha + a + z = A$ und $\alpha' + a' - z' = A'$ setzt:

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}(90^0 + \delta')\cos\tfrac{1}{2}(A' + c) &= \cos\tfrac{1}{2}[90^0 + \delta + \Theta]\cos\tfrac{1}{2}A \\
\cos\tfrac{1}{2}(90 + \delta')\sin\tfrac{1}{2}(A' + c) &= \cos\tfrac{1}{2}[90 + \delta - \Theta]\sin\tfrac{1}{2}A \\
\sin\tfrac{1}{2}(90 + \delta')\cos\tfrac{1}{2}(A' - c) &= \sin\tfrac{1}{2}[90 + \delta + \Theta]\cos\tfrac{1}{2}A \\
\sin\tfrac{1}{2}(90 + \delta')\sin\tfrac{1}{2}(A' - c) &= \sin\tfrac{1}{2}[90 + \delta - \Theta]\sin\tfrac{1}{2}A.
\end{aligned} \qquad (b)$$

Genauer verfährt man noch, wenn man nicht die Gröfse A' selbst, sondern nur den Unterschied $A' - A$ sucht. Man erhält aber, wenn man die erste der Gleichungen (a) mit $\cos A$, die zweite mit $\sin A$ multiplicirt und beide von einander abzieht, und wenn man ferner die erste Gleichung mit $\sin A$, die zweite mit $\cos A$ multiplicirt und die Producte addirt:

$$\cos\delta'\sin(A' - A) = \cos\delta\sin A\sin\Theta\,[\tang\delta + \tang\tfrac{1}{2}\Theta\cos A]$$
$$\cos\delta'\cos(A' - A) = \cos\delta - \cos\delta\cos A\sin\Theta\,[\tang\delta + \tang\tfrac{1}{2}\Theta\cos A],$$

also:

$$\tang(A' - A) = \frac{\sin A\sin\Theta\,[\tang\delta + \tang\tfrac{1}{2}\Theta\cos A]}{1 - \cos A\sin\Theta\,[\tang\delta + \tang\tfrac{1}{2}\Theta\cos A]}$$

und durch die Gaufsischen Formeln findet man:

$$\cos\tfrac{1}{2}c\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}(A' + A)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}c\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \cos\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}(A' - A).$$

Setzt man also:

$$p = \sin\Theta\,[\tang\delta + \tang\tfrac{1}{2}\Theta\cos A] \qquad (B),$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned}
\tang(A' - A) &= \frac{p\sin A}{1 - p\cos A} \\
&\text{und} \\
\tang\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) &= \tang\tfrac{1}{2}\Theta\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A' + A)}{\cos\tfrac{1}{2}(A' - A)}
\end{aligned}\right\} \qquad (C).$$

Die strenge Berechnung der Rectascension und Declination eines Sterns für die Zeit $1750 + t'$ aus der Rectascension und Declination desselben für die Zeit $1750 + t$, ist somit auf die Berechnung der Formeln (A), (B) und (C) zurückgeführt.

Beispiel. Die Rectascension und Declination des Polarsterns für den Anfang des Jahres 1755 ist:

$$\alpha = 10^0\,55'\,44''.955$$

und

$$\delta = 87^0\,59'\,41''.12.$$

Soll man nun hieraus den Ort, bezogen auf den Aequator und das Aequinoctium von 1850, berechnen, so hat man:

$$l_{,} = 4' 11''.8756 \qquad l'_{,} = 1^{0} 23' 56''.3541$$
$$a = 0''.8897 \qquad a' = 15''.2656$$
$$\varepsilon_0 = 23^{0} 28' 18''.0002 \qquad \varepsilon'_0 = 23^{0} 28' 18''.0984.$$

Damit erhält man aus den Formeln (A):

$$\tfrac{1}{2}(z' + z) = 0^{0} 36' 34''.314 \qquad \tfrac{1}{2}(z' - z) = 10''.6286$$

also:

$$z = 0^{0} 36' 23''.685$$
$$z' = 0^{0} 36' 44''.943$$

und:

$$\Theta = 0^{0} 31' 45''.600$$

mithin:

$$A = \alpha + a + z = 11^{0} 32' 9''.530.$$

Berechnet man dann nach den Formeln (B) und (C) die Werthe von $A' - A$ und $\delta' - \delta$, so findet man:

$$\log p = 9.4214471$$

und:

$$A' - A = 4^{0} 4' 17''.710, \quad \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = 0^{0} 15' 26''.780$$

also:

$$A' = 15^{0} 36' 27''.240$$

und daraus endlich:

$$\alpha' = 16^{0} 12' 56''.917$$
$$\delta' = 88 \quad 30 \quad 34 \,.\, 680.$$

4. Da der Durchschnittspunkt des Aequators mit der Ecliptic auf letzterer jährlich um etwa 50″.2 zurückgeht, so wird der Pol des Aequators um den Pol der Ecliptic im Laufe der Zeit einen Kreis beschreiben, dessen Halbmesser gleich der Schiefe der Ecliptic ist*). Der Pol des Aequators wird daher immer mit anderen Punkten der scheinbaren Himmelskugel zusammentreffen, oder es werden zu verschiedenen Zeiten auch verschiedene Sterne in der Nähe desselben stehen. In unsern Zeiten ist der letzte Stern im Schwanze des kleinen Bären (α Ursae minoris) der nächste am nördlichen Weltpole und heifst daher auch der Polarstern. Dieser Stern, dessen Declination jetzt $88\frac{1}{2}^{0}$ beträgt, wird sich dem Pole noch immer mehr nähern, bis seine Rectascension (jetzt 17^{0}) gleich 90^{0}

---

*) Genau genommen ist dieser Halbmesser nicht constant, sondern gleich der jedesmaligen Schiefe der Ecliptic.

geworden ist. Dann wird die Declination ihr Maximum, nämlich 89° 32′, erreicht haben und von da wieder abnehmen, weil die Präcession in Declination für Sterne, deren Rectascension im zweiten Quadranten liegt, negativ ist.

Um nun den Ort des Weltpoles für jede Zeit t finden zu können, betrachte man das sphärische Dreieck zwischen dem Pole der Ecliptic für eine bestimmte Zeit t_0 und den Polen des Aequators zu den Zeiten t_0 und t, P und P'. Bezeichnet man dann die Rectascension und Declination des Weltpoles zur Zeit t in Bezug auf den Aequator und das Aequinoctium zur Zeit t_0 mit α und δ, die Schiefe der Ecliptic zur Zeit t_0 und t mit ε_0 und ε, so ist die Seite $PP' = 90^0 - \delta$, $EP = \varepsilon_0$ $EP' = \varepsilon$, der Winkel an $P = 90^0 + \alpha$ und der Winkel an E gleich der allgemeinen Präcession in dem Zeitraum $t - t_0$ und man hat daher nach den drei Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos\delta \sin\alpha = \sin\varepsilon \cos\varepsilon_0 \cos l - \cos\varepsilon \sin\varepsilon_0$$
$$\cos\delta \cos\alpha = \sin\varepsilon \sin l$$
$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\varepsilon_0 \cos l + \cos\varepsilon \cos\varepsilon_0.$$

Da diese Berechnung keine grofse Genauigkeit erfordert, sondern der Ort des Poles immer nur beiläufig gesucht wird, überdies auch die Abnahme der Schiefe nur in kurzen Zeiträumen als der Zeit proportional angesehen werden kann, da sie eigentlich eine Periode von freilich sehr langer Dauer hat, so kann man sich erlauben $\varepsilon = \varepsilon_0$ zu setzen und erhält dann einfach:

$$\operatorname{tang}\alpha = -\cos\varepsilon_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2} l$$

und:

$$\cos\delta = \frac{\sin\varepsilon_0 \sin l}{\cos\alpha}.$$

Wiewohl hier α durch die Tangente gefunden wird, so erhält man doch den Werth von α ohne alle Zweideutigkeit, da derselbe zugleich die Bedingung erfüllen mufs, dafs $\cos\alpha$ und $\sin l$ dasselbe Zeichen haben.

Wollte man z. B. den Ort des Weltpoles für das Jahr 14000 kennen und zwar bezogen auf das Aequinoctium von 1850, so hat man die allgemeine Präcession während der 12150 Jahre etwa gleich 174°, also wird:

$$\alpha = 273^0\, 16' \text{ und } \delta = +43^0\, 7'.$$

Dies ist sehr nahe der Ort von α Lyrae, dessen Rectascension und Declination für 1850:

$$\alpha = 277^0\ 58' \text{ und } \delta = +38^0\ 39'$$

ist. Im Jahre 14000 wird also dieser Stern auf den Namen des Polarsterns Anspruch machen können.

Wegen der Veränderung der Declinationen der Sterne durch die Präcession werden auch im Laufe der Zeiten Sterne über den Horizont eines Ortes kommen, welche früher daselbst nie sichtbar waren, andre Sterne, welche jetzt z. B. an einem Orte auf der nördlichen Halbkugel der Erde sichtbar sind, werden dagegen eine so südliche Declination erhalten, dafs sie für diesen Ort nie mehr aufgehen. Auf gleiche Weise werden Sterne, welche jetzt für diesen Ort immer über dem Horizonte verweilen, anfangen auf- und unterzugehen, während wiederum andre Sterne eine so nördliche Declination erreichen, dafs sie auch in ihrer unteren Culmination über dem Horizonte bleiben. Der Anblick der Himmelskugel an einem Orte der Erde wird also durch die Präcession nach grofsen Zeiträumen beträchtlich verändert.

In den neuesten Sonnentafeln ist das siderische Jahr oder die siderische Umlaufszeit der Sonne, d. h. die Zeit, welche die Sonne braucht, um an der scheinbaren Himmelskugel volle 360^0 zu durchlaufen, oder die Zeit, in welcher sie wieder zu demselben Fixsterne zurückkehrt, zu 365 Tagen 6 Stunden 9 Minuten und $9''.35$ oder zu 365.2563582 mittleren Tagen angegeben. Da nun die Aequinoctialpunkte sich rückwärts, d. h. der Sonne entgegen bewegen, so wird das tropische Jahr oder die Zeit, welche die Sonne braucht, um wieder zu demselben Aequinoctium zurückzukehren, kürzer als das siderische Jahr sein und zwar um die Zeit, in welcher die Sonne den kleinen Bogen, der gleich der jährlichen Präcession ist, durchläuft. Es ist aber für das Jahr 1800 $l = 50''.2235$, und da die mittlere Bewegung der Sonne $59'\ 8''.33$ beträgt, so erhält man für diese Zeit 0.014154 Tage, mithin für die Länge des tropischen Jahres 365.242204 Tage. Da nun aber die Präcession veränderlich ist und die jährliche Zunahme derselben $0''.0002442966$ beträgt, so ist auch das tropische Jahr veränderlich und die jährliche Veränderung desselben gleich 0.000000068848 Tagen. Drückt man

die Decimaltheile in Stunden, Minuten und Secunden aus, so erhält man also für die Länge des tropischen Jahres:

$$365 \text{ Tage } 5^h\, 48^m\, 46^s.42 - 0^s.00595\,(t-1800).$$

II. Die Nutation.

5. Bisher ist die periodische Aenderung des Aequators gegen die Ecliptic unberücksichtigt geblieben, die, wie vorher erwähnt, in einer periodischen Bewegung der Durchschnittspunkte des Aequators und der Ecliptic auf letzterer und in einer periodischen Aenderung der Schiefe besteht. Die erstere wird die Nutation in Länge, die andre die Nutation der Schiefe genannt. Der Punkt, in welchem der Aequator und die Ecliptic einander schneiden würden, wenn die Nutation nicht vorhanden wäre, sondern nur die vorher betrachteten langsamen Aenderungen stattfänden, heiſst das mittlere Aequinoctium, die Schiefe der Ecliptic, die dann stattfinden würde, die mittlere Schiefe der Ecliptic. Dagegen heiſst der Punkt, in welchem der Aequator die Ecliptic wirklich durchschneidet, das wahre Aequinoctium, und die in Folge der Nutation stattfindende Schiefe die wahre Schiefe der Ecliptic.

Die Ausdrücke für die Nutation in Länge und Schiefe sind nun nach den neuesten Bestimmungen von Peters in seinem Werke „Numerus constans nutationis“:

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda = &- 17''.2405 \sin \text{☊} + 0''.2073 \sin 2\,\text{☊} \\
&- \;1''.2692 \sin 2\odot - 0''.2041 \sin 2\,\text{☾} \\
&+ \;0''.1279 \sin(\odot - P) - 0''.0213 \sin(\odot + P) \\
&+ \;0''.0677 \sin(\text{☾} - P') \qquad\qquad (A) \\
\Delta\varepsilon = &+ \;9''.2231 \cos \text{☊} - 0''.0897 \cos 2\,\text{☊} \\
&+ \;0''.5509 \cos 2\odot + 0''.0886 \cos 2\,\text{☾} \\
&+ \;0''.0093 \cos(\odot + P),
\end{aligned}$$

wo ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ecliptic, $\odot$ und ☾ die Längen der Sonne und des Mondes, P und P' die Längen des Perihels der Sonne und des Perigeums der Mondbahn bezeichnen. Die obigen Ausdrücke gelten für 1800, die Coefficienten der einzelnen Glie-

der sind aber mit der Zeit ein wenig veränderlich, und man hat für 1900:

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda = & - 17''.2577 \sin \Omega + 0''.2073 \sin 2\Omega \\
& - \;\; 1''.2693 \sin 2 \odot - 0''.2041 \sin 2 ☾ \\
& + \;\; 0''.1275 \sin(\odot - P) - 0''.0213 \sin(\odot + P) \\
& + \;\; 0''.0677 \sin(☾ - P') \qquad (A_1) \\
\Delta\varepsilon = & + \;\; 9''.2240 \cos \Omega - 0''.0896 \cos 2\Omega \\
& + \;\; 0''.5506 \cos 2 \odot + 0''.0885 \cos 2 ☾ \\
& + \;\; 0''.0092 \cos(\odot + P).
\end{aligned}$$

Um nun die hieraus entstehenden Aenderungen der Rectascensionen und Declinationen der Sterne zu finden, hat man:

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{d\alpha}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right)\Delta\lambda^2 + \left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda . d\varepsilon}\right)\Delta\lambda\,\Delta\varepsilon + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{d\varepsilon^2}\right)\Delta\varepsilon^2 + \ldots$$

und: (a)

$$\delta' - \delta = \frac{d\delta}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{d\delta}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{d\lambda^2}\right)\Delta\lambda^2 + \left(\frac{d^2\delta}{d\lambda . d\varepsilon}\right)\Delta\lambda\,\Delta\varepsilon + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{d\varepsilon^2}\right)\Delta\varepsilon^2 + \ldots$$

Man hat aber nach den Differentialformeln in No. 11 des ersten Abschnitts, wenn man für $\cos\beta \sin\eta$ und $\cos\beta \cos\eta$ die dort gefundenen Ausdrücke durch α, δ und ε setzt:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \cos\varepsilon + \sin\varepsilon \operatorname{tang}\delta \sin\alpha \qquad \frac{d\delta}{d\lambda} = \cos\alpha \sin\varepsilon$$

$$\frac{d\alpha}{d\varepsilon} = - \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \qquad \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \sin\alpha,$$

woraus man durch weitere Differentiation erhält:

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right) = \sin\varepsilon^2 \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \operatorname{cotang}\varepsilon \cos\alpha \operatorname{tang}\delta + \sin 2\alpha \operatorname{tang}\delta^2\right]$$

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda . d\varepsilon}\right) = - \sin\varepsilon \left[\cos\alpha^2 - \operatorname{cotang}\varepsilon \operatorname{tang}\delta \sin\alpha + \operatorname{tang}\delta^2 \cos 2\alpha\right]$$

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\varepsilon^2}\right) = - \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tang}\delta^2\right]$$

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\lambda^2}\right) = - \sin\varepsilon^2 \sin\alpha \left[\operatorname{cotang}\varepsilon + \operatorname{tang}\delta \sin\alpha\right]$$

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\lambda . d\varepsilon}\right) = \sin\varepsilon \cos\alpha \left[\operatorname{cotang}\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tang}\delta\right]$$

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\varepsilon^2}\right) = - \cos\alpha^2 \operatorname{tang}\delta.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (a) und setzt für $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ die vorher gegebenen Werthe aus den Gleichungen (A) und für ε die mittlere Schiefe der Ecliptic für den Anfang des Jahres $1800 = 23^0\,27'\,54''.2$, so werden die Glieder erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\alpha'-\alpha = & -15''.8148 \sin \Omega - [6''.8650 \sin \Omega \sin \alpha + 9''.2231 \cos \Omega \cos \alpha] \operatorname{tang} \delta \\
& + 0''.1902 \sin 2\Omega + [0''.0825 \sin 2\Omega \sin \alpha + 0''.0897 \cos 2\Omega \cos \alpha] \operatorname{tang} \delta \\
& - 1''.1642 \sin 2\odot - [0''.5054 \sin 2\odot \sin \alpha + 0''.5509 \cos 2\odot \cos \alpha] \operatorname{tang} \delta \\
& - 0''.1872 \sin 2 ☾ - [0''.0813 \sin 2 ☾ \sin \alpha + 0''.0886 \cos 2 ☾ \cos \alpha] \operatorname{tang} \delta \\
& - 0''.0195 \sin (\odot + P) \\
& - [0''.0085 \sin (\odot + P) \sin \alpha + 0''.0093 \cos (\odot + P) \cos \alpha] \operatorname{tang} \delta \qquad (B) \\
& + [0''.0621 + 0''.0270 \sin \alpha \operatorname{tang} \delta] \sin (☾ - P') \\
& + [0''.1173 + 0''.0509 \sin \alpha \operatorname{tang} \delta] \sin (\odot - P),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta'-\delta = & - 6''.8650 \sin \Omega \cos \alpha + 9''.2231 \cos \Omega \sin \alpha \\
& + 0''.0825 \sin 2\Omega \cos \alpha - 0''.0897 \cos 2\Omega \sin \alpha \\
& - 0''.5054 \sin 2\odot \cos \alpha + 0''.5509 \cos 2\odot \sin \alpha \qquad (C) \\
& - 0''.0813 \sin 2 ☾ \cos \alpha + 0''.0886 \cos 2 ☾ \sin \alpha \\
& - 0''.0085 \sin (\odot + P) \cos \alpha + 0''.0093 \cos (\odot + P) \sin \alpha \\
& + 0''.0270 \cos \alpha \sin (☾ - P') \\
& + 0''.0509 \cos \alpha \sin (\odot - P).
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke gelten für 1800; für 1900 ändern sich dieselben ein wenig, doch ist die Aenderung nur bei den ersten von Ω abhängigen Gliedern von einiger Bedeutung. Diese werden

in $\alpha'-\alpha$: $\quad -15''.8321 \sin \Omega - [6''.8683 \sin \Omega \sin \alpha + 9''.2240 \cos \Omega \cos \alpha] \operatorname{tang} \delta$

in $\delta'-\delta$: $\quad - 6''.8683 \sin \Omega \cos \alpha + 9''.2240 \cos \Omega \sin \alpha$.

Von den Gliedern der zweiten Ordnung können nur diejenigen von einiger Bedeutung sein, welche aus dem gröfsten Gliede in $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ entstehen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\Delta\varepsilon = 9''.2231 \cos \Omega = a \cos \Omega$$

und $\quad -\sin \varepsilon \, \Delta\lambda = 6''.8650 \sin \Omega = b \sin \Omega$,

so geben diese Glieder in Rectascension:

$$\begin{aligned}
\alpha'-\alpha = & \frac{b^2-a^2}{4} \sin 2\alpha \, [\operatorname{tang} \delta^2 + \tfrac{1}{2}] + \frac{b^2}{4} \operatorname{tang} \delta \cos \alpha \operatorname{cotang} \varepsilon \\
& + [\tfrac{1}{2} - \operatorname{cotang} \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tang} \delta + \operatorname{tang} \delta^2 \cos 2\alpha + \tfrac{1}{2} \cos 2\alpha] \frac{ab}{2} \sin 2\Omega \\
& - \left\{ \frac{b^2+a^2}{4} \operatorname{tang} \delta^2 \sin 2\alpha + \frac{b^2}{4} \operatorname{tang} \delta \cos \alpha \operatorname{cotg} \varepsilon + \frac{b^2+a^2}{8} \sin 2\alpha \right\} \cos 2\Omega
\end{aligned}$$

und in Declination:

$$\begin{aligned}
\delta'-\delta = & - \left\{ \frac{a^2+b^2}{8} + \frac{a^2-b^2}{8} \cos 2\alpha \right\} \operatorname{tang} \delta - \frac{b^2}{4} \sin \alpha \operatorname{cotang} \varepsilon \\
& - [\operatorname{tang} \delta \sin 2\alpha + 2 \operatorname{cotang} \varepsilon \cos \alpha] \frac{ab}{4} \sin 2\Omega \\
& - \left\{ \left(\frac{a^2-b^2}{8} + \frac{a^2+b^2}{8} \cos 2\alpha \right) \operatorname{tang} \delta - \frac{b^2}{4} \sin \alpha \operatorname{cotang} \varepsilon \right\} \cos 2\Omega.
\end{aligned}$$

Von diesen Gliedern verändern die von Ω unabhängi-

gen nur den mittleren Ort der Sterne und können deshalb vernachlässigt werden. Ein andrer Theil, nämlich:

$$\frac{ab}{4}\sin 2\Omega - \left(\frac{ab}{2}\,\mathrm{cotang}\,\varepsilon\sin\alpha\sin 2\Omega + \frac{b^2}{4}\,\mathrm{cotang}\,\varepsilon\cos\alpha\cos 2\Omega\right)\mathrm{tang}\,\delta$$

und:

$$-\frac{ab}{2}\,\mathrm{cotang}\,\varepsilon\sin 2\Omega\cos\alpha + \frac{b^2}{4}\,\mathrm{cotang}\,\varepsilon\sin\alpha\cos 2\Omega$$

verbindet sich mit den ähnlichen, in $\sin 2\Omega$ und $\cos 2\Omega$ multiplicirten Gliedern der ersten Ordnung, sodafs diese werden:

in Rectascension

$$+0''.1902\sin 2\Omega + [0''.0822\sin 2\Omega\sin\alpha + 0''.0896\cos 2\Omega\cos\alpha]\,\mathrm{tang}\,\delta$$

und in Declination (*D*)

$$+0''.0822\sin 2\Omega\cos\alpha - 0''.0896\cos 2\Omega\sin\alpha.$$

Die dann noch übrigen Glieder der zweiten Ordnung sind die folgenden:

in Rectascension

$$+0''.0001535\,[\mathrm{tang}\,\delta^2 + \tfrac{1}{2}]\sin 2\Omega\cos 2\alpha$$
$$-0''.000160\;\;[\mathrm{tang}\,\delta^2 + \tfrac{1}{2}]\cos 2\Omega\sin 2\alpha$$

und in Declination (*E*)

$$-0''.0000768\,\mathrm{tang}\,\delta\sin 2\alpha\sin 2\Omega$$
$$-[0''.000023 + 0''.000080\cos 2\alpha]\,\mathrm{tang}\,\delta\cos 2\Omega.$$

Da aber die ersteren Glieder erst für die Declination 88° 10′ den Werth $0^s.01$ in Zeit, die andern erst für die Declination 89° 26′ den Werth 0″.01 in Bogen erhalten, so haben dieselben selbst in unmittelbarer Nähe am Pole geringen Einflufs und sind daher aufser für solche Sterne in der Nähe des Pols immer zu vernachlässigen.

6. Im Folgenden werden die Aenderungen gebraucht, die in den Ausdrücken (*B*) und (*C*) durch eine Aenderung der Nutationsconstante, d. h. des Coefficienten von $\cos\Omega$ in der Nutation der Schiefe verursacht werden und die für die Glieder der Lunar- und der Solarnutation verschieden sind. In der durch die Theorie gegebenen Formel für die Nutation sind nämlich alle Glieder der Lunarnutation in einen Factor N' multiplicirt, der von den Trägheitsmomenten der Erde, sowie der Masse und der mittleren Bewegung des Mondes abhängt, während die Glieder der Solarnutation in einen ähnlichen Factor N multiplicirt sind, der dieselbe Function der Trägheitsmomente der Erde, der Masse und mittleren Bewegung

der Sonne ist. Da es nicht möglich ist die Trägheitsmomente der Erde zu berechnen, so müssen die numerischen Werthe von N und N' aus den Beobachtungen bestimmt werden. Der Coefficient des in $\sin \Omega$ multiplicirten Gliedes der Nutation der Schiefe ist gleich $0.765428\, N'$. Setzt man dies gleich $9''.2231\,(1+i)$, wo $9''.2231$ der aus den Beobachtunden folgende Werth der Nutationsconstante, $9''.2231\, i$ die mögliche Verbesserung desselben ist, so ist also:

$$0.765428\, N' = 9''.2231\,(1+i).$$

Die Lunisolarpräcession hängt aber von denselben Gröfsen N und N' ab und der aus den Beobachtungen bestimmte Werth derselben ($50''.36354$ für 1800) giebt die folgende Gleichung zwischen N und N':

$$17.469345 = N + 0.991988\, N',$$

woraus in Verbindung mit der vorigen Gleichung folgt:

$$N = 5.516287\,(1 - 2.16687\, i).$$

Setzt man daher die Nutationsconstante gleich $9''.2231\,(1+i)$, so müssen alle Glieder der Lunarnutation mit $1+i$, dagegen alle Glieder der Solarnutation mit $1-2.16687\, i$ multiplicirt werden, und wenn man $9''.2235\, i = d\nu$ setzt, so wird:

$$d\Delta\lambda = \left\{ \begin{array}{l} -1.8702 \sin\Omega + 0.0225 \sin 2\Omega - 0.0221 \sin 2☾ + 0.0073 \sin(☾ - P') \\ + 0.2981 \sin 2\odot - 0.0300 \sin(\odot - P) + 0.0050 \sin(\odot + P) \end{array} \right\} d\nu$$

$$d\Delta\varepsilon = [\cos\Omega - 0.0097 \cos 2\Omega + 0.0096 \cos 2☾ - 0.1294 \cos 2\odot - 0.0022 \cos(\odot + P)]\, d\nu$$

und hieraus erhält man leicht auf demselben Wege wie in der vorigen Nummer:

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha' - \alpha)}{d\nu} = & -1.7156 \sin\Omega - [0.7445 \sin\Omega \sin\alpha + 1.0000 \cos\Omega \cos\alpha] \tan\delta \\ & + 0.0206 \sin 2\Omega + [0.0090 \sin 2\Omega \sin\alpha + 0.0097 \cos 2\Omega \cos\alpha] \tan\delta \\ & - 0.0203 \sin 2☾ - [0.0088 \sin 2☾ \sin\alpha + 0.0096 \cos 2☾ \cos\alpha] \tan\delta \\ & + 0.0067 \sin(☾ - P') + [0.0029 \sin(☾ - P') \sin\alpha] \tan\delta \\ & + 0.2735 \sin 2\odot + [0.1187 \sin 2\odot \sin\alpha + 0.1294 \cos 2\odot \cos\alpha] \tan\delta \\ & - 0.0275 \sin(\odot - P) - [0.0119 \sin(\odot - P) \sin\alpha] \tan\delta \\ & + 0.0046 \sin(\odot + P) + [0.0020 \sin(\odot + P) \sin\alpha + \\ & \qquad + 0.0022 \cos(\odot + P) \cos\alpha] \tan\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta' - \delta)}{d\nu} = & -0.7445 \sin\Omega \cos\alpha + 1.0000 \cos\Omega \sin\alpha \\ & + 0.0090 \sin 2\Omega \cos\alpha - 0.0097 \cos 2\Omega \sin\alpha \\ & - 0.0088 \sin 2☾ \cos\alpha + 0.0096 \cos 2☾ \sin\alpha \\ & + 0.0029 \sin(☾ - P') \cos\alpha \\ & + 0.1187 \sin 2\odot \cos\alpha - 0.1294 \cos 2\odot \sin\alpha \\ & - 0.0119 \sin(\odot - P) \cos\alpha \\ & + 0.0020 \sin(\odot + P) \sin\alpha - 0.0022 \cos(\odot + P) \sin\alpha. \end{aligned}$$

7. Für die Berechnung der Nutation in Rectascension und Declination ist es am bequemsten, nach den Formeln (A) und (A_1) $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ und die numerischen Werthe der Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{d\lambda}$, $\frac{d\alpha}{d\varepsilon}$, etc. zu berechnen. Man hat aber auch für die Formeln (B) und (C) Tafeln eingerichtet, wodurch deren Berechnung sehr erleichtert wird. Zuerst hat man die Glieder

$$-15''.82 \sin \Omega = c \quad \text{und} \quad -1''.16 \sin 2\odot = g$$

in Tafeln gebracht, deren Argumente Ω und $2\odot$ sind.

Die einzelnen in $\tang \delta$ multiplicirten Glieder für Rectascension haben nun die Form:

$$a \cos\beta \cos\alpha + b \sin\beta \sin\alpha = A\,[h \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha].$$

Einem jeden Ausdrucke von dieser Form kann man aber immer die folgende Gestalt geben, nämlich:

$$x \cos[\beta - \alpha + y],$$

wenn man nur die Gröſsen x und y gehörig bestimmt. Entwickelt man aber den letzteren Ausdruck und vergleicht denselben mit dem vorigen, so erhält man für die Bestimmung von x und y die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\,h \cos\beta &= x\,[\cos\beta \cos y - \sin\beta \sin y] \\ A \sin\beta &= x\,[\sin\beta \cos y + \cos\beta \sin y] \end{aligned} \qquad (b),$$

woraus man für x und y die Werthe erhält:

$$x^2 = A^2\,[1 - (1 - h^2) \cos\beta^2]$$

und:

$$\tang y = \frac{(1-h) \sin\beta \cos\beta}{1 - (1-h) \cos\beta^2},$$

wo der Ausdruck für x immer möglich ist, solange, wie es hier der Fall ist, $1 - h^2 < 1$ ist. Bringt man dann die Gröſsen x und y in Tafeln, deren Argument β ist, so erhält man das von β abhängige, in $\tang\delta$ multiplicirte Glied der Nutation in Rectascension aus:

$$x \cos[\beta + y - \alpha]$$

während:

$$x \sin[\beta + y - \alpha] \qquad (c),$$

das von β abhängige Glied der Nutation in Declination giebt. Die Glieder der Declination haben nämlich die Form:

$$A\,[-h \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha],$$

woraus man, wenn man dies gleich $x \sin[\beta + y - \alpha]$ setzt, zur Bestimmung von x und y dieselben Gleichungen (b) erhält.

Solche Tafeln sind von Nicolai berechnet und in Warnstorff's Hülfstafeln gegeben. Man findet dort aufser dem Gliede c die Gröfsen $\log b$ und B mit dem Argumente ☊ und erhält daraus die von sin ☊ und cos ☊ abhängigen Glieder, die für Rectascension:

$$c - b \operatorname{tang} \delta \cos (☊ + B - \alpha)$$

und für Declination: (d)

$$- b \sin (☊ + B - \alpha)$$

sind. Dieser Theil der Nutation nebst den kleinen von 2☊, 2☾ und (☾ — P') abhängigen Gliedern, ist die Lunarnutation.

Eine zweite Tafel giebt mit dem Argumente 2☉ die Gröfsen g, $\log f$ und F, womit man die von 2☉ abhängigen Glieder findet, die für Rectascension:

$$g - f \operatorname{tang} \delta \cos [2☉ + F - \alpha]$$

und für Declination: (e)

$$- f \sin [2☉ + F - \alpha]$$

sind. Dieser Theil der Nutation nebst den kleinen von ☉ + P und ☉ — P abhängigen Glieder, ist die Solarnutation.

Für die kleinen von 2☾, 2☊ und ☉ + P abhängigen Glieder sind keine besonderen Tafeln berechnet; es ergeben sich dieselben aus den Tafeln für die Solarnutation, wenn man in dieselben statt mit 2☉ nach einander mit 2☾, 180° + 2☊ (weil diese Glieder das entgegengesetzte Zeichen haben) und ☉ + P eingeht und die damit nach den Gleichungen (e) erhaltenen Werthe für die beiden ersten Argumente mit $\frac{1}{6}$, oder genauer $\frac{6}{37}$, multiplicirt, für das dritte mit $\frac{1}{60}$, da diese Zahlen genähert das Verhältnifs der Coefficienten dieser Glieder zu dem der Solarnutation ausdrücken.

Die in ☾ — P' und ☉ — P multiplicirten Glieder haben eine von der vorigen verschiedene, aber den Ausdrücken für die jährliche Präcession in Rectascension und Declination analoge Form, und man erhält dieselben, wenn man diese jährliche Präcession mit $\frac{1}{472}$ sin (☾ — P') und $\frac{1}{394}$ sin (☉ — P) multiplicirt.

8. Berücksichtigt man nur das erste, beträchtlichste Glied der Nutation, so kann man sich einen anschaulichen Begriff von der Wirkung derselben machen. Man hat dann:

$$\Delta\lambda = - 17''.25 \sin ☊,$$
$$\Delta\varepsilon = + \;\; 9''.22 \cos ☊,$$

oder eigentlich der Theorie nach:

$$\sin\varepsilon\,\Delta\lambda = -10''.05\cos 2\varepsilon\,.\sin \Omega,$$
$$\Delta\varepsilon = +10''.05\cos\varepsilon\,.\cos \Omega.$$

Vermöge der Lunisolarpräcession beschreibt nun der Pol des Aequators einen kleinen Kreis, dessen Radius ε ist, um den Pol der Ecliptic. Denkt man sich nun an dem für eine Zeit geltenden mittleren Pole eine tangirende Ebene und in derselben ein rechtwinkliges Axenkreuz, von dem die Axe der x eine Tangente an dem Breitenkreise ist, so hat man, wenn man die Coordinaten des wahren (mit Nutation behafteten) Pols mit x und y bezeichnet, $y = \sin\varepsilon\,\Delta\lambda$, $x = \Delta\varepsilon$ und daher nach den obigen Ausdrücken für diese Coordinaten

$$y^2 = C^2\,.\cos 2\varepsilon^2 - \frac{\cos 2\varepsilon^2}{\cos\varepsilon^2}\,x^2, \qquad \text{wo } C = 10''.05.$$

Der wahre Pol beschreibt daher eine Ellipse um den mittleren Pol, deren halbe große Axe $C\cos\varepsilon = 9''.22$, und deren halbe kleine Axe $C\cos 2\varepsilon = 6''.86$ ist. Diese Ellipse heißt die Nutations-Ellipse. Um die Lage des Pols auf dem Umfange dieser Ellipse zu erhalten, denke man sich in der Ebene der Ellipse um das Centrum einen Kreis mit der großen Axe als Durchmesser beschrieben. Dann ist klar, daß ein Radius dieses Kreises ihn während der Periode des Mondsknotens mit gleichförmiger und rückgängiger Bewegung durchlaufen muß*), dergestalt, daß derselbe mit der der Ecliptic am nächsten liegenden Seite der halben großen Axe zusammenfällt, so oft der mittlere aufsteigende Mondknoten mit der Frühlings-Nachtgleiche zusammenfällt. Fällt man von dem Endpunkte dieses Radius ein Loth auf die große Axe der Ellipse, so liegt in dem Punkte, wo dieses Loth den Umfang der Ellipse schneidet, der wahre Ort des Erdpols.

---

*) Da die Bewegung der Mondknoten retrograd ist.

Dritter Abschnitt.

Correctionen der Beobachtungen, welche durch den Standpunkt des Beobachters auf der Oberfläche der Erde und durch die Eigenschaften des Lichts bedingt werden.

Die astronomischen Tafeln und Ephemeriden geben immer die Oerter der Gestirne, wie sie vom Mittelpunkte der Erde aus erscheinen. Für unendlich weit entfernte Gestirne ist dieser Ort gleich dem, welchen man von beliebigen Punkten der Oberfläche der Erde beobachtet. Hat aber die Entfernung des Gestirns ein angebbares Verhältniſs zum Halbmesser der Erde, so wird der Ort des Gestirns, vom Mittelpunkte der Erde gesehen, verschieden sein von dem Orte, welchen man von irgend einem Punkte der Oberfläche der Erde aus beobachtet. Will man daher den beobachteten Ort eines solchen Gestirns mit den Tafeln vergleichen, so muſs man Mittel haben, durch welche man den vom Mittelpunkte der Erde gesehenen Ort aus dem beobachteten berechnen kann. Will man umgekehrt aus dem beobachteten Orte eines solchen Gestirns gegen den Horizont des Beobachters z. B. in Verbindung mit seiner bekannten Position in Bezug auf den Aequator andre Gröſsen berechnen, so muſs man dazu die scheinbare Position, wie sie vom Beobachtungsorte gesehen erscheint, anwenden und muſs also die vom Mittelpunkte gesehene, welche die Ephemeriden geben, in die scheinbare verwandeln.

Der Winkel am Gestirne, welcher durch die beiden Gesichtslinien vom Mittelpunkte der Erde und von dem Orte auf der Oberfläche nach demselben gebildet wird, heiſst die Parallaxe. Man muſs also Mittel haben, die Parallaxen der

Gestirne für beliebige Zeiten und beliebige Orte auf der Oberfläche der Erde berechnen zu können.

Unsere Erde ist ferner von einer Atmosphäre umgeben, welche die Eigenschaft hat, das Licht zu brechen. Man sieht daher die Gestirne nicht an ihrem wahren Orte, sondern in der Richtung, welche der in der Atmosphäre gebrochene Lichtstrahl in dem Augenblicke hat, wo derselbe das Auge des Beobachters trifft. Der Unterschied der Gesichtslinie von derjenigen, in welcher man den Stern sehen würde, wenn keine Atmosphäre vorhanden wäre, heifst die Refraction. Um also aus den Beobachtungen der Gestirne ihre wahren Oerter kennen zu lernen, mufs man Mittel besitzen, um die Refraction für jeden Punkt des Himmels und für jeden Zustand der Atmosphäre zu bestimmen.

Hätte die Erde keine eigne Bewegung oder wäre die Geschwindigkeit des Lichts unendlich mal gröfser als die Geschwindigkeit der Erde, so würde diese Bewegung keinen Einflufs auf den scheinbaren Ort der Sterne haben. Da aber die Geschwindigkeit des Lichts zu der Geschwindigkeit der Erde ein angebbares Verhältnifs hat, so sieht ein Beobachter auf der Erde alle Sterne um einen kleinen Winkel, welcher von diesem Verhältnifs abhängig ist, nach derjenigen Richtung vorgerückt, nach welcher sich die Erde bewegt. Dieser kleine Winkel, um welchen man die Oerter der Sterne vermöge der Bewegung der Erde und des Lichts geändert sieht, heifst die Aberration. Um also die wahren Oerter der Sterne aus den Beobachtungen zu erhalten, mufs man Mittel haben, um die beobachteten scheinbaren Oerter von dieser Aberration zu befreien.

I. Die Parallaxe.

1. Unsere Erde ist keine vollkommene Kugel, sondern ein abgeplattetes Sphäroid d. h. ein solches, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist. Bezeichnet a die halbe grofse, b die halbe kleine Axe

eines solchen Sphäroids und α die Abplattung in Theilen der halben grofsen Axe, so ist:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}.$$

Ist ferner ε die Excentricität der Erzeugungsellipse, d. h. also derjenigen Ellipse, in welcher eine durch die halbe kleine Axe gelegte Ebene die Oberfläche des Sphäroids schneidet, so ist, wenn man dieselbe ebenfalls in Theilen der halben grofsen Axe ausdrückt:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

also auch

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

ferner

$$\alpha = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

und

$$\varepsilon = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}.$$

Das Verhältnifs $\frac{b}{a}$ ist nun nach Bessels Untersuchungen bei der Erde

$$\frac{298.1528}{299.1528}$$

oder es ist:

$$\alpha = \frac{1}{299.1528}$$

und in Toisen ausgedrückt ist:

$$a = 3272077.14 \quad \log a = 6.5148235$$
$$b = 3261139.33 \quad \log b = 6.5133693.$$

In der Astronomie braucht man aber nicht die Toise, sondern die halbe grofse Axe der Erdbahn als Einheit. Bezeichnet man mit π den Winkel, unter welchem der Aequatorealhalbmesser der Erde oder die halbe grofse Axe des Erdsphäroids von der Sonne aus erscheint und ist R die halbe grofse Axe der Erdbahn oder die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, so ist:

$$a = R \sin \pi$$

oder

$$a = \frac{R \cdot \pi}{206265}.$$

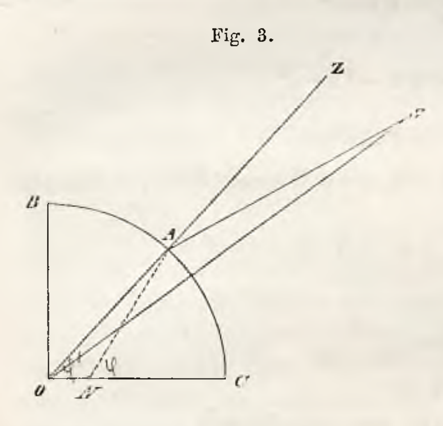
Der Winkel π oder die Aequatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne ist nach Encke gleich:

$$8''.57116.$$

Es ist der Winkel, unter welchem der Halbmesser eines Punktes des Erdäquators von der Sonne aus gesehen wird, wenn die Sonne für diesen Ort des Erdäquators im Horizonte steht.

2. Um nun die Parallaxe eines Gestirns für jeden Ort auf der Oberfläche berechnen zu können, mufs man jeden Punkt auf der sphäroidischen Erde durch Coordinaten auf den Mittelpunkt beziehen können. Als erste Coordinate nimmt man nun die Sternzeit d. h. den Winkel, welchen eine durch den Beobachtungsort und die halbe kleine Axe gelegte Ebene*) mit der Ebene durch die halbe kleine Axe und den Frühlings Tag- und Nachtgleichenpunkt macht. Ist dann OAC Fig. 3 die Ebene durch den Beobachtungsort A und durch die halbe kleine Axe, so mufs man um die Lage des Ortes A anzugeben, noch die Entfernung $AO = \varrho$ vom Mittelpunkte der Erde und den Winkel AOC, den man die verbesserte Polhöhe nennt, kennen.

Fig. 3.



Diese Gröfsen kann man aber immer aus der Polhöhe ANC (nämlich dem Winkel, den der Horizont von A mit der Weltaxe oder den die Normale AN an der Oberfläche in A mit dem Aequator macht) und den beiden Axen des Erdsphäroids berechnen.

Sind nämlich x und y die Coordinaten des Punktes A in Bezug auf den Mittelpunkt O, wenn man OC als Axe der Abscissen, OB als Axe der Ordinaten ansieht, so hat man, weil A ein Punkt einer Ellipse ist, deren halbe grofse und halbe kleine Axen a und b sind, die Gleichung:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

---

*) Da diese Ebene durch die Weltpole und durch das Zenith des Beobachtungsortes geht, so ist sie die Ebene des Meridians.

Da nun, wenn man die verbesserte Polhöhe mit φ' bezeichnet,

$$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{y}{x}$$

ist, da man ferner

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{dx}{dy}$$

hat, indem die Polhöhe φ der Winkel ist, welchen die Normale an A mit der Axe der Abscissen macht, so erhält man, weil die Differentialgleichung der Ellipse

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{dx}{dy}$$

giebt, zwischen den Gröfsen φ und φ' die folgende Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \varphi \qquad (a).$$

Um ϱ zu berechnen, hat man:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos \varphi'}.$$

Da nun aus der Gleichung für die Ellipse

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \varphi'^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} \varphi \,.\, \operatorname{tang} \varphi'}}$$

folgt, so erhält man:

$$\varrho = \frac{a \sec \varphi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \varphi'}} = a \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos(\varphi' - \varphi)}} \qquad (b).$$

Durch diese beiden Formeln kann man also für jeden Ort auf der Oberfläche der Erde, dessen Polhöhe φ bekannt ist, die verbesserte Polhöhe φ' und den Radius ϱ berechnen.

Für die Coordinaten x und y erhält man noch die folgenden Formeln, die auch in der Folge gebraucht werden:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{\cos \varphi^2 + (1 - \varepsilon^2) \sin \varphi^2}}$$
$$= \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}} \qquad (c)$$

und

$$y = x \operatorname{tang} \varphi' = x \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \varphi = x (1 - \varepsilon^2) \operatorname{tang} \varphi$$
$$= \frac{a(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}} \qquad (d).$$

Aus der Formel (a) kann man φ' in eine Reihe entwickeln, welche nach den Sinus der Vielfachen von φ fort-

schreitet. Man erhält nämlich nach Formel (16) in No. 11 der Einleitung:

$$\varphi' = \varphi - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \sin 4\varphi - \text{etc.} \qquad (A)$$

oder, wenn man

$$\frac{a-b}{a+b} = n$$

setzt:

$$\varphi' = \varphi - \frac{2n}{1+n^2} \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^2 \sin 4\varphi - \text{etc.} \qquad (B).$$

Berechnet man die numerischen Werthe der Coefficienten für die oben gegebene Abplattung und multiplicirt dieselben mit 206265, um sie in Secunden zu erhalten, so bekommt man:

$$\varphi' = \varphi - 11' 30''.65 \sin 2\varphi + 1''.16 \sin 4\varphi - \ldots \qquad (C),$$

woraus man z. B. für die Polhöhe von Berlin $52^0\, 30'\, 16''.0$ findet

$$\varphi' = 52^0\, 19'\, 8''.3.$$

Wiewohl ϱ selbst sich nicht in eine so elegante Reihe wie φ' entwickeln läſst, so kann man doch für $\log \varrho$ eine solche finden*). Die Formel (b) giebt nämlich:

$$\varrho^2 = \frac{a^2}{\cos\varphi'^2 \left[1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang}\varphi^2\right]}.$$

Setzt man hierin für $\cos\varphi'^2$ seinen Werth

$$\frac{a^4}{a^4 + b^4 \operatorname{tang}\varphi^2},$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
\varrho^2 &= \frac{a^4 \cos\varphi^2 + b^4 \sin\varphi^2}{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2} \\
&= \frac{a^4 + b^4 + (a^4 - b^4)\cos 2\varphi}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2\varphi} \\
&= \frac{(a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2 + 2(a^2+b^2)(a^2-b^2)\cos 2\varphi}{(a+b)^2 + (a-b)^2 + 2(a+b)(a-b)\cos 2\varphi}
\end{aligned}$$

also:

$$\varrho = \frac{(a^2+b^2)}{(a+b)} \frac{\left[1 + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 + 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + 2\frac{a-b}{a+b}\cos 2\varphi\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

---

*) Encke, Jahrbuch für 1852 pag. 326, wo auch Tafeln gegeben sind, aus denen man für jede Polhöhe φ' und $\log\varrho$ findet.

Schreibt man die Formel logarithmisch und entwickelt die Logarithmen der Quadratwurzeln nach Formel (15) in No. 11 der Einleitung in Reihen, die nach den Cosinus der Vielfachen von 2φ fortschreiten, so erhält man:

$$\log \text{hyp}\, \varrho = \log \text{hyp} \frac{a^2+b^2}{a+b} + \left\{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a+b}\right\} \cos 2\varphi$$
$$- \tfrac{1}{2} \left\{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\} \cos 4\varphi \qquad (D)$$
$$+ \tfrac{1}{3} \left\{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\right\} \cos 6\varphi$$
$$- \text{etc.}$$

oder für Briggische Logarithmen, wenn man wieder

$$\frac{a-b}{a+b}$$

mit n bezeichnet:

$$\log \varrho = \log\left(a\frac{1+n^2}{1+n}\right) + M\left\{\left(\frac{2n}{1+n^2} - n\right) \cos 2\varphi\right.$$
$$- \tfrac{1}{2} \left[\left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^2 - n^2\right] \cos 4\varphi \qquad (E)$$
$$+ \tfrac{1}{3} \left[\left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^3 - n^3\right] \cos 6\varphi$$
$$\left. - \quad \text{etc.} \right\},$$

wo M den Modulus der Briggischen Logarithmen bedeutet und

$$\log M = 9.6377843$$

ist. Berechnet man wieder die numerischen Werthe der Coefficienten, so erhält man, wenn man $a = 1$ nimmt:

$$\log \varrho = 9.9992747 + 0.0007271 \cos 2\varphi - 0.0000018 \cos 4\varphi \qquad (F)$$

und daraus z. B. für die Polhöhe von Berlin:

$$\log \varrho = 9.9990880.$$

Kennt man also die Polhöhe eines Orts, so kann man durch die Reihen (C) und (F) die verbesserte Polhöhe und die Entfernung des Orts vom Mittelpunkte der Erde berechnen und durch diese Gröſsen in Verbindung mit der Sternzeit die Lage des Orts gegen den Mittelpunkt der Erde in jedem Augenblicke angeben. Denkt man sich durch den Mittelpunkt der Erde ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt, dessen Axe der z senkrecht auf der Ebene des Aequators steht, während die Axen der x und y in der Ebene des Aequators liegen und zwar so, daſs die positive Axe der x nach dem Frühlingspunkte, die positive Axe der y nach dem 90. Grade der Rectascensionen gerichtet ist, so kann man auch

die Lage des Ortes auf der Oberfläche gegen den Mittelpunkt durch die drei rechtwinkligen Coordinaten ausdrücken:

$$x = \varrho \cos \varphi' \cos \Theta$$
$$y = \varrho \cos \varphi' \sin \Theta \qquad (G).$$
$$z = \varrho \sin \varphi'$$

3. Die Ebene, in welcher die Gesichtslinien vom Mittelpunkte der Erde und vom Beobachtungsorte nach dem Gestirne liegen, geht, wenn man sich die Erde als sphärisch denkt, nothwendiger Weise durch das Zenith des Beobachtungsortes und schneidet also die scheinbare Himmelskugel in einem Verticalkreise. Daraus folgt, dafs die Parallaxe nur die Höhe der Gestirne ändert, das Azimut dagegen ungeändert läfst. Ist nun A Fig. 3 der Beobachtungsort, Z sein Zenith, S das Gestirn und O der Mittelpunkt der Erde, so ist ZOS die wahre vom Mittelpunkte der Erde gesehene Zenithdistanz z, dagegen ZAS die scheinbare, von dem Orte A auf der Oberfläche beobachtete Zenithdistanz z'. Bezeichnet man dann die Parallaxe d. h. den Winkel an $S = z' - z$ mit p', so ist:

$$\sin p' = \frac{\varrho}{\Delta} \sin z',$$

wo Δ die Entfernung des Gestirns von der Erde bedeutet, und da p' aufser beim Monde immer nur ein sehr kleiner Winkel ist, so ist es erlaubt, den Sinus mit dem Bogen zu vertauschen und zu setzen:

$$p' = \frac{\varrho}{\Delta} \sin z' \,.\, 206265.$$

Die Parallaxe ist also dem Sinus der scheinbaren Zenithdistanz proportional. Sie ist im Zenith Null, erreicht im Horizonte ihr Maximum und bewirkt, dafs man die Höhen aller Gestirne zu niedrig sieht. Der Maximumwerth für $z' = 0$

$$p = \frac{\varrho}{\Delta} 206265$$

heifst die Horizontalparallaxe und der Werth

$$p = \frac{a}{\Delta} 206265,$$

wo a der Halbmesser des Erdäquators ist, die Horizontal-Aequatorealparallaxe.

Hier ist die Erde als sphärisch vorausgesetzt; da indessen die Erde ein Sphäroid ist, so geht die Ebene, in welcher die Gesichtslinien vom Mittelpunkte der Erde und vom Beobachtungsorte nach dem Gestirne liegen, nicht durch das Zenith des Beobachtungsortes, sondern durch den Punkt, in welchem die Linie vom Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte die scheinbare Himmelskugel trifft. Es wird daher auch das Azimut der Gestirne durch die Parallaxe geändert und zugleich wird der strenge Ausdruck für die Höhenparallaxe ein anderer sein als der eben gegebene *).

Denkt man sich drei auf einander senkrechte Coordinatenaxen, von denen die positive Axe der z nach dem Zenith des Beobachtungsortes gerichtet ist, während die Axen der x und y in der Ebene des Horizonts liegen und zwar so, daſs die positive Axe der x nach Süden, die positive Axe der y nach Westen gerichtet ist, so sind die Coordinaten eines Gestirns in Bezug auf diese Axen:

$$\Delta' \sin z' \cos A', \quad \Delta' \sin z' \sin A' \quad \text{und} \quad \Delta' \cos z',$$

wo Δ' die Entfernung des Gestirns vom Beobachtungsorte, z' und A' vom Beobachtungsorte gesehene Zenithdistanz und Azimut bezeichnen.

Ferner sind die Coordinaten des Gestirns in Bezug auf ein Axensystem, welches dem vorigen parallel ist, aber durch den Mittelpunkt der Erde geht:

$$\Delta \sin z \cos A, \quad \Delta \sin z \sin A \quad \text{und} \quad \Delta \cos z,$$

wenn man mit Δ die Entfernung des Gestirns vom Mittelpunkte der Erde und mit z und A die vom Mittelpunkte der Erde gesehene Zenithdistanz und das Azimut bezeichnet. Da nun die Coordinaten des Mittelpunktes der Erde in Bezug auf das erstere System respective:

$$-\varrho \sin(\varphi - \varphi'), \quad 0 \quad \text{und} \quad -\varrho \cos(\varphi - \varphi')$$

sind, so hat man die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin z' \cos A' &= \Delta \sin z \cos A - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \\ \Delta' \sin z' \sin A' &= \Delta \sin z \sin A \\ \Delta' \cos z' &= \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi'), \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin z' \sin(A' - A) &= \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A \\ \Delta' \sin z' \cos(A' - A) &= \Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A \qquad (a) \\ \Delta' \cos z' &= \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

---

*) Der Verf. verdankt die folgende, elegante Entwickelung der gütigen Mittheilung des Herrn Prof. Encke.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin \frac{1}{2}(A' - A)$, die zweite mit $\cos \frac{1}{2}(A' - A)$ und addirt die Producte, so erhält man:

$$\Delta' \sin z' = \Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)}$$
$$\Delta' \cos z' = \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi').$$

Setzt man dann:

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)} \operatorname{tang}(\varphi - \varphi'), \qquad (b)$$

so wird:

$$\Delta' \sin z' = \Delta \sin z - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{tang} \gamma$$
$$\Delta' \cos z' = \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi'),$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \Delta' \sin(z' - z) &= \varrho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\sin(z - \gamma)}{\cos \gamma} \\ \Delta' \cos(z' - z) &= \Delta - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\cos(z - \gamma)}{\cos \gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

und auch noch, wenn man die erste Gleichung mit $\sin \frac{1}{2}(z' - z)$, die zweite mit $\cos \frac{1}{2}(z' - z)$ multiplicirt und die Producte addirt:

$$\Delta' = \Delta - \varrho \frac{\cos(\varphi - \varphi') \cos[\frac{1}{2}(z' + z) - \gamma]}{\cos \gamma}.$$

Dividirt man die Gleichungen (*a*), (*b*) und (*c*) durch Δ, nimmt man ferner den Halbmesser des Erdäquators als Einheit an, und setzt:

$$\frac{1}{\Delta} = \sin p,$$

wo p also die Horizontal-Aequatorealparallaxe bezeichnet, so erhält man nach der Formel (12) und (13) in No. 11 der Einleitung:

$$A' - A = \frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z} \sin A + \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z} \right)^2 \sin 2A + \ldots$$

$$\gamma = \cos A (\varphi - \varphi') - \sin A \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A' - A)(\varphi - \varphi')$$
$$+ \frac{1}{3} \frac{\sin A \sin A' \cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)^3} (\varphi - \varphi')^3 \ldots \text{*)}$$

---

*) Es ist nämlich:

$$\gamma = \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)} \operatorname{tang}(\varphi - \varphi') - \frac{1}{3} \frac{\cos \frac{1}{2}(A' + A)^3}{\cos \frac{1}{2}(A' - A)^3} \operatorname{tang}(\varphi - \varphi')^3 + \ldots$$

Setzt man hier für $\operatorname{tang}(\varphi - \varphi')$ die Reihe

$$(\varphi - \varphi') + \frac{1}{3}(\varphi - \varphi')^3 + \ldots,$$

so erhält man leicht den im Texte gegebenen Ausdruck.

$$z' - z = \frac{\varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma} \sin(z - \gamma) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma}\right)^2 \sin 2(z - \gamma) + \ldots$$

$$\log\text{hyp}\,\Delta' = \log\text{hyp}\,\Delta - \frac{\varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma} \cos(z - \gamma) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma}\right)^2 \cos 2(z - \gamma) - \ldots$$

Hiernach ist genähert bis auf Gröfsen von der Ordnung $\sin p\,(\varphi - \varphi')$, die bei der Gröfse γ nie in Betracht kommen werden:

$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A$$

und man erhält für die Azimutalparallaxe:

$$A' - A = \frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z} \sin A,$$

oder, wenn z sehr klein sein sollte, strenge:

$$\tan(A' - A) = \frac{\dfrac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z} \sin A}{1 - \dfrac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi')}{\sin z} \cos A}.$$

Da ferner:

$$\frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A' + A)\sin(\varphi - \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(A' - A)\sin\gamma},$$

also sehr nahe gleich 1 ist, so erhält man für die Parallaxe der Zenithdistanz:

$$z' - z = \varrho \sin p \sin[z - (\varphi - \varphi')\cos A],$$

oder strenge:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} \sin(z' - z) = \varrho \sin p \sin[z - (\varphi - \varphi')\cos A]$$

$$\frac{\Delta'}{\Delta} \cos(z' - z) = 1 - \varrho \sin p \cos[z - (\varphi - \varphi')\cos A].$$

Für den Meridian ist also die Parallaxe in Azimut Null und die Parallaxe der Zenithdistanz:

$$z' - z = \varrho \sin p \sin[z - (\varphi - \varphi')].$$

4. Aehnlich erhält man die Parallaxe für Rectascension und Declination. Die Coordinaten eines Gestirns in Bezug auf die Ebene des Aequators und den Mittelpunkt der Erde seien:

$$\Delta \cos\delta \cos\alpha,\quad \Delta \cos\delta \sin\alpha \quad \text{und} \quad \Delta \sin\delta.$$

Die scheinbaren Coordinaten in Bezug auf dieselbe Ebene, wie sie vom Beobachtungsorte auf der Oberfläche der Erde erscheinen, seien dagegen:

$$\Delta' \cos\delta' \cos\alpha',\quad \Delta' \cos\delta' \sin\alpha' \quad \text{und} \quad \Delta' \sin\delta'.$$

Dann hat man, weil die Coordinaten des Ortes auf der Oberfläche in Bezug auf den Mittelpunkt der Erde und für die Grundebene des Aequators:

$$\varrho \cos \varphi' \cos \Theta, \quad \varrho \cos \varphi' \sin \Theta \text{ und } \varrho \sin \varphi'$$

sind, zur Bestimmung von Δ', α' und δ' die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' &= \Delta \cos \delta \cos \alpha - \varrho \cos \varphi' \cos \Theta \\ \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' &= \Delta \cos \delta \sin \alpha - \varrho \cos \varphi' \sin \Theta \\ \Delta' \sin \delta' &= \Delta \sin \delta \qquad\quad - \varrho \sin \varphi'. \end{aligned} \qquad (a)$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin \alpha$, die zweite mit $\cos \alpha$ und zieht beide von einander ab, so erhält man:

$$\Delta' \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) = - \varrho \cos \varphi' \sin (\Theta - \alpha).$$

Multiplicirt man dagegen die erste Gleichung mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$ und addirt beide, so findet man:

$$\Delta' \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) = \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \cos (\Theta - \alpha).$$

Es ist mithin:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} (\alpha' - \alpha) &= \frac{\varrho \cos \varphi' \sin (\alpha - \Theta)}{\Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \cos (\alpha - \Theta)} \\ &= \frac{\frac{\varrho \cos \varphi'}{\Delta \cos \delta} \sin (\alpha - \Theta)}{1 - \frac{\varrho \cos \varphi'}{\Delta \cos \delta} \cos (\alpha - \Theta)}, \end{aligned}$$

oder, wenn man hierauf die schon oft gebrauchte Reihenentwickelung anwendet:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha = \frac{\varrho \cos \varphi'}{\Delta \cos \delta} \sin (\alpha - \Theta) &+ \tfrac{1}{2} \left(\frac{\varrho \cos \varphi'}{\Delta \cos \delta}\right)^2 \sin 2 (\alpha - \Theta) \\ &+ \tfrac{1}{3} \left(\frac{\varrho \cos \varphi'}{\Delta \cos \delta}\right)^3 \sin 3 (\alpha - \Theta) + \ldots \end{aligned} \qquad (A)$$

Für alle Fälle, den Mond ausgenommen, reicht man mit dem ersten Gliede dieser Reihe aus und hat dann ganz einfach, wenn man für ϱ den Halbmesser des Aequators zur Einheit nimmt und dann im Zähler den Factor $\sin \pi$ (wo π die Horizontal-Aequatorealparallaxe der Sonne ist) hinzufügt, damit im Zähler und Nenner dieselbe Einheit, nämlich die halbe grofse Axe der Erdbahn vorkommt:

$$\alpha' - \alpha = \frac{\varrho \sin \pi \cos \varphi'}{\Delta} \cdot \frac{\sin (\alpha - \Theta)}{\cos \delta}. \qquad (B)$$

$\alpha - \Theta$ ist der östliche Stundenwinkel des Gestirns. Die Parallaxe vergröfsert also die Rectascensionen der Sterne auf der Ostseite des Meridians und vermindert dieselben auf der Westseite. Steht das Gestirn im Meridian, so ist die Parallaxe desselben in Rectascension gleich Null.

Um nun auch eine ähnliche Formel für $\delta' - \delta$ zu finden, setze man in der Formel für

$$\Delta' \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha)$$

jetzt

$$1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} (\alpha' - \alpha)^2$$

statt

$$\cos (\alpha' - \alpha),$$

wodurch man erhält:

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \cos (\Theta - \alpha) + 2 \Delta' \cos \delta' \sin \tfrac{1}{2} (\alpha' - \alpha)^2.$$

Multiplicirt und dividirt man das letzte Glied mit $\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)$, so findet man hieraus, wenn man zugleich die Formel:

$$\Delta' \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) = - \varrho \cos \varphi' \sin (\Theta - \alpha)$$

benutzt:

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \frac{\cos [\Theta - \frac{1}{2} (\alpha' + \alpha)]}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)} \cdot \qquad (b)$$

Führt man nun die Hülfsgröfsen ein:

$$\beta \sin \gamma = \sin \varphi'$$

$$\beta \cos \gamma = \frac{\cos \varphi' \cos [\Theta - \frac{1}{2} (\alpha' + \alpha)]}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)}, \qquad (c)$$

so erhält man aus (b):

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \varrho \beta \cos \gamma$$

und aus der dritten der Gleichungen (a):

$$\Delta' \sin \delta' = \Delta \sin \delta - \varrho \beta \sin \gamma.$$

Aus beiden Gleichungen findet man aber leicht:

$$\Delta' \sin (\delta' - \delta) = - \varrho \beta \sin (\gamma - \delta)$$
$$\Delta' \cos (\delta' - \delta) = \Delta - \varrho \beta \cos (\gamma - \delta),$$

oder:

$$\operatorname{tang} (\delta' - \delta) = - \frac{\frac{\varrho \beta}{\Delta} \sin (\gamma - \delta)}{1 - \frac{\varrho \beta}{\Delta} \cos (\gamma - \delta)}$$

oder auch nach der Formel (12) in No. 11 der Einleitung:

$$\delta' - \delta = - \frac{\varrho \beta}{\Delta} \sin (\gamma - \delta) - \tfrac{1}{2} \frac{\varrho^2 \beta^2}{\Delta^2} \sin 2 (\gamma - \delta) - \text{etc.} \qquad (C)$$

Führt man hier für β seinen Werth $\frac{\sin \varphi'}{\sin \gamma}$ ein und setzt wieder $\varrho \sin \pi$ statt ϱ, um im Zähler und Nenner dieselbe Einheit zu haben, so erhält man, wenn man nur das erste Glied der Reihe mitnimmt:

$$\delta' - \delta = - \frac{\varrho \sin \pi \sin \varphi'}{\Delta} \cdot \frac{\sin (\gamma - \delta)}{\sin \gamma}.$$

Setzt man noch in der zweiten der Formeln (c) in diesem Falle Eins statt $\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)$ und α statt $\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)$, so sind also die vollständigen Näherungsformeln zur Berechnung der Parallaxe in Rectascension und Declination die folgenden:

$$\alpha'-\alpha=-\frac{\pi\varrho\cos\varphi'}{\Delta}\cdot\frac{\sin(\Theta-\alpha)}{\cos\delta}$$

$$\operatorname{tang}\gamma=\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\cos(\Theta-\alpha)}$$

$$\delta'-\delta=-\frac{\pi\varrho\sin\varphi'}{\Delta}\,\frac{\sin(\gamma-\delta)}{\sin\gamma}\;{}^{*})$$

Hat das Gestirn eine sichtbare Scheibe, so wird sein scheinbarer Halbmesser von der Entfernung abhängen und man wird also auch dafür eine Correction nöthig haben. Es ist aber:

$$\Delta'\sin(\delta'-\gamma)=\Delta\sin(\delta-\gamma)$$

$$\Delta'=\Delta\,\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin(\delta'-\gamma)}$$

und da sich nun die Halbmesser, so lange dieselben kleine Winkel sind, umgekehrt wie die Entfernungen verhalten, so hat man:

$$R'=R\cdot\frac{\sin(\delta'-\gamma)}{\sin(\delta-\gamma)}.$$

B e i s p i e l. 1844 Sept. 3 wurde in Rom um $20^h\,41^m\,38^s$ Sternzeit ein von de Vico entdeckter Comet beobachtet

in der Rectascension $2^0\,35'\,55''.5$
und in der Declination $-\,18\;\;43\;\;21\,.\,6.$

Der Logarithmus der Entfernung von der Erde war zu dieser Zeit 9.27969, ferner ist für Rom

$$\varphi'=41^0\,42'.5$$

und

$$\log\varrho=9\,.\,99936.$$

Damit ist dann die Rechnung für die Parallaxe die folgende:

---

*) Für den Meridian erhält man hieraus:

$$\delta'-\delta=-\frac{\pi\varrho}{\Delta}\sin(\varphi'-\delta)=\varrho\,\frac{\pi}{\Delta}\sin[z-(\varphi-\varphi')],$$

also die Parallaxe in Declination gleich der Höhenparallaxe.

Θ in Bogen	$310^\circ\ 24'.5$		
α	$2\ \ 35.9$		
$\Theta-\alpha$	$-52^\circ\ 11'.4$		
$\text{tang}\ \varphi'$	9.94999	$\gamma =$	$55^\circ\ 28'.6$
$\cos(\Theta-\alpha)$	9.78749	$\delta = -$	$18\ \ 43.4$
$\sin(\Theta-\alpha)$	9.89765_n	$\gamma-\delta = +$	$74\ \ 12.0$
$-\dfrac{\pi\varrho\cos\varphi'}{\Delta}$	1.52576_n	$\sin(\gamma-\delta)$	9.98327
$\sec\delta$	0.02362	$-\dfrac{\pi\varrho\sin\varphi'}{\Delta}$	1.47576_n
		$\text{cosec}\ \gamma$	0.08413
$\log(\alpha'-\alpha)$	1.44703	$\log\delta'-\delta =$	1.54316_n
$(\alpha'-\alpha) = +27''.99$		$\delta'-\delta =$	$-34''.93$

Wegen der Parallaxe ist also damals die Rectascension des Cometen um $28''.0$ gröſser und die Declination um $34''.9$ kleiner beobachtet, als man sie vom Mittelpunkte der Erde gesehen hätte. Der von der Parallaxe befreite Ort des Cometen ist also:

$$\alpha = \quad 2^\circ\ 35'\ 27''.5$$
$$\delta = -18\ \ 42\ \ 46\ .7.$$

Um die Parallaxe eines Gestirns für Coordinaten, welche auf die Grundebene der Ecliptic bezogen sind, zu erhalten, ist es nöthig, die Coordinaten des Beobachtungsortes in Bezug auf den Mittelpunkt der Erde für dieselbe Grundebene zu kennen. Verwandelt man aber Θ und φ' in Länge und Breite nach No. 9 des ersten Abschnitts und erhält man dafür die Werthe l und b, so sind diese Coordinaten:

$$\varrho\cos b\cos l$$
$$\varrho\cos b\sin l$$
$$\varrho\sin b$$

und man hat dann, wenn λ', β', Δ' scheinbare und λ, β, Δ wahre Gröſsen sind, die drei Gleichungen:

$$\Delta'\cos\beta'\cos\lambda' = \Delta\cos\beta\cos\lambda - \varrho\cos b\cos l$$
$$\Delta'\cos\beta'\sin\lambda' = \Delta\cos\beta\sin\lambda - \varrho\cos b\sin l$$
$$\Delta'\sin\beta' = \Delta\sin\beta - \varrho\sin b,$$

woraus man ganz ähnliche Endformeln, wie vorher findet, nämlich:

$$\lambda' - \lambda = -\frac{\pi\varrho\cos b}{\Delta}\ \frac{\sin(l-\lambda)}{\cos\beta}$$

$$\text{tang}\ \gamma = \frac{\text{tang}\ b}{\cos(l-\lambda)}$$

$$\beta' - \beta = -\frac{\pi\varrho\sin b}{\Delta}\ \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\gamma},$$

Θ und φ' sind die Rectascension und Declination desjenigen Punktes, in welchem der verlängerte Erdhalbmesser die scheinbare Himmelskugel trifft, l und b sind also die Länge und Breite desselben Punktes. Betrachtet man die Erde als sphärisch, so fällt dieser Punkt mit dem Zenith zusammen und man nennt die Länge desselben auch den Nonagesimus, weil der dieser Länge entsprechende Punkt der Ecliptic 90° von den im Horizonte befindlichen Punkten derselben absteht.

5. Da die Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes oder der Winkel $\frac{\sin \pi}{\Delta}$, wenn Δ die Entfernung des Mondes von der Erde bezeichnet, immer zwischen 54 und 61 Minuten beträgt, so reicht man bei der Berechnung der Mondsparallaxe mit dem ersten Gliede der Reihe für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ nicht aus, sondern man mufs dann entweder auf die höheren Glieder mit Rücksicht nehmen oder die strengen Formeln anwenden.

Man suche die Parallaxe des Mondes in Rectascension und Declination für Greenwich den 10. April 1848 um 10^h. Für diese Zeit ist:

$$\alpha = 7^h\,43^m\,20^s.25 = 115^\circ\,50'\,3''.75$$
$$\delta = +16^\circ\,27'\,22''.9$$
$$\Theta = 11^h\,17^m\,0^s.02 = 169^\circ\,15'\,0''.30$$

die Aequatoreal-Horizontalparallaxe und Halbmesser:

$$p = 56'\,57''.5$$
$$R = 15'\,31''.3$$

ferner ist für Greenwich:

$$\varphi' = 51^\circ\,17'\,25''.4$$
$$\log \varrho = 9.9991134.$$

Führt man die Horizontalparallaxe p des Mondes in die beiden in No. 4 gefundenen Reihen für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ ein, so werden diese, da $\sin p = \frac{1}{\Delta}$

$$\alpha' - \alpha = -206265 \left\{ \frac{\varrho \cos\varphi' \sin p}{\cos\delta} \sin(\Theta - \alpha) + \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho\cos\varphi'\sin p}{\cos\delta}\right)^2 \sin 2(\Theta - \alpha) + \frac{1}{3}\left(\frac{\varrho\cos\varphi'\sin p}{\cos\delta}\right)^3 \sin 3(\Theta - \alpha) + \ldots \right\}$$

und: $$\delta' - \delta = -206265 \left\{ \frac{\varrho \sin\varphi' \sin p}{\sin\gamma} \sin(\gamma - \delta) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varrho \sin\varphi' \sin p}{\sin\gamma}\right)^2 \sin 2(\gamma-\delta) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\varrho \sin\varphi' \sin p}{\sin\gamma}\right)^3 \sin 3(\gamma-\delta) + \ldots \right\},$$

wo man jetzt zur Berechnung des Hülfswinkels γ die strenge Formel anzuwenden hat:

$$\operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\varphi' \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]}.$$

Berechnet man diese Formeln, so erhält man für $\alpha' - \alpha$:

aus dem ersten Gliede:	— 29′ 45″. 71
„ „ zweiten „	— 11 . 47
„ „ dritten „	— 0 . 03
also $\alpha' - \alpha =$	— 29′ 57″. 21

und für $\delta' - \delta$:

aus dem ersten Gliede:	— 36′ 34″. 21
„ „ zweiten „	— 20 . 91
„ „ dritten „	— 0 . 12
also $\delta' - \delta$	— 36′ 55″. 24.

Die scheinbare Rectascension und Declination des Mondes ist somit:

$$\alpha' = 115^\circ\, 20'\, 6''.54 \qquad \delta' = 15^\circ\, 50'\, 27''.66.$$

Zuletzt erhält man noch für den scheinbaren Halbmesser:

$$R' = 15'\, 40''.20.$$

Zieht man es vor, die Parallaxen nach den strengen Formeln zu berechnen, so mufs man sich diese für die logarithmische Rechnung bequemer einrichten. Die strenge Formel für $\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha)$ war:

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\varrho \cos\varphi' \sin p \sin(\alpha - \Theta) \sec\delta}{1 - \varrho\cos\varphi' \sin p \cos(\alpha - \Theta)\sec\delta} \qquad (a).$$

Ferner folgt aus den beiden Gleichungen:

$$\Delta' \sin\delta' = \Delta[\sin\delta - \varrho \sin\varphi' \sin p]$$

und:

$$\Delta' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) = \Delta[\cos\delta - \varrho\cos\varphi' \sin p \cos(\alpha - \Theta)]$$

$$\operatorname{tang}\delta' = \frac{[\sin\delta - \varrho\sin\varphi'\sin p]\cos(\alpha' - \alpha)\sec\delta}{1 - \varrho\cos\varphi'\sin p \sec\delta \cos(\alpha - \Theta)} \qquad (b).$$

Da ferner:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha)}{\cos\delta - \varrho\cos\varphi'\sin p\cos(\alpha - \Theta)},$$

so erhält man noch:

$$\sin R' = \frac{\cos\delta'\cos(\alpha' - \alpha)\sec\delta}{1 - \varrho\cos\varphi'\sin p \sec\delta\cos(\alpha - \Theta)} \sin R \qquad (c).$$

Führt man nun in (*a*), (*b*) und (*c*) die Hülfsgröfsen ein:

$$\cos A = \frac{\varrho \sin p \cos \varphi' \cos(\alpha - \Theta)}{\cos \delta}$$

und:

$$\sin C = \varrho \sin p \sin \varphi',$$

so erhält man die für logarithmische Rechnung bequemen Formeln:

$$\tang(\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{1}{2} \varrho \cos \varphi' \sin p \,.\, \sin(\alpha - \Theta)}{\cos \delta \sin \frac{1}{2} A^2}$$

$$\tang \delta' = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta - C) \cos \frac{1}{2}(\delta + C) \cos(\alpha' - \alpha)}{\cos \delta \sin \frac{1}{2} A^2}$$

und:

$$R' = \frac{\frac{1}{2} \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha)}{\cos \delta \sin \frac{1}{2} A^2} \,.\, R.$$

Sucht man $\alpha' - \alpha$, δ' und R' für das vorige Beispiel auch nach diesen Formeln, so erhält man fast genau wie vorher:

$$\alpha' - \alpha = -29' \, 57''.21$$
$$\delta' = +15^0 \, 50' \, 27''.68$$
$$R' = 15' \, 40''.21.$$

Für die strenge Berechnung der Parallaxen in Länge und Breite erhält man ganz ähnliche Formeln, in denen nur λ', λ, β', β, l und b an der Stelle von α', α, δ', δ, Θ und φ' vorkommen.

II. Die Refraction.

6. Die Lichtstrahlen gelangen nicht durch einen leeren Raum zu uns, sondern durch die Atmosphäre der Erde. Im leeren Raume gehen die Lichtstrahlen geradlinig fort; wenn dieselben aber in ein anderes Medium, welches das Licht bricht, eintreten, so werden sie von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt. Besteht dieses Medium nun, wie unsere Atmosphäre aus unendlich vielen Schichten, deren Brechungskraft sich stetig ändert, so wird der Weg des Lichtstrahls durch dasselbe eine wirkliche Curve bilden. Ein Beobachter auf der Erde sieht nun das Object in der Richtung der letzten Tangente der Curve, welche der Lichtstrahl durchläuft und mufs aus dieser Richtung, dem scheinbaren Orte des Objects,

auf diejenige Richtung des Lichtstrahls schließen, welche derselbe gehabt haben würde, wenn er einen leeren Raum durchlaufen hätte, d. h. auf den wahren Ort des Objects. Der Unterschied beider Richtungen heißt die Refraction und da die Curve, welche der Weg des Lichtstrahls in der Atmosphäre bildet, dem Beobachter die concave Seite zuwendet, so sieht man wegen der Refraction alle Gestirne in einer zu großen Höhe.

Im Folgenden wird die Gestalt der Erde als sphärisch vorausgesetzt, da der Einfluß der sphäroidischen Gestalt der Erde auf die Refraction ganz unbedeutend ist. Die Atmosphäre wird aus concentrischen Schichten bestehend angenommen, innerhalb welcher die Dichtigkeit, also auch die davon abhängende Brechungskraft constant ist. Um nun die Aenderung der Richtung des Lichtstrahls in jeder Schicht vermöge der Brechung zu bestimmen, muß man die Gesetze der Brechung des Lichts kennen. Es sind ihrer vier, nämlich die folgenden:

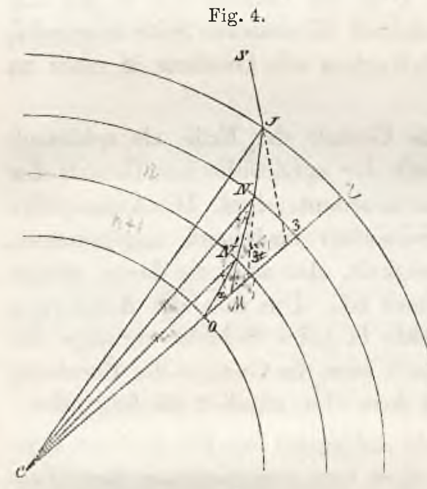
1) Wenn ein Lichtstrahl auf irgend eine Fläche eines Körpers trifft, welche zwei Medien von verschiedener Brechbarkeit trennt, so lege man eine tangirende Ebene an den Punkt, wo der Lichtstrahl einfällt, ziehe die Normale und lege durch dieselbe und den Weg des Lichtstrahls eine Ebene, so wird der Lichtstrahl auch nach seinem Eintritt in den Körper diese Ebene nicht verlassen.

2) Wenn man sich die Normale auswärts verlängert denkt, so hat bei einerlei Medien für alle Einfallswinkel der Sinus dieses Einfallswinkels (d. h. des Winkels zwischen dem einfallenden Strahl und der Normale) zum Sinus des Brechungswinkels (d. h. des Winkels zwischen dem gebrochenen Strahl und der Normale) ein constantes Verhältniß. Dieses Verhältniß nennt man den Brechungsexponenten für diese zwei Medien.

3) Wenn der Brechungsexponent zwischen zwei Medien A und B gegeben ist und ebenso der zwischen zwei andern Medien B und C, so ist der Brechungsexponent zwischen den Medien A und C das zusammengesetzte Verhältniß vom Brechungsexponenten zwischen A und B und dem zwischen B und C.

4) Ist μ der Brechungsexponent für den Uebergang von einem Medium A in ein andres B, so ist $\frac{1}{\mu}$ der Brechungsexponent für den Uebergang von dem Medium B in das Medium A.

Fig. 4.



Es sei nun O Fig. 4 ein Ort auf der Oberfläche der Erde, C der Mittelpunkt derselben, S der wahre Ort eines Sterns, CJ die Normale an dem Punkte J, in welchem der Lichtstrahl SJ die erste Schicht der Atmosphäre trifft. Ist dann der Brechungsexponent für diese erste Schicht bekannt, so kann man nach den Brechungsgesetzen die Richtung des gebrochenen Strahles finden und erhält dann für die zweite Schicht einen neuen Einfallswinkel. Betrachtet man nun die $n$te Schicht und ist CN die Linie vom Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte, in welchem der Lichtstrahl die $n$te Schicht trifft, ist ferner i_n der Einfallswinkel, f_n der Brechungswinkel, μ_n der Brechungsexponent vom leeren Raume in die $n$te, μ_{n+1} dasselbe für die $n+1$ste Schicht, so hat man *):

$$\sin i_n : \sin f_n = \mu_{n+1} : \mu_n.$$

Ist dann N' der Punkt, in welchem der Lichtstrahl die $n+1$ste Schicht trifft, so hat man im Dreiecke NCN', wenn man die Entfernungen der Punkte N und N' vom Mittelpunkte der Erde mit r_n und r_{n+1} bezeichnet:

$$\sin f_n : \sin i_{n+1} = r_{n+1} : r_n,$$

und aus der Verbindung dieser Gleichung mit der ersteren:

$$r_n \sin i_n \mu_n = r_{n+1} \sin i_{n+1} \mu_{n+1}.$$

*) Diese Brechungsexponenten sind Brüche, deren Zähler gröfser als der Nenner. Für Schichten an der Oberfläche der Erde ist z. B. $\mu = 1.000294$ oder nahe $\frac{3400}{3399}$.

Da also das Product aus der Entfernung vom Mittelpunkt in den Brechungsexponenten und den Sinus des Einfallswinkels für alle Schichten der Atmosphäre dasselbe ist, so erhält man, wenn man mit γ eine Constante bezeichnet, als allgemeines Gesetz der Refraction:

$$r \cdot \mu \cdot \sin i = \gamma, \qquad (a)$$

wo r, μ und i demselben Punkte der Atmosphäre zugehören müssen. Für die Oberfläche der Erde wird nun i, d. h. der Winkel, welchen die letzte Tangente des Lichtstrahls mit der Normale bildet, gleich der scheinbaren Zenithdistanz z des Sterns. Nennt man also a den Halbmesser der Erde und μ_0 den Brechungsexponenten für eine Luftschicht an der Oberfläche der Erde, so erhält man zur Bestimmung der Constante γ die Gleichung:

$$a \mu_0 \sin z = \gamma. \qquad (b)$$

Nimmt man nun an, daſs die Dichtigkeit der Atmosphäre sich stetig ändert, daſs also die Höhe der Schichten, innerhalb welcher die Dichtigkeit als constant angesehen werden darf, unendlich klein ist, so wird der Weg des Lichtstrahls durch die Atmosphäre eine Curve, deren Gleichung man bestimmen kann. Führt man Polarcoordinaten ein und nennt v den Winkel, welchen jedes r mit dem Radius CO macht, so erhält man leicht:

$$r \frac{dv}{dr} = \operatorname{tang} i. \qquad (c)$$

Die Richtung der letzten Tangente ist, wie man eben gesehen hat, die scheinbare Zenithdistanz z, dagegen ist die wahre Zenithdistanz ζ der Winkel, welchen die verlängerte ursprüngliche Richtung SJ des Lichtstrahls mit der Normale macht. Dies ζ hat zwar seinen Scheitel in einem andern Punkte als dem, in welchem sich das Auge des Beobachters befindet; da indessen die Atmosphäre nur von geringer Höhe ist, die leuchtenden Körper dagegen sehr weit entfernt sind, überdies auch die Refraction selbst ein kleiner Winkel ist, so wird der Unterschied zwischen dem Winkel ζ und der wahren Zenithdistanz, die man in O beobachtet hätte, nur sehr unbedeutend sein. Selbst beim Monde, wo dieser Unterschied noch am merklichsten ist, beträgt derselbe noch nicht eine Bogensecunde im Horizonte. Man kann daher annehmen, daſs der Winkel ζ die wahre Zenithdistanz ist.

An dem Punkte N, für welchen die veränderlichen Gröſsen ζ, r und μ gelten, lege man nun eine Tangente an den Lichtstrahl, die mit der Normale CO den Winkel ζ' bildet; dann ist:

$$\zeta' = \zeta + v. \qquad (d)$$

Differenzirt man dann die allgemeine Gleichung (a) logarithmisch, so erhält man:

$$\frac{dr}{r} + \operatorname{cotang} \zeta \,.\, d\zeta + \frac{d\mu}{\mu} = 0$$

und aus dieser Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (c) und (d):

$$d\zeta' = -\operatorname{tang} \zeta \frac{d\mu}{\mu},$$

oder, wenn man tang ζ eliminirt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{\sin \zeta}{\sqrt{1 - \sin \zeta^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{r^2 \mu^2 - \gamma^2}}$$

und für γ seinen Werth $\frac{a \sin z}{\mu_0}$ setzt:

$$d\zeta' = -\frac{\frac{a}{r} \sin z \, \mu_0 \, d\mu}{\mu \sqrt{\mu^2 - \frac{a^2}{r^2} \sin z^2 \, \mu_0{}^2}}.$$

Das Integral dieser Gleichung, genommen zwischen den Grenzen $\zeta' = \zeta$ und $\zeta' = z$, giebt dann den Betrag der Refraction. Setzt man:

$$\frac{a}{r} = 1 - s,$$

so kann man die Gleichung auch so schreiben:

$$d\zeta' = -\frac{(1 - s) \sin z \, d\mu}{\mu \sqrt{\cos z^2 - \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_0{}^2}\right) + (2s - s^2) \sin z^2}}. \qquad (e)$$

Um diese Gleichung zu integriren, müſste man nun s als Function von μ kennen. Die letztere Gröſse selbst ist von der Dichtigkeit abhängig und zwar lehrt die Physik, daſs die Gröſse $\mu^2 - 1$, die man auch die brechende Kraft nennt, der Dichtigkeit proportional ist. Führt man also als neue Veränderliche die Dichtigkeit ϱ ein, gegeben durch die Gleichung:

$$\mu^2 - 1 = c\varrho,$$

wo c eine Constante ist, so erhält man:

$$d\zeta' = -\frac{\frac{1}{2}(1-s)\sin z \,.\, c \,.\, \frac{d\varrho}{1+c\varrho_0}}{\frac{1+c\varrho}{1+c\varrho_0}\sqrt{\cos z^2 - \left(1-\frac{1+c\varrho}{1+c\varrho_0}\right) + (2s-s^2)\sin z^2}},$$

oder, wenn man setzt:

$$\frac{c\varrho_0}{1+c\varrho_0} = \frac{\mu_0{}^2 - 1}{\mu_0{}^2} = 2\alpha, \quad \text{also} \quad \frac{c\varrho_0 - c\varrho}{1+c\varrho_0} = 2\alpha\left(1-\frac{\varrho}{\varrho_0}\right),$$

$$d\zeta' = -\frac{\alpha(1-s)\sin z \frac{d\varrho}{\varrho_0}}{\left[1-2\alpha\left(1-\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right]\sqrt{\cos z^2 - 2\alpha\left(1-\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) + (2s-s^2)\sin z^2}}. \quad (f)$$

Der Coefficient

$$1-2\alpha\left(1-\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)$$

ist das Quadrat des Verhältnisses des Brechungsexponenten für eine Schicht, deren Radius r, zum Brechungsexponenten einer Schicht an der Oberfläche der Erde. Da aber für die Grenze der Atmosphäre $\mu = 1$, dagegen für die Brechung vom leeren Raum in Schichten an der Oberfläche der Erde $\mu_0 = \frac{3400}{3399}$ ist, so liegt das Verhältniſs $\frac{\mu}{\mu_0}$ immer zwischen diesen engen Grenzen. Die Gröſse α ist daher klein und man kann deshalb statt des veränderlichen Factors

$$1-2\alpha\left(1-\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)$$

seinen mittleren Werth zwischen den zwei äuſsersten Grenzen 1 und $1-2\alpha$, d. h. den constanten Werth $1-\alpha$, nehmen.

Setzt man noch zur Abkürzung $1-\frac{\varrho}{\varrho_0} = w$, wo also w eine noch näher zu bestimmende Function von s ist, und ändert das Zeichen von $d\zeta'$, sodaſs der zu findende Werth der Refraction so zu verstehen ist, daſs man denselben zu dem scheinbaren Orte algebraisch addiren muſs, um den wahren zu erhalten, so wird:

$$d\zeta' = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{(1-s)\sin z\, dw}{\sqrt{\cos z^2 - 2\alpha w + (2s-s^2)\sin z^2}}$$

oder da s immer klein ist, indem für eine Höhe der Atmosphäre von 10 Meilen der gröſste Werth von s nur 0,0115 ist:

$$d\zeta' = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\sin z\, d\,w}{\sqrt{\cos z^2 - 2\,\alpha\,w + 2\,s \sin z^2}}$$
$$- \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{s \sin z\,[\cos z^2 - 2\,\alpha\,w] + s^2 \sin z^3}{[\cos z^2 - 2\,\alpha\,w + 2\,s \sin z^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (g),$$

wo schon das zweite Glied, wie man später sehen wird, immer so klein ist, daſs es vernachlässigt werden kann, weshalb zunächst nur das erste Glied in Betracht gezogen wird. Um den Betrag der Refraction zu erhalten, muſs man den Ausdruck von $d\,\zeta'$ nach s integriren zwischen den Grenzen $s = 0$ und $s = H$, wo H die Höhe der Atmosphäre ist.

Setzt man nun:

$$w = F(s)$$

und führt die neue Veränderliche x ein, gegeben durch die Gleichung:

$$-\frac{\alpha F(s)}{\sin z^2} + s = x$$

oder, wenn man setzt:

$$\frac{\alpha F(s)}{\sin z^2} = \varphi(s),$$
$$s = x + \varphi(s),$$

so hat man nach dem Lagrangeschen Lehrsatze:

$$F(s) = F(x) + \varphi(x) \frac{d F(x)}{d x} + \frac{1}{1\,.\,2} \frac{d\left[\varphi(x)^2 \frac{d F(x)}{d x}\right]}{d x}$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{d^2 \left[\varphi(x)^3 \frac{d F(x)}{d x}\right]}{d x^2} + \ldots.$$

also:

$$d F(s) = d F(x) + d\left[\varphi(x) \frac{d F(x)}{d x}\right] + \frac{1}{1\,.\,2} \frac{d^2 \left[\varphi(x)^2 \frac{d F(x)}{d x}\right]}{d x^2}$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{d^3 \left[\varphi(x)^3 \frac{d F(x)}{d x}\right]}{d x^2} + \ldots \qquad (h).$$

Um dann hieraus den Ausdruck für die Refraction zu erhalten, muſs jedes Glied mit $\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z^2 + 2\,x \sin z^2}}$ multiplicirt und zwischen den oben angeführten Grenzen integrirt werden. Um aber diese Integrationen ausführen zu können, ist es nöthig, w als Function von s zu bestimmen, d. h. das Gesetz zu finden, nach welchem die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe abnimmt.

7. Es seien p_0 und τ_0 der Luftdruck und die Temperatur an der Oberfläche der Erde, p und τ dieselben Gröfsen in der Höhe x über der Oberfläche der Erde, m die Ausdehnung der Luft für einen Grad des Fahrenheitschen Thermometers, so hat man die Gleichung:

$$p = \frac{1 + m\tau}{1 + m\tau_0} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_0} \cdot p_0. \qquad (\alpha)$$

Denn denkt man sich ein Volumen Luft unter dem Drucke p_0, bei der Temperatur τ_0 und mit der Dichte ϱ_0, und verändert den Druck zu p, während die Temperatur dieselbe bleibt, so wird nach dem Mariotte'schen Gesetze die Dichte werden $\frac{p}{p_0} \cdot \varrho_0$. Wächst dann auch die Temperatur zu τ, so wird die neue Dichte

$$\varrho = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1 + m\tau_0}{1 + m\tau} \varrho_0,$$

woraus die obige Gleichung folgt. Es ist also $\frac{p}{\varrho(1 + m\tau)}$ oder der Quotient: Druck dividirt durch Dichtigkeit und reducirt auf eine feste Temperatur, immer eine constante Gröfse. Nennt man nun l_0 die Höhe einer Luftsäule von der Dichtigkeit ϱ_0 und Temperatur τ_0, die bei der an der Oberfläche der Erde stattfindenden Schwere g_0 dem Drucke p_0 das Gleichgewicht hält, so hat man:

$$p_0 = (1 + m\tau_0)\,\varrho_0\, g_0 \,.\, l_0, \qquad (\beta)$$

l_0 ist also die Höhe, welche die Atmosphäre haben würde, wenn die Dichtigkeit und Temperatur für alle Schichten dieselbe wie an der Oberfläche wäre. Nimmt man für τ_0 die Temperatur 8^0 Réaumur $= 10^0$ Celsius $= 50^0$ Fahrenheit, so ist nach Bessel

$$l_0 = 4226.05 \text{ Toisen},$$

gleich der mittleren Barometerhöhe an der Oberfläche des Meeres, multiplicirt mit der relativen Dichtigkeit des Quecksilbers gegen Luft.

Erhebt man sich dann in der Atmosphäre um dr, so ist die Abnahme des Druckes gleich der kleinen Luftsäule $\varrho\, dr$, multiplicirt in die der Entfernung r entsprechende Schwere, also:

$$dp = -g_0 \frac{a^2}{r^2} \cdot \varrho \cdot dr,$$

und wenn man diese Gleichung durch die Gleichung (β) dividirt und

$$\frac{a}{r} = 1 - s$$

setzt, auch die Temperatur von τ_0 abrechnet, sodaſs τ die Temperatur weniger 50° Fahr. ist, so erhält man:

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{a\,ds}{l_0}(1-w)$$
$$\text{und: } \frac{p}{p_0} = (1+m\tau)(1-w). \qquad (\gamma);$$

Aus der Gleichung (α) und aus diesen beiden Gleichungen findet man, wenn man p eliminirt, $1-w$ und somit die Dichtigkeit durch s und $1+m\tau$ ausgedrückt. Die Grösse $1+m\tau$ ist selbst eine Function von s; da man aber das Gesetz der Abnahme der Temperatur mit der Höhe nicht kennt, so ist man genöthigt, zu einer Hypothese seine Zuflucht zu nehmen und dann zu sehen, ob die damit berechneten Refractionen den beobachteten entsprechen. Die verschiedenen Refractions-Theorien unterscheiden sich somit durch die Annahme, die in Betreff der Abnahme der Temperatur in der Atmosphäre gemacht ist.

Nimmt man die Temperatur als constant an, so wird:

$$\frac{p}{p_0} = 1 - w, \quad \text{also } \frac{dp}{p_0} = d(1-w),$$

mithin erhält man in Verbindung mit der ersten der Gleichungen (γ):

$$\frac{d(1-w)}{1-w} = -\frac{a}{l_0}\,ds,$$

$$\text{mithin: } 1 - w = e^{-\frac{a}{l_0}s},$$

da die nach der Integration hinzuzufügende Constante 0 ist. Diese Hypothese, die Newton's Theorie zum Grunde liegt, weicht aber so stark von der Wahrheit ab, daſs die danach berechneten Refractionen die beobachteten nicht darstellen.

Nimmt man für $1+m\tau$ einen Exponentialausdruck $e^{-\frac{as}{h}}$ an, so kommt man auf Bessel's Form. Aus der Verbindung der beiden obigen Gleichungen erhält man dann:

$$\frac{d(1-w)}{1-w} = \left[\frac{a}{h} - \frac{a}{l_0}\,e^{\frac{as}{h}}\right]ds,$$

woraus folgt, wenn man die nach der Integration hinzuzufü-

gende Constante so bestimmt, dafs $1-w$ gleich Eins ist für $s=0$:

$$1-w=e^{-\frac{h}{l_0}\left[e^{\frac{as}{h}}-1\right]+\frac{a}{h}s},$$

wofür man auch den Näherungsausdruck nehmen kann:

$$1-w=e^{-\frac{h-l_0}{hl_0}as} \qquad (\delta).$$

Bessel bestimmt dann die Constante h so, dafs die nach dieser Hypothese berechneten Refractionen den beobachteten so nahe als möglich kommen. Die mit diesem Werthe von h aus der Formel $1+m\tau=e^{-\frac{as}{h}}$ folgende Abnahme der Temperatur stimmt aber durchaus nicht mit der an der Oberfläche beobachteten. Man erhält nämlich für $s=0$ aus der Formel: $\frac{d\tau}{ds}=-\frac{a}{hm}$, und da auch $\frac{ds}{dr}=\frac{1}{a}$ für $s=0$, so erhält man:

$$\frac{d\tau}{dr}=-\frac{1}{hm}$$

für die Oberfläche der Erde. Da nun m für einen Grad des Fahrenheitschen Thermometers gleich 0.0020243 und h nach Bessel gleich 116865.8 Toisen genommen werden mufs, so erhält man $\frac{d\tau}{dr}=-\frac{1}{237}$ oder die Abnahme der Temperatur von 1° Fahrenheit für eine Erhebung von 237 Toisen über der Erdoberfläche, während nach den Beobachtungen eine solche Abnahme schon für die Erhebung von etwa 47 Toisen stattfindet.

Ivory nimmt daher ebenfalls eine Exponentialfunction für $1+m\tau$ an, bestimmt dieselbe aber so, dafs die Abnahme der Temperatur an der Oberfläche der Erde dargestellt wird. Er nimmt nämlich:

$$1-w=e^{-u},$$

wo u eine Function von s ist, ferner:

$$1+m\tau=1-f(1-e^{-u}).$$

Nach den Gleichungen (γ) erhält man dann leicht:

$$\frac{a}{l_0}\,ds=(1-f)\,du+2fe^{-u}du,$$

$$\text{also:}\quad \frac{a}{l_0}\,s=(1-f)\,u+2f(1-e^{-u}). \qquad (\varepsilon)$$

Aus diesen Gleichungen findet man für $r=a$:

$$\frac{d\tau}{dr}=-\frac{1}{l_0 m}\cdot\frac{f}{1+f}$$

und man sieht, dafs man für f etwa $\frac{2}{9}$ nehmen mufs, um $\frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{47}$ zu machen, also die Beobachtungen an der Oberfläche der Erde darzustellen.

Andere Hypothesen sind noch von Laplace, Young, Lubbock und Andern aufgestellt. Hier sollen aber nur die beiden von Bessel und Ivory eingeführten näher betrachtet werden, da die danach berechneten Refractionen am häufigsten benutzt werden, auch die übrigen sich ähnlich behandeln lassen.

8. Setzt man in der Gleichung (δ)

$$\frac{h - l_0}{h\,l_0}\,a = \beta,$$

so ist in Bessel's Hypothese:

$$w = F(s) = 1 - e^{-\beta s},$$

es wird daher:

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x}$$

$$\varphi(x) = -\frac{\alpha}{\sin z^2}\,(e^{-\beta x} - 1).$$

Man erhält daher:

$$dF(x)\,\varphi(x)^n = (-1)^n \frac{\alpha^n}{\sin z^{2n}} \left\{ e^{-(n+1)\beta x} - n\,.\,e^{-n\beta x} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,e^{-(n-1)\beta x} - \ldots \right\},$$

mithin, da

$$\frac{d^n\,e^{-px}}{dx^n} = (-1)^n\,p^n\,e^{-px},$$

$$\frac{d^n\,[dF(x)\,\varphi(x)^n]}{dx^n} = \frac{\alpha^n\,\beta^{n+1}}{\sin z^{2n}} \left\{ (n+1)^n\,e^{-(n+1)\beta x} - n\,.\,n^n\,e^{-n\beta x} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,(n-1)^n\,e^{-(n-1)\beta x} - \ldots \right\}$$

und das allgemeine Glied des Differentials $d\zeta'$ wird daher:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1\ldots n}\,\frac{\alpha^n\,\beta^{n+1}}{\sin z^{2n}}\,\frac{\sin z}{\sqrt{\cos z^2 + 2x\sin z^2}} \cdot \left\{ (n+1)^n\,e^{-(n+1)\beta x} \right.$$
$$\left. - n\,.\,n^n\,e^{-n\beta x} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,(n-1)^n\,e^{-(n-1)\beta x} - \ldots \right\},$$

wo für n alle Zahlen von 0 ab zu setzen sind. Alle diese Glieder sind dann zwischen den Grenzen $s = 0$ und $s = H$ zu integriren, wofür man auch ohne merklichen Irrthum die Grenzen 0 und ∞ nehmen kann, da $e^{-\beta s}$ für $s = H$ äufserst klein ist *). Die hier vorkommenden Integrale lassen sich

*) $1 - w$ sollte eigentlich gleich Null sein an der Grenze der Atmosphäre, während es erst 0 wird für $0 = \infty$. Die Formel setzt also eine Atmosphäre von unendlicher Ausdehnung voraus, da aber die Exponentialfunction schnell abnimmt, so wird der Unterschied unmerklich.

auf die in No. 18 der Einleitung eingeführten ψ Functionen zurückführen und wenn man die dort gegebene Formel (8) anwendet, so findet man das allgemeine Glied des Ausdrucks für die Refraction:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\,.\,\frac{1}{1\,.\,2\ldots n}\,\frac{\alpha^n\beta^n}{\sin z^{2n}}\Big\{(n+1)^{\frac{2n-1}{2}}\psi(n+1)-n\,.\,n^{\frac{2n-1}{2}}\psi(n)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{\frac{2n-1}{2}}\psi(n-1)-\ldots\Big\},$$

mithin, wenn man die Refraction durch $\delta\zeta$ bezeichnet:

$$\delta\zeta=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\left\{\begin{array}{l}\psi(1)\\ +\dfrac{\alpha\beta}{\sin z^2}\left[2^{\frac{1}{2}}\psi(2)-\psi(1)\right]\\ +\dfrac{\alpha^2\beta^2}{1\,.\,2\,.\sin z^4}\left[3^{\frac{3}{2}}\psi(3)-2\,.\,2^{\frac{3}{2}}\psi(2)+\psi(1)\right]\\ \text{etc.}\end{array}\right\}\quad(i)$$

ein Ausdruck, für den man, da

$$1-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots=e^{-x}$$

auch schreiben kann:

$$\delta\zeta=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\left\{\begin{array}{l}e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin z^2}}\psi(1)\\ +\dfrac{\alpha\beta}{\sin z^2}\,2^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin z^2}}\psi(2)\\ +\dfrac{\alpha^2\beta^2}{1\,.\,2\,.\sin z^4}\,3^{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{3\alpha\beta}{\sin z^2}}\psi(3)\\ +\ldots.\end{array}\right\}\quad(k)$$

9. In Ivory's Hypothese ist

$$w=F(u)=1-e^{-u},$$

und wenn man $\frac{l_0}{a}=\frac{1}{\beta}$ setzt:

$$s=\frac{1-f}{\beta}u+\frac{2f}{\beta}(1-e^{-u}).$$

Führt man dann die neue Veränderliche x ein, gegeben durch die Gleichung:

$$-\frac{\alpha w}{\sin z^2}+s=\frac{x}{\beta},$$

so geht der Differentialausdruck der Refraction nach Gleichung (g) in No. 6 über in:

$$d\zeta' = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\sin z \,.\, dF(u)}{\sqrt{\cos z^2 + \frac{2\sin z^2}{\beta} x}},$$

$$\text{wo} \quad x = u - \frac{\alpha\beta}{\sin z^2}(1-e^{-u}) - fu + 2f(1-e^{-u}).$$

Setzt man also wieder:

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

$$\varphi(x) = \frac{\alpha\beta}{\sin z^2}(1-e^{-x}) + fx - 2f(1-e^{-x}),$$

so erhält man daher wieder nach Formel (h):

$$dF(u) = e^{-x} + \frac{d[\varphi(x)\,e^{-x}]}{dx} + \frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{d^2[\varphi(x)^2 e^{-x}]}{dx^2} + \dots$$

Die zwei ersten Glieder, die allein bedeutend sind, geben:

$$e^{-x} + \frac{d[\varphi(x)e^{-x}]}{dx} = e^{-x} + \frac{\alpha\beta}{\sin z^2}[2e^{-2x} - e^{-x}] + f(1-x)e^{-x} - 2f[2e^{-2x} - e^{-x}].$$

Multiplicirt man diese Glieder mit $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sin z}{\sqrt{\cos z^2 + \frac{2\sin z^2}{\beta}x}}$ und integrirt wieder nach x zwischen den Grenzen 0 und ∞, so erhält man nach den Formeln (9) und (10) in No. 18 der Einleitung:

$$d\zeta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\left\{\begin{array}{l} \psi(1) \\ + \frac{\alpha\beta}{\sin z^2}\left[2^{\frac{1}{2}}\psi(2) - \psi(1)\right] - 2f\left[2^{\frac{1}{2}}\psi(2) - \psi(1)\right] \\ \qquad + f\left[(\tfrac{1}{2}+T^2)\psi(1) - \frac{T}{2}\right] \end{array}\right\} \quad (l)$$

wo

$$T = \text{cotang}\, z \sqrt{\frac{\beta}{2}}.$$

Die höheren Glieder würden complicirt werden, aber wegen der numerischen Werthe von $\alpha\beta$ und f wird schon das nächste Glied so klein, daſs man es vernachlässigen kann. Für den Horizont, wo das Glied am gröſsten wird, erhält man nämlich, wenn man $2f - \alpha\beta = g$ setzt:

$$\frac{d^2(\varphi(x)^2 e^{-x})}{dx^2} = f^2x^2e^{-x} - (4f^2 + 2fg)xe^{-x} + 8fgxe^{-2x} + (2f^2 + g^2 + 4fg)e^{-x}$$
$$-(8fg + 8g^2)e^{-2x} + 9g^2e^{-3x}.$$

Dividirt man dann jedes Glied mit $\sqrt{\frac{2x}{\beta}}$ und integrirt zwischen den Grenzen 0 und ∞, so erhält man, wenn man die in No. 16 der Einleitung gegebenen Formeln für $\Gamma(\frac{1}{2})$, $\Gamma(\frac{3}{2})$, $\Gamma(\frac{5}{2})$, etc. anwendet:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{\beta}{2}}\left[\tfrac{3}{4}f^2 - 3fg(\sqrt{2}-1) + g^2(1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})\right]$$

und wenn man die in der folgenden Nummer gegebenen numerischen Werthe einsetzt, so findet man für dieses Glied den Maximum-Werth im Horizonte gleich 2″.11. Das nächste Glied würde nur 0″.18 geben. In der Differentialgleichung (g) in No. 6 ist auch nur das erste Glied mitgenommen, das zweite Glied wird ebenfalls klein und giebt für den Horizont etwa eine halbe Secunde. Da dies letztere Glied ein negatives Zeichen hat, so wird daher die nach Formel (l) berechnete Horizontalrefraction bis auf etwa 1″.5 genau.

10. Die numerische Berechnung der Refraction nach der Formel (k) oder (l) ist nun keinen Schwierigkeiten unterworfen, da die Werthe der Functionen ψ aus den Tafeln entnommen oder nach den in No. 17 der Einleitung gegebenen Methoden berechnet werden können.

Nach Bessel ist die Constante α für die Temperatur 50° Fahrenheit und für den Barometerstand von 29.6 englischen Zollen, auf die Normaltemperatur reducirt:

$$\alpha = 57''.4994 \text{ also } \log \frac{\alpha}{1-\alpha} = 1.759785$$

$$\text{und } h = 116865.8 \text{ Toisen.}$$

Da $l_0 = 4226.05$ Toisen, so erhält man, wenn man mit Bessel für a den Krümmungshalbmesser der Greenwicher Sternwarte 3269805 Toisen nimmt:

$$\beta = 745.747 \text{ also } \log \frac{\alpha}{1-\alpha} \sqrt{2\beta} = 3.347295.$$

Berechnet man nun z. B. die Refraction für die Zenithdistanz 80°, so wird für diesen Fall $\log T_1 = 0.53210$ etc. und man erhält:

	$\log n^{\frac{1}{2}(2n-3)}$	$\log \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\alpha\beta}{\sin z^2}\right)^{n-1}$	$\log \psi(n)$	$\log e^{-n\frac{\alpha\beta}{\sin z^2}}$
$n = 1$	0.00000	0.00000	9.14983	9.90691
$n = 2$	0.15051	9.33113	9.00745	9.81382
$n = 3$	0.71568	8.36122	8.92228	9.72073
$n = 4$	1.50515	7.21523	8.86128	9.62763
$n = 5$	2.44640	5.94430	8.81372	9.53454
$n = 6$	3.5017	4.57645	8.77473	9.44145
$n = 7$	4.6480	3.12943	8.74168	9.34836
$n = 8$	5.8701	1.6155	8.7130	9.2553
$n = 9$	7.157	0.043	8.688	9.162
$n = 10$	8.500	8.420	8.665	9.069

Die horizontalen Reihen geben die einzelnen Glieder innerhalb der Klammer in Formel (k) und wenn man die Summe mit der Constante $\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}$ multiplicirt, so erhält man 314″.91, genau mit Bessel's Tafeln übereinstimmend.

Bei weitem einfacher ist die Berechnung von Ivory's Formel. Hier wird:

$$\log \alpha\beta = 9.333826, \quad \log \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta} = 3.354594, \quad f = \tfrac{2}{5}.$$

Berechnet man nun nach Formel (l) die Refraction, so wird:

$$\log T_1 = 0.540098 \qquad \log T_2 = 0.690613$$
$$\log \psi(1) = 9.142394 \quad \log \psi(2) = 8.999757$$

und damit geben die von f unabhängigen Glieder 315″. 32, während die in f multiplicirten Glieder — 0″. 12 geben, sodafs die Refraction wird: 315″. 20, nahe mit Bessel übereinstimmend. Diese Uebereinstimmung findet auch noch bis etwa 86° statt, bis wohin die berechneten Refractionen die beobachteten gut darstellen; nahe am Horizonte sind die Besselschen Refractionen zu grofs, während die nach Ivory's Theorie berechneten zu klein sind. Für so grofse Zenithdistanzen ist es daher am zweckmäfsigsten, wie es Bessel gethan hat, die Refractionen aus Beobachtungen herzuleiten und in Tafeln zu bringen.

Für die Horizontalrefraction erhält man nämlich nach Bessel, da in diesem Falle

$$\psi(r) = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

wird:

$$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{\beta}{2}}\sqrt{\pi}\left[e^{-\alpha\beta} + \alpha\beta \,.\, 2^{\frac{1}{2}} \,.\, e^{-2\alpha\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2}{1\,.\,2}\, 3^{\frac{3}{2}}\, e^{-3\alpha\beta} + \ldots\right]$$

und wenn man die numerischen Werthe einsetzt, gleich 36′5″.

Nach Ivory wird dagegen die Refraction für den Horizont:

$$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\frac{\beta}{2}}\,[1 + \alpha\beta(\sqrt{2}-1) - f(2\sqrt{2} - \tfrac{5}{2})]$$
$$= 33'\,58'',$$

während nach den Beobachtungen die Horizontalrefraction etwa 34′ 50″ ist, also etwa in der Mitte liegt.

Solange die Zenithdistanz nicht zu grofs ist, ist es nicht nöthig, die strengen Formeln (k) und (l) anzuwenden, sondern

man kann dieselben in Reihen entwickeln. Substituirt man in Formel (l) für $\psi(1)$ und $\psi(2)$ die in No. 17 der Einleitung gefundenen Reihen und bedenkt daſs $\frac{1}{\sin z^2} = 1 + \text{cotg}\, z^2$, so erhält man*):

$$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\Big[(1+\tfrac{1}{2}\alpha)\,\text{tang}\, z - \Big(\frac{1}{\beta} - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{9}{4}\frac{\alpha}{\beta}\Big)\text{tang}\, z^3 + \Big(\frac{3}{\beta^2} - \tfrac{9}{4}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{105}{8}\frac{\alpha}{\beta^2}\Big)\text{tang}\, z^5 - \Big(\frac{15}{\beta^3} - \frac{105}{8}\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1575}{16}\frac{\alpha}{\beta^3}\Big)\text{tang}\, z^7 + \ldots\Big] \quad (l_1)$$

oder wenn man die numerischen Werthe substituirt:

$$\delta z = [1.759845]\,\text{tang}\, z - [8.821943]\,\text{tang}\, z^3 + [6.383727]\,\text{tang}\, z^5 - [4.180257]\,\text{tang}\, z^7,$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen Logarithmen sind.

Die in f multiplicirten Glieder geben ferner:

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha} f \Big\{\frac{3}{2\beta^2}\,\text{tang}\, z^5 - \frac{75}{4\beta^3}\,\text{tang}\, z^7 + \frac{1785}{8\beta^4}\,\text{tang}\, z^9 - \frac{46305}{16\beta^5}\,\text{tang}\, z^{11}$$

oder (l_2)

$$-\Big\{[5.506187]\,\text{tang}\, z^5 - [3.714510]\,\text{tang}\, z^7 + [1.901468]\,\text{tang}\, z^9 - [9.018568]\,\text{tang}\, z^{11}\Big\}$$

Für 75° findet man hieraus $\delta z = 211''.39$ und den von f abhängigen Theil der Refraction gleich $-0''.02$, also das Ganze $211''.37$, übereinstimmend mit der strengen Formel.

11. Die obigen Formeln geben die Refraction für jede beliebige Zenithdistanz, aber nur für eine bestimmte Dichtigkeit der Luft, nämlich derjenigen, welche bei der Temperatur 50° Fahrenheit und bei dem Barometerstande von 29.6 engl. Zollen stattfindet. Die bei diesem Normalzustande der Atmosphäre stattfindende Refraction nennt man die mittlere Refraction. Um daraus die Refraction für eine andere

---

*) Man findet nämlich:

$$\sqrt{2\beta}\,\psi(1) = \text{tang}\, z - \frac{1}{\beta}\,\text{tang}\, z^3 + \frac{3}{\beta^2}\,\text{tang}\, z^5 - \frac{15}{\beta^3}\,\text{tang}\, z^7 + \frac{105}{\beta^4}\,\text{tang}\, z^9 - \ldots$$

$$2^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\beta}\,\psi(2) = \text{tang}\, z - \frac{1}{2\beta}\,\text{tang}\, z^3 + \frac{3}{4\beta^2}\,\text{tang}\, z^5 - \frac{15}{8\beta^3}\,\text{tang}\, z^7 + \frac{105}{16\beta^4}\,\text{tang}\, z^9 - \ldots$$

Ivory giebt in den Phil. Transactions für 1823 eine andere Reihenentwickelung, die sich für alle Zenithdistanzen anwenden läſst.

Temperatur τ und den Barometerstand b zu berechnen, mufs man untersuchen, wie sich die Refraction mit der Dichtigkeit der Luft oder mit dem Stande der meteorologischen Instrumente, wovon dieselbe abhängt, ändert. Bezeichnet ε die Ausdehnung der Luft für einen Grad des Fahrenheitschen Thermometers, wofür Bessel aus den Beobachtungen den Werth

$$\varepsilon = 0.0020243$$

gefunden, so wird, wenn man ein Volumen Luft bei der Temperatur von 50° gleich 1 setzt, dasselbe Luftvolumen bei der Temperatur τ gleich $1 + \varepsilon(\tau - 50)$, es wird sich also die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur τ zur Dichtigkeit bei der Temperatur 50° wie $1 : 1 + \varepsilon(\tau - 50)$ verhalten. Ferner ist aber nach dem Mariotteschen Gesetze die Dichtigkeit der Luft bei dem Barometerstande b zu der Dichtigkeit bei dem Barometerstande 29.6 wie $b : 29.6$. Bezeichnet also ϱ die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur τ und der Barometerhöhe b, ϱ_0 aber die Dichtigkeit bei dem Normalzustande der Atmosphäre, so hat man:

$$\varrho = \frac{\varrho_0 \cdot \frac{b}{29.6}}{1 + \varepsilon(\tau - 50)}$$

und da die Gröfse α in den Formeln für die Refraction, wenigstens für so kleine Aenderungen der Dichte als hier in Betracht kommen, der Dichtigkeit proportional ist, so würde man auch die wahre Refraction aus der mittleren durch die Formel:

$$\delta z' = \frac{\delta z \cdot \frac{b}{29.6}}{1 + \varepsilon(\tau - 50)}$$

erhalten, wenn α nur als Factor vorkäme, da man den Divisor $1 - \alpha$ wegen der Kleinheit von α als constant ansehen kann. Die Gröfse α kommt aber noch in dem Factor von $\frac{\alpha}{1-\alpha}$, der mit Z bezeichnet werden soll, vor, auch ist die Gröfse β mit der Temperatur veränderlich, da dieselbe von l_0 abhängt, also bei einer Temperatur τ von

$$l = l_0\,[1 + \varepsilon(\tau - 50)]$$

wenn man die Höhe einer Atmosphäre von gleichförmiger

Dichtigkeit bei der Temperatur τ mit l bezeichnet. Man erhält somit die wahre Refraction aus der Formel:

$$\delta z' = \frac{\delta z}{1+\varepsilon(\tau-50)} \cdot \frac{b}{29.6} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{dZ}{d\tau}(\tau-50) + \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{dZ}{db}(b-29.6), \quad (m)$$

da aber der Einfluſs der beiden letzten Glieder gering ist, so kann man zur Bequemlichkeit der Berechnung setzen:

$$\delta z' = \frac{\delta z}{[1+\varepsilon(\tau-50)]^{1+p}} \cdot \left(\frac{b}{29.6}\right)^{1+q}. \quad (m_1)$$

Entwickelt man dies aber, so erhält man, wenn die zweiten und höheren Potenzen und Producte von p und q vernachlässigt werden:

$$\delta z' = \frac{\delta z \cdot \frac{b}{29.6}}{1+\varepsilon(\tau-50)} \left\{1 - \varepsilon p(\tau-50) + q\left(\frac{b}{29.6}-1\right)\right\}, \quad (n)$$

wodurch man zur Bestimmung von p und q aus (m) und (n) die Gleichungen erhält:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{dZ}{d\tau} \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \delta z} \\ q &= +\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{dZ}{db} \cdot \frac{29.6}{\delta z}, \end{aligned} \quad (o)$$

wenn man auf der rechten Seite δz statt $\delta z \cdot \dfrac{\frac{b}{29.6}}{1+\varepsilon(\tau-50)}$ setzt.

Die Feuchtigkeit vermindert ebenfalls die Dichte der Atmosphäre und somit die brechende Kraft, aber, wie Laplace zuerst bemerkt hat, wird diese Verminderung durch die stärker brechende Kraft des Wasserdampfes fast ganz aufgehoben. Die Gröſse α wird daher durch die Feuchtigkeit fast nicht verändert und da der Einfluſs auf die Gröſsen p und q sehr unbedeutend ist, so wird auf die Feuchtigkeit bei der Berechnung der Refraction keine Rücksicht genommen.

Um die Ausdrücke für p und q zu erhalten, müssen die Differentialquotienten $\frac{dZ}{d\tau}$ und $\frac{dZ}{db}$ bestimmt werden. Die Rechnung wird hier nur für Ivory's Theorie durchgeführt, da sich dieselbe für die Besselsche Formel sehr ähnlich macht. Nach Formel (l) ist:

$$Z = \sqrt{2\beta}\,[(1-\lambda)\,\psi(1) + \lambda\sqrt{2}\,\psi(2) + fQ],$$

wo $\frac{\alpha\beta}{\sin z^2} = \lambda$ gesetzt ist. Daraus erhält man:

$$dZ = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\delta z\,(1-\alpha)}{\alpha}\,\frac{d\beta}{\beta} + \sqrt{2\beta}\,\lambda\left[\sqrt{2}\,\psi(2) - \psi(1)\right]\frac{d\lambda}{\lambda}$$
$$+ d\beta\sqrt{2\beta}\left\{(1-\lambda)\frac{d\psi(1)}{d\beta} + \lambda\sqrt{2}\,\frac{d\psi(2)}{d\beta}\right\} + f\frac{dQ}{d\beta}, \qquad (p)$$

da sich f mit der Temperatur und dem Barometerstande nicht ändert.

Nun ist $\psi(1) = e^{-T_1^2}\int\limits_{T}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$, wo $T_1 = \operatorname{cotang} z\sqrt{\frac{\beta}{2}}$,

$$\psi(2) = e^{-T_2^2}\int\limits_{T}^{\infty} e^{-t^2}\,dt, \quad \text{wo } T_2 = \operatorname{cotang} z\sqrt{\beta},$$

und da $\frac{d\psi(1)}{dT_1} = 2\,T_1\,\psi(1) - 1$ und $\frac{d\psi(2)}{dT_2} = 2\,T_2\,\psi(2) - 1$,
so wird das vorletzte Glied in (p):

$$+\frac{d\beta}{\beta}\cdot\sqrt{2\beta}\left[(1-\lambda)\left(T_1^{\,2}\psi(1) - \tfrac{1}{2}T_1\right) + \lambda\sqrt{2}\,.\left(T_2^{\,2}\psi(2) - \tfrac{1}{2}T_2\right)\right].$$

Der Factor Q besteht aus zwei Gliedern, von denen das erste in -2 multiplicirte, gleich dem Factor von λ im Ausdrucke von δz ist. Man nimmt dies daher mit, wenn man in dem zuletzt betrachteten Gliede $\lambda - 2f$ statt λ schreibt. Es bleibt daher nur noch das Glied:

$$+f\sqrt{2\beta}\left[\left(\tfrac{1}{2} + T_1^{\,2}\right)\psi(1) - \tfrac{1}{2}T_1\right]$$

übrig, durch dessen Differentiation man findet:

$$\frac{d\beta}{\beta}\sqrt{2\beta}\,.\,f\left\{\frac{T_1}{4} + \left(\tfrac{3}{2} + T_1^{\,2}\right)\left(T_1^{\,2}\psi(1) - \tfrac{1}{2}T_1\right)\right\},$$

sodafs der vollständige Ausdruck von dZ wird:

$$dZ = \tfrac{1}{2}\frac{d\beta}{\beta}\cdot\frac{\delta z(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{d\lambda}{\lambda}\sqrt{2\beta}\,.\,\lambda\left[\sqrt{2}\,\psi(2) - \psi(1)\right]$$
$$+\frac{d\beta}{\beta}\sqrt{2\beta}\left\{f\frac{T_1}{4} + \left(1 - \lambda + \tfrac{7}{2}f + fT_1^{\,2}\right)\left(T_1^{\,2}\psi(1) - 1\right)\right.$$
$$\left. + \sqrt{2}\,(\lambda - 2f)\left(T_2^{\,2}\psi(2) - \tfrac{1}{2}T_2\right)\right\}.$$

Da nun:

$$\alpha + d\alpha = \frac{\alpha^{\frac{b}{29.6}}}{1 + \varepsilon(\tau - 50)}, \quad \text{also } 1 + \frac{d\alpha}{\alpha} = \left(1 - \frac{29.6 - b}{29.6}\right)\left[1 - \varepsilon(\tau - 50)\right],$$

$$\text{so wird:}\quad \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{b - 29.6}{29.6} - \varepsilon(\tau - 50),$$

ebenso ist:

$$\beta + d\beta = \frac{a}{l_0} - \frac{a}{l_0}\,\varepsilon(\tau - 50), \quad \text{also } \frac{d\beta}{\beta} = -\varepsilon(\tau - 50);$$

endlich: $\lambda = \frac{\alpha\beta}{\sin z^2}$, also $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\beta}{\beta} = \frac{b - 29.6}{29.6} - 2\varepsilon(\tau - 50)$.

Danach wird also:

$$\delta z \,.\, q = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\,.\,\lambda\,[\sqrt{2}\,\psi(2) - \psi(1)]$$

$$\delta z \,.\, p = \tfrac{1}{2}\delta z + \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\,.\,2\lambda\,[\sqrt{2}\,\psi(2) - \psi(1)] \qquad (q)$$

$$+ \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\left\{\frac{T_1}{18} + (\tfrac{16}{9} - \lambda + \tfrac{2}{9}T_1^2)(T_1^2\psi(1) - \tfrac{1}{2}T_1)\right.$$

$$\left. + (\lambda - \tfrac{4}{9})(T_2^2\psi(2) - \tfrac{1}{2}T_2)\sqrt{2}\right\},$$

wo für f der Werth $\frac{2}{9}$ substituirt ist.

Berechnet man hiernach p und q für $z = 87^0$, wo $\delta z = 852''.79$, so findet man

$\log T_1 = 0.013175$, $\log[\sqrt{2}\,\psi(2) - \psi(1)] = 8.605021$,
$\log(T_1^2\psi(1) - \frac{1}{2}T_1) = 9.081168_n$, $\log T_2 = 0.163690$,
$\log(T_2^2\,\psi(2) - \frac{1}{2}T_2)\sqrt{2} = 9.191771_n$ und damit
$\delta z . q = 19''.71$, $\delta z \,.\, p = 185''.36$,

mithin

$$q = 0.0231,$$
$$p = 0.2173.$$

Wenn die Zenithdistanz nicht grofs ist, so kann man auch q und p durch die in No. 10 gegebenen Reihen finden. Differenzirt man nämlich die Coefficienten von $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ in (l_1) und (l_2) nach α und β, so findet man leicht die folgenden Reihen:

$$q\,\delta z = +[7.90399]\,\text{tang}\,z + [7.90146]\,\text{tang}\,z^3 - [5.66533]\,\text{tang}\,z^5$$
$$+ [3.54172]\,\text{tang}\,z^7 - \ldots$$

$$p\,dz = +[7.90399]\,\text{tang}\,z + [8.91567]\,\text{tang}\,z^3 - [6.70990]\,\text{tang}\,z^5$$
$$+ [4.56712]\,\text{tang}\,z^7 - \ldots,$$

wo die Coefficienten wieder Logarithmen sind.

Für $z = 75^0$ erhält man hiernach z. B.: $q = 0.0020$, $p = 0.0188$.

12. Zur vollständigen numerischen Berechnung der wahren Refraction nach Formel (m_1) bedarf man noch der auf die Normaltemperatur reducirten beobachteten Barometerhöhe. Nimmt man die Länge der Quecksilbersäule bei 50^0 als Einheit an und nennt man q die Ausdehnung des Quecksilbers vom Frost- bis zum Siedepunkte, wo $q = \frac{1}{55.5}$ ist, so wird die Barometerhöhe, die man bei einer Temperatur t beob-

achtet *), sich verhalten zu der, welche man bei der Temperatur 50° beobachtet hätte, wie $1 + \frac{q}{180}(t - 50) : 1$, oder es ist die auf 50° reducirte Länge der Quecksilbersäule b_{50}

$$b_{50} = b_t \frac{180}{180 + q(t - 50)}.$$

Ist ferner s die Ausdehnung der Scale vom Frost- bis zum Siedepunkte, wo wenn die Scale von Messing, $s = 0.0018782$ ist, so wird, wenn man die Länge der Scale bei 50° als Einheit annimmt:

$$b_t : b_{50} = 1 : 1 + \frac{s}{180}(t - 50).$$

Es wird mithin die bei einer Temperatur t beobachtete Barometerhöhe auf 50° reducirt geben, wenn man auf die Ausdehnung des Quecksilbers und der Scale Rücksicht nimmt:

$$b_{50} = b_t \frac{180 + s(t - 50)}{180 + q(t - 50)}.$$

Die Normal-Länge des englischen Zolles gilt aber nicht für 50°, sondern für 62°, daher ist bei der Temperatur 50° die Barometerhöhe an einer Scale gemessen, die zu klein ist, und man mufs daher den obigen Werth von b_{50} noch mit $1 + \frac{12s}{180}$ dividiren, sodafs endlich:

$$b_{50} = b_t \frac{180 + s(t - 50)}{180 + q(t - 50)} \cdot \frac{180}{180 + 12s}.$$

Wäre die Barometerscale in Pariser Linien getheilt und das Thermometer ein Réaumur'sches, so würde, da die Normallänge des Pariser Zolls für 13° Réaumur gilt und 50° Fahr. = 8° Réaum. ist:

$$b_8 = b_t \frac{80 + s(t - 8)}{80 + q(t - 8)} \cdot \frac{80}{80 + 5s}.$$

Damit hat man Alles, was zur Berechnung der Formel (m_1) nothwendig ist. Bezeichnet man mit f die Temperatur nach einem Fahrenheit'schen Thermometer, mit r dieselbe nach einem Réaumur'schen gemessen, mit $b^{(e)}$ und $b^{(l)}$ die Barometerhöhe in engl. Zollen und Par. Linien, und setzt:

---

*) Die Temperatur t wird an einem mit dem Barometer verbundenen Thermometer, dem innern Thermometer, beobachtet, während das die Temperatur der äufseren Luft angebende Thermometer zum Unterschiede das äufsere genannt wird.

$$B = \frac{b^{(e)}}{29.6} \frac{180}{180+12s} = \frac{b^{(l)}}{333.28} \cdot \frac{80}{80+5s}$$

$$T = \frac{180+s(f-50)}{180+q(f-50)} = \frac{80+s(r-8)}{80+q(r-8)}$$

$$\gamma = \frac{1}{1+\varepsilon.(f-50)} = \frac{1}{1+\frac{9}{4}\varepsilon(r-8)},$$

so erhält man, wenn man auch noch die mittlere Refraction $\delta z = a \operatorname{tang} z$ setzt:

$$\delta z' = a \operatorname{tang} z \,.\, \gamma^{1+p} (B\,.\,T)^{1+q} \tag{A}$$

also $\log \delta z' = \log a + \log \operatorname{tang} z + (1+p) \log \gamma + (1+q) (\log B + \log T)$.

Benutzt man dann Tafeln, die $\log a$ sowie $1+p$ und $1+q$ mit dem Argumente der scheinbaren Zenithdistanz, und $\log B$, $\log T$ und $\log \gamma$ mit den Argumenten: dem Barometerstande, dem innern und äufsern Thermometer geben, so wird dann die Berechnung der Refraction für irgend eine Zenithdistanz und irgend welchen Stand der meteorologischen Instrumente äufserst bequem. Diese Form, die sich wohl am meisten empfehlen dürfte, ist von Bessel bei seinen Refractionstafeln in den Tabulis Regiomontanis angewandt.

13. Der Annahme, die bei der Herleitung der Refractionsformeln gemacht ist, dafs die Atmosphäre aus concentrischen Schichten besteht, deren Dichte mit der Höhe über der Erdoberfläche nach einem bestimmten Gesetze abnimmt, wird der wirkliche Zustand der Atmosphäre nie entsprechen wegen der fortwährend vorgehenden Störungen des Gleichgewichts. Die theoretisch gefundenen Werthe der Refraction werden daher auch im Allgemeinen von den beobachteten abweichen und sich nur dem Mittel aus einer grofsen Menge von beobachteten annähern, da sie für einen mittleren Zustand der Atmosphäre gelten. Bessel hat die Refractionen seiner Tafeln mit den beobachteten verglichen und dadurch die wahrscheinlichen Fehler der Refraction für eine Beobachtung für die verschiedenen Zenithdistanzen bestimmt. Nach der in der Einleitung zu den Tab. Reg. pag. LXIII gegebenen Tafel wird danach der wahrscheinliche Fehler bei $45^0 \pm 0''.27$, bei $81^0 \pm 1''$, bei $85^0 \pm 1''.7$, bei $89^0\ 30' \pm 20''$. Man sieht daraus, dafs man namentlich in grofser Nähe am Horizonte nur erwarten kann, dafs ein Mittel aus sehr vielen, bei den verschiedensten Zuständen der Atmosphäre gemach-

ten Beobachtungen von dem Einflusse der Refraction befreit ist.

Bis zu einer Zenithdistanz von 80° ist es fast gleichgültig, welche Annahme man über die Abnahme der Dichtigkeit der Atmosphäre mit der Höhe über der Erdoberfläche macht und der Vortheil einer Refractionstheorie, die sich auf das wirklich stattfindende Gesetz gründet, besteht nur darin, dafs die Refractionen in grofser Nähe am Horizonte besser dargestellt und die Coefficienten $1+p$, und $1+q$ richtiger bestimmt werden, sodafs die Reduction der Refraction für verschiedene Temperaturen und Barometerstände genauer bestimmt werden kann. Schon die einfache, von Cassini gemachte Hypothese einer Atmosphäre von gleichförmiger Dichtigkeit, wo also nur eine einmalige Brechung an der obern Grenze der Atmosphäre stattfindet, stellt die mittlere Refraction bis zu 80° ganz gut dar. In diesem Falle hat man nach den Formeln in No. 6 einfach:

$$\sin i = \mu_0 \sin f,$$

oder da jetzt $i = f + \delta z$ ist:

$$\delta z = (\mu_0 - 1) \operatorname{tang} f,$$

und da, wie leicht zu sehen, $\sin f = \frac{a}{a+l} \sin z$, wo l die Höhe der Atmosphäre bezeichnet, so wird:

$$\delta z = (\mu_0 - 1) \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z^2 + \frac{2l}{a}}} = (\mu_0 - 1) \operatorname{tang} z \left(1 - \frac{l}{a} \frac{1}{\cos z^2}\right).$$

Nimmt man für $\mu_0 - 1$ den Werth 57″.717, so erhält man für die Refraction in 45°, 75° und 80° Zenithdistanz 57″.57, 211″.37, 314″.14, während dieselben nach Ivory 57″.45, 211″.37, 315″.20 sind. Danach wächst der Fehler aber stark und die Horizontalrefraction wird nur etwa 19′.

Die Gleichung (f) in No. 6 läfst sich sehr leicht integriren, wenn man zwischen s und r das Gesetz annimmt:

$$1 - s = \left[1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right]^m.$$

Führt man nämlich eine neue Veränderliche ein, gegeben durch die Gleichung:

$$\left[1 - 2\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right]^{\frac{2m-1}{2}} \sin z = w,$$

so wird die Gleichung einfach:

$$\delta\zeta' = -\frac{dw}{(2m-1)\sqrt{1-w^2}},$$

also wenn man integrirt und die Grenzen $w = \sin z$ und $w = (1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}} \sin z$ einsetzt:

$$\delta z = \frac{1}{2m-1}\left[z - \text{arc}\sin\,(1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}} \sin z\right],$$

oder:

$$\sin\,[z-(2m-1)\delta z] = (1-2\alpha)^{\frac{2m-1}{2}} \sin z,$$

wofür man der Kürze wegen schreiben kann:

$$M \sin z = \sin\,[z - N\delta z].$$

Dies ist die von Simpson aufgestellte Regel der Refraction und bei gehöriger Bestimmung der Coefficienten lassen sich die Refractionen bis zu 85° dadurch ganz gut darstellen.

Addirt man zu der letzten Gleichung die identische $\sin z = \sin z$ und subtrahirt auch dieselbe, so erhält man durch Division der beiden entstehenden Gleichungen:

$$\text{tang}\left(\frac{N}{2}\,\delta z\right) = \frac{1-M}{1+M}\,\text{tang}\left[z - \frac{N}{2}\,\delta z\right],$$

$$\text{oder}\quad \text{tang}\,(A\,.\,\delta z) = B\,\text{tang}\,[z - A\,.\,\delta z],$$

welches die von Bradley aufgestellte Refractionsformel ist.

14. Indem die Refraction alle Gestirne in einer gröſseren Höhe erscheinen läſst, als sie wirklich haben, so sieht man dieselben vermöge der Refraction schon, wenn sie wirklich noch unter dem Horizonte sind. Sie beschleunigt daher den Aufgang und verzögert den Untergang der Gestirne.

Es ist allgemein:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \qquad (r)$$

woraus folgt:

$$\sin z\, dz = \cos\varphi \cos\delta \sin t\,.\,dt$$

also für den Horizont:

$$dt = \frac{dz}{\cos\varphi \cos\delta \sin t}.$$

Da nun in diesem Falle dz gleich der Horizontalrefraction oder gleich 35′ ist, so erhält man für die Veränderung des Stundenwinkels des Auf- oder Untergangs:

$$dt = \frac{140^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t}.$$

In No. 20 des ersten Abschnitts war für Arcturus und die Polhöhe von Berlin gefunden:

$$t_0 = 7^h 42^m 40^s$$

und da $\delta = 19^0\, 54'.5 \quad \varphi = 52^0\, 30'.3$ ist, so erhält man:

$$\Delta t_0 = 4^m\, 37^s.$$

Um soviel wird also der Auf- und Untergang des Arcturus für Berlin beschleunigt und verzögert. Man kann auch den Stundenwinkel des Auf- und Untergangs mit Rücksicht auf Refraction berechnen, wenn man in der letzten Formel (r) $z = 90^0\, 35'$ nimmt. Dann ist:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

und wenn man auf beiden Seiten Eins addirt, so erhält man die bequeme Formel:

$$\cos \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta + z) \cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)}{\cos\varphi \cos\delta}}.$$

Hätte man die beiden Seiten der Formel von Eins abgezogen, so würde man erhalten haben:

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z + \varphi - \delta) \sin\frac{1}{2}(z + \delta - \varphi)}{\cos\varphi \cos\delta}}.$$

Beim Monde mufs man aufser der Refraction auch noch auf die Parallaxe Rücksicht nehmen, die die Zenithdistanz vergröfsert, also den Auf- und Untergang respective verzögert und beschleunigt. Die Art und Weise der Berechnung war schon in No. 20 des ersten Abschnitts gegeben und soll hier noch durch ein Beispiel erläutert werden.

Für 1861 Juli 15 hat man die folgenden Declinationen und Horizontalparallaxen des Mondes für Greenwicher mittlere Zeit.

		δ	p
Juli 15	0^h	-15^0 32.1	59 13
	12^h	17 51.5	59 15
16	0^h	19 55.6	59 14
	12^h	21 42.0	59 13

Man soll die Zeit des Untergangs für Greenwich finden. Nach den in No. 19 des ersten Abschnitts gefundenen mittleren Zeiten der oberen und unteren Culmination hat man:

Mondszeit	Mittlere Zeit
0^h	$6^h\, 16^m.7$
12^h	$18^h\, 44^m.2$

Nimmt man nun eine genäherte Declination $-17^0\,51'.5$ an, so erhält man, da $\varphi = 51^0\,28'.6$ und $z = 89^0\,35'.8$ ist, $t = 4^h\,21^m.5$ und die zu dieser Mondszeit gehörige mittlere Zeit $10^h\,48^m$. Interpolirt man nun für diese Zeit die Declination des Mondes, so findet man $-17^0\,38'.2$ und wenn man damit die Rechnung wiederholt, findet man den Stundenwinkel gleich $4^h\,22^m.9$, also die mittlere Zeit des Untergangs gleich $10^h\,49^m.6$.

15. Aufser der Refraction erzeugt die Wirkung der Atmosphäre auf das Licht noch die Dämmerung. Da nämlich die Sonne für die höheren Schichten der Atmosphäre später untergeht als für einen Beobachter an der Oberfläche der Erde, so werden diese Schichten noch nach dem Untergange der Sonne erleuchtet und das von ihnen reflectirte Licht bewirkt die Dämmerung. Nach den Beobachtungen hört die Sonne auf, Theile des über dem Horizonte befindlichen Abschnitts der Atmosphäre zu erleuchten, wenn sie etwa 18^0 unter dem Horizonte ist. Der Augenblick, wenn die Sonne die Zenithdistanz 108^0 erreicht, ist daher der Anfang oder das Ende der astronomischen Dämmerung, während der Anfang oder das Ende der bürgerlichen Dämmerung schon bei einer Tiefe der Sonne von $6\frac{1}{2}$ Graden unter dem Horizonte eintritt.

Bezeichnet man die Zenithdistanz der Sonne beim Anfange oder Ende der Dämmerung mit $90^0 + c$, mit t_0 den Stundenwinkel beim Auf- und Untergange und mit τ die Dauer der Dämmerung, so ist:

$$-\sin c = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(t_0 + \tau)$$

also:

$$\cos(t_0 + \tau) = -\frac{\sin\varphi \sin\delta + \sin c}{\cos\varphi \cos\delta}$$

oder, wenn $H = 90^0 - \varphi + \delta$ ist

$$\sin\tfrac{1}{2}(t_0 + \tau) = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(H + c)\cos\frac{1}{2}(H - c)}{\cos\varphi\cos\delta}},$$

woraus man τ finden kann, wenn t_0 berechnet ist.

Nennt man Z' den Punkt der scheinbaren Himmelskugel, welcher zur Zeit des Sonnenuntergangs im Zenith war, Z denjenigen, der beim Ende der Dämmerung im Zenith ist, so ist in dem Dreiecke zwischen diesen beiden Punkten und dem Pole der Winkel am Pole gleich τ und man hat:

$$\cos ZZ' = \sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 \cos\tau.$$

Da aber in dem Dreiecke zwischen diesen beiden Punkten und der Sonne S, $ZS = 90 + c$, $Z'S = 90^0$ ist, so ist auch, wenn man den Winkel an der Sonne mit S bezeichnet:

$$\cos ZZ' = \cos c \cos S$$

und man erhält:

$$\sin \tfrac{1}{2} \tau^2 = \frac{1 - \cos c \, . \, \cos S}{2 \cos \varphi^2},$$

wo man leicht sieht, daſs S der Unterschied der parallactischen Winkel zur Zeit des Sonnenuntergangs und beim Ende der Dämmerung ist. Die Gleichung zeigt, daſs τ ein Minimum ist, wenn der Winkel S gleich Null ist, sodaſs beim Ende der Dämmerung der Punkt, welcher beim Sonnenuntergange im Zenith war, im Verticalkreis der Sonne liegt. Die beiden parallactischen Winkel sind also dann einander gleich.

Die Dauer der kürzesten Dämmerung ist daher gegeben durch die Gleichung:

$$\sin \tfrac{1}{2} \tau = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \varphi}$$

und da:

$$\cos p = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}, \quad \cos p' = \frac{\sin \varphi + \sin c \sin \delta}{\cos c \cos \delta},$$

so folgt:

$$\sin \delta = - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \sin \varphi,$$

aus welcher Gleichung man die Declination der Sonne findet, bei welcher die kürzeste Dämmerung eintritt.

Bezeichnet man die Azimute der Sonne zur Zeit des Untergangs und für die Zenithdistanz $90^0 + c$ mit A und A', so hat man:

$$\cos \varphi \sin A = \cos \delta \sin p$$
$$\cos \varphi \sin A' = \cos \delta \sin p',$$

daher für den Fall der kürzesten Dämmerung $\sin A = \sin A'$, die beiden Azimute ergänzen dann also einander zu 180^0.

Aus den beiden Gleichungen:

$$- \sin c = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t_0 + \tau)$$

und

$$0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_0$$

folgt auch noch:

$$\sin (t_0 + \tfrac{1}{2} \tau) \sin \tfrac{1}{2} \tau = \frac{\cos \frac{1}{2} c}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \varphi},$$

also für den Fall der kürzesten Dämmerung:

$$\sin(t_0 + \tfrac{1}{2}\tau) = \frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\delta}.$$

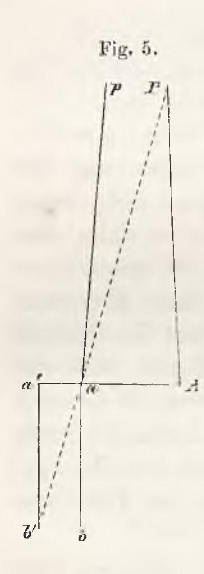
Nimmt man $c = 18^0$ an, so wird für die Polhöhe $\varphi = 81^0$, $\sin\frac{1}{2}\tau = 1$ und die Dauer der kürzesten Dämmerung für diese Breite wäre also 12 Stunden. Dies ereignet sich, wenn die Declination der Sonne — 9^0 ist, die Sonne ist dann also im Mittage im Horizonte und um Mitternacht 18^0 unter demselben. Indessen kann man nicht mehr von einer kürzesten Dämmerung im obigen Sinne sprechen, da diese Declination die einzige ist, bei der die beiden Bedingungen, dafs die Sonne auf- und untergeht und eine Tiefe von 18 Graden unter dem Horizonte erreicht, erfüllt werden, indem bei noch südlicheren Declinationen die Sonne nicht mehr aufgeht, dagegen bei mehr nördlichen Declinationen nie die Tiefe von 18^0 erreicht.

Für noch gröfsere Breiten giebt es keinen Fall, wo man von einer kürzesten Dämmerung im obigen Sinne sprechen kann und die Formel für $\sin\frac{1}{2}\tau$ wird immer unmöglich.

Anm. Ueber die Refraction vergleiche man: Laplace Mécanique céleste Livre X. — Bessel Fundamenta astronomiae pag. 26 et seq. — Ivory in Philosophical Transactions für 1823 und 1838. — Bruhns hat in seiner Schrift: „Die astronomische Strahlenbrechung“ eine Zusammenstellung aller Theorien gegeben.

III. Die Aberration.

16. Da die Geschwindigkeit der Erde in ihrer jährlichen Bahn um die Sonne zur Geschwindigkeit des Lichts ein angebbares Verhältnifs hat, so erblickt man die Sterne von der sich bewegenden Erde aus nicht in der Richtung, in welcher dieselben wirklich stehen, sondern sieht dieselben immer um einen kleinen Winkel nach derjenigen Richtung, nach welcher sich die Erde hin bewegt, vorgerückt. Man unterscheide zwei Zeitmomente t und t', in denen der Licht-



strahl, von einem im Raume unbeweglichen Gestirne (Fixsterne) kommend, nach einander das Objectiv und Ocular eines Fernrohrs (oder die Linse und die Netzhaut unseres Auges) trifft. Die Oerter des Objectivs und Oculars im Raume zur Zeit t seien a und b, zur Zeit t' dagegen a' und b'. Fig. 5. Dann ist die wahre Richtung des Lichtstrahls im Raume die Richtung der Geraden $a\,b'$, dagegen ist die Richtung $a\,b$ oder auch $a'\,b'$, da diese wegen der unendlichen Entfernung der Fixsterne $a\,b$ parallel ist, die Richtung des scheinbaren Ortes, welchen man beobachtet. Der Unterschied zwischen den Richtungen $b'\,a$ und $b\,a$ heifst die jährliche Aberration der Fixsterne.

Es seien nun x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Oculars b zur Zeit t, bezogen auf irgend einen unbeweglichen Punkt im Raume; dann werden

$$x + \frac{dx}{dt}(t' - t),\;\; y + \frac{dy}{dt}(t' - t) \text{ und } z + \frac{dz}{dt}(t' - t)$$

die Coordinaten des Oculars zur Zeit t' sein, da man in der kleinen Zwischenzeit $t' - t$ die Bewegung der Erde als linear betrachten kann. Die Coordinaten des Objectivs gegen das Ocular seien ξ, η, ζ; dann sind die Coordinaten des Objectivs zur Zeit t, wo das Licht in dasselbe eintritt, $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$.

Nimmt man nun als Ebene der x,y die Ebene des Aequators, die beiden andern Ebenen senkrecht darauf an und zwar so, dafs die Ebene der x,z durch die Aequinoctialpunkte, die der y,z durch die Solstitialpunkte geht, bezeichnet man ferner die Rectascension und Declination desjenigen Punktes, in welchem die wahre Richtung des Lichtstrahls die scheinbare Himmelskugel trifft, mit α und δ und mit μ die Geschwindigkeit des Lichts, so wird dasselbe in der Zeit $t' - t$ einen Weg durchlaufen, dessen Projectionen auf die drei Coordinatenaxen

$$\mu\,(t' - t)\cos\delta\cos\alpha,\;\; \mu\,(t' - t)\cos\delta\sin\alpha,\;\; \mu\,(t' - t)\sin\delta$$

sind. Nennt man ferner die Länge des Fernrohrs l und die Rectascension und Declination desjenigen Punktes, in welchem die scheinbare Richtung des Lichtstrahls die Himmelskugel trifft, α' und δ', so sind die scheinbaren Coordinaten des Objectivs gegen das Ocular, welche man beobachtet:

$$\xi = l \cos \delta' \cos \alpha', \quad \eta = l \cos \delta' \sin \alpha', \quad \zeta = l \sin \delta'.$$

Die wahre Richtung des Lichtstrahls wird nun gegeben durch die Coordinaten des Objectivs zur Zeit t:

$$\begin{aligned} &l \cos \delta' \cos \alpha' + x, \\ &l \cos \delta' \sin \alpha' + y, \\ &l \sin \delta' \qquad\quad + z, \end{aligned}$$

und durch die Coordinaten des Oculars zur Zeit t':

$$\begin{aligned} &x + \frac{dx}{dt}(t'-t), \\ &y + \frac{dy}{dt}(t'-t), \\ &z + \frac{dz}{dt}(t'-t). \end{aligned}$$

Man erhält daher die folgenden Gleichungen wenn man $\frac{l}{t'-t}$ mit L bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mu \cos \delta \cos \alpha &= L \cos \delta' \cos \alpha' - \frac{dx}{dt}, \\ \mu \cos \delta \sin \alpha &= L \cos \delta' \sin \alpha' - \frac{dy}{dt}, \\ \mu \sin \delta &= L \sin \delta' \qquad\quad - \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$\frac{L}{\mu} \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) = \cos \delta + \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{dy}{dt} \sin \alpha + \frac{dx}{dt} \cos \alpha \right\},$$

$$\frac{L}{\mu} \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{dy}{dt} \cos \alpha - \frac{dx}{dt} \sin \alpha \right\},$$

oder:

$$\operatorname{tang} (\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{1}{\mu} \sec \delta \left\{ \frac{dy}{dt} \cos \alpha - \frac{dx}{dt} \sin \alpha \right\}}{1 + \frac{1}{\mu} \sec \delta \left\{ \frac{dy}{dt} \sin \alpha + \frac{dx}{dt} \cos \alpha \right\}}.$$

Eine ganz ähnliche Gleichung erhält man für $\operatorname{tang} (\delta' - \delta)$. Entwickelt man beide Gleichungen in Reihen, indem man Formel (14) in No. 11 der Einleitung anwendet, so erhält man, wenn man in der Formel für $\operatorname{tang} (\delta' - \delta)$ anstatt $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)$ den aus $\alpha' - \alpha$ hergeleiteten Werth substituirt, bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung inclusive:

$$\alpha' - \alpha = -\frac{1}{\mu}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\alpha - \frac{dy}{dt}\cos\alpha\right\}\sec\delta$$
$$+\frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\alpha - \frac{dy}{dt}\cos\alpha\right\}\left\{\frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\alpha\right\}\sec\delta^2,$$
$$\delta' - \delta = -\frac{1}{\mu}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\delta\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\delta\sin\alpha - \frac{dz}{dt}\cos\delta\right\} \qquad (a)$$
$$-\frac{1}{2\mu^2}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\alpha - \frac{dy}{dt}\cos\alpha\right\}^2\tang\delta$$
$$+\frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{dx}{dt}\cos\delta\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\delta\sin\alpha + \frac{dz}{dt}\sin\delta\right\}$$
$$\times\left\{\frac{dx}{dt}\sin\delta\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\delta\sin\alpha - \frac{dz}{dt}\cos\delta\right\}.$$

Denkt man sich nun den Ort der Erde durch Coordinaten x, y in der Ebene der Ecliptic auf den Mittelpunkt der Sonne bezogen und nimmt die Linie vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Frühlings-Tag- und Nachtgleichen-Punkte als positive Seite der Axe der x, die positive Axe der y senkrecht darauf nach dem Colure der Sommersonnenwende gerichtet, so ist, wenn man die Länge der Sonne von der Erde aus gesehen mit $\odot$, ihre Entfernung von der Erde mit R bezeichnet *):

$$x = -R\cos\odot,$$
$$y = -R\sin\odot.$$

Bezieht man die Coordinaten auf die Ebene des Aequators, indem man als Axe der x die Linie nach dem Frühlingspunkte beibehält und die Coordinatenaxe der z in der Ebene der yz um den Winkel ε, gleich der Schiefe der Ecliptic, gedreht denkt, so erhält man:

$$x = -R\cos\odot,$$
$$y = -R\sin\odot\cos\varepsilon,$$
$$z = -R\sin\odot\sin\varepsilon,$$

und daraus, weil nach den Formeln in No. 14 des ersten Abschnitts die Länge der Sonne $\odot = \nu + \pi$, d. h. gleich der wahren Anomalie plus der Länge des Perihels ist:

$$\frac{dx}{dt} = -\cos\odot\frac{dR}{dt} + R\sin\odot\frac{d\nu}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\sin\odot\cos\varepsilon\frac{dR}{dt} - R\cos\odot\cos\varepsilon\frac{d\nu}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = -\sin\odot\sin\varepsilon\frac{dR}{dt} - R\cos\odot\sin\varepsilon\frac{d\nu}{dt}.$$

---

*) Da die Länge der Erde von der Sonne aus gesehen $180^0 + \odot$ ist.

Nach den Formeln in No. 14 des ersten Abschnitts ist aber auch:

$$d\nu = \frac{a\cos\varphi}{R}\,dE \text{ und da } dE = \frac{a}{R}\,dM$$

so ist:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{a^2\cos\varphi}{R^2}\,\frac{dM}{dt}.$$

Ferner folgt aus der Gleichung $R = \frac{p}{1+e\cos\nu}$ in Verbindung mit der vorigen:

$$\frac{dR}{dt} = a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin\nu\,\frac{dM}{dt}$$

und damit wird:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos\varphi}\,\frac{dM}{dt}\left\{\sin\odot\,\frac{a^2\cos\varphi}{R} - \sin\varphi\sin\nu\cos\odot\right\}$$

mithin, wenn man bedenkt, dafs:

$$\frac{a^2\cos\varphi}{R} = 1 + \sin\varphi\cos\nu \text{ und } \odot - \nu = \pi,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos\varphi}\,\frac{dM}{dt}[\sin\odot + \sin\varphi\sin\pi]$$

und

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\,\frac{dM}{dt}[\cos\odot + \sin\varphi\cos\pi] \qquad (b)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,\frac{dM}{dt}[\cos\odot + \sin\varphi\cos\pi].$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Formeln (a), so geben die constanten, von π abhängigen Glieder in den Ausdrücken für die Aberration in α und δ ebenfalls constante Glieder, die sich mit den mittleren Oertern der Sterne verbinden werden und deshalb unberücksichtigt bleiben können. Führt man dann noch statt μ die Anzahl k von Zeitsecunden ein, welche das Licht braucht, um die halbe grofse Axe der Erdbahn zu durchlaufen, so dafs:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{k}{a},$$

so findet man, wenn man nur die Glieder erster Ordnung beibehält:

$$\alpha' - \alpha = -\frac{k}{\cos\varphi}\,\frac{dM}{dt}[\cos\odot\cos\varepsilon\cos\alpha + \sin\odot\sin\alpha]\sec\delta$$

$$\delta' - \delta = +\frac{k}{\cos\varphi}\,\frac{dM}{dt}[\cos\odot(\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon) - \cos\alpha\sin\delta\sin\odot].$$

Die Constante $\frac{k}{\cos\varphi}\frac{dM}{dt}$ wird die Constante der Aberration genannt und, da $\frac{dM}{dt}$ gleich der mittleren siderischen Bewegung der Sonne in einer Zeitsecunde, der bei k zu Grunde liegenden Einheit, ist, so könnte man dieselbe berechnen, wenn die Zeit, in welcher das Licht die halbe grofse Axe der Erdbahn durchläuft, bekannt wäre. Delambre hatte diese Zeit aus den Verfinsterungen der Jupitertrabanten bestimmt und damit für die Constante der Aberration 20″.255 erhalten. Struve hat aber später diese Constante aus den Beobachtungen der scheinbaren Oerter der Fixsterne zu 20″.4451 bestimmt, womit umgekehrt, da $\frac{dM}{dt}=\frac{59'8''.19}{86400}=0.0410670$ und $\cos\varphi=9.999939$ ist, für die Zeit, in welcher das Licht die halbe grofse Axe der Erdbahn durchläuft, $497^s.78$ gefunden wird*).

Man hat daher für die jährliche Aberration der Fixsterne in Rectascension und Declination die Formeln:

$$\begin{aligned}\alpha'-\alpha &= -20''.4451\,[\cos\odot\cos\varepsilon\cos\alpha+\sin\odot\sin\alpha]\sec\delta\\ \delta'-\delta &= +20''.4451\cos\odot\,[\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon-\cos\delta\sin\varepsilon] \qquad (A)\\ &\quad -20''.4451\sin\odot\cos\alpha\sin\delta.\end{aligned}$$

Die Glieder zweiter Ordnung sind so unbedeutend, dafs sie fast immer vernachlässigt werden können. Für die Rectascension werden diese Glieder, wenn man in das zweite Glied der Formeln (a), die Werthe der Differentialquotienten (b) einführt:

$$-\tfrac{1}{4}\frac{k^2}{\cos\varphi^2}\left(\frac{dM}{dt}\right)^2\sec\delta^2\,[\cos 2\odot\sin 2\alpha(1+\cos\varepsilon^2)-2\sin 2\odot\cos 2\alpha\cos\varepsilon],$$

wo das kleine in $\sin 2\alpha\sin\varepsilon^2$ multiplicirte Glied vernachlässigt ist. Man erhält nämlich abgesehen von dem constanten Factor:

$$2\sin 2\alpha\,[\cos\odot^2\cos\varepsilon^2-\sin\odot^2]-2\sin 2\odot\cos\varepsilon\,[\cos\alpha^2-\sin\alpha^2]$$

woraus leicht der obige Ausdruck folgt. Substituirt man die numerischen Werthe und nimmt $\varepsilon=23^0\,28'$, so erhält man:

$$\begin{aligned}&-0''.0009329\sec\delta^2\sin 2\alpha\cos 2\odot\\ &+0''.0009295\sec\delta^2\cos 2\alpha\sin 2\odot\end{aligned} \qquad (c).$$

*) Nach Hansen ist die Länge des siderischen Jahres gleich 365 Tagen 6 Stunden, 9 Minuten und 9,35 Secunden oder gleich 365.2563582 Tagen, mithin die mittlere tägliche siderische Bewegung der Sonne gleich 59′8″.193.

Diese Glieder geben erst für Sterne, deren Declination $85\frac{1}{2}^0$ beträgt, $\frac{1}{100}$ Zeitsecunde, sie können daher aufser bei den Polarsternen immer vernachlässigt werden.

Für die Declination geben die Glieder zweiter Ordnung, wenn man die Glieder vernachlässigt, die nicht in $\text{tang}\,\delta$ multiplicirt sind:

$$-\tfrac{1}{8}\frac{k^2}{\cos\varphi^2}\left(\frac{dM}{dt}\right)^2 \text{tang}\,\delta\,[\cos 2\odot\,(\cos 2\alpha\,(1+\cos\varepsilon^2)-\sin\varepsilon^2)$$
$$+\,2\sin 2\odot\sin 2\alpha\cos\varepsilon],$$

indem das in $\text{tang}\,\delta$ multiplicirte Glied, abgesehen von dem constanten Factor,

$$\sin\odot^2\sin\alpha^2+\cos\odot^2\cos\varepsilon^2\cos\alpha^2+\tfrac{1}{2}\sin 2\odot\sin 2\alpha\cos\varepsilon$$

ist, woraus sich der obige Ausdruck findet, wenn man die Quadrate der Sinus und Cosinus der Winkel durch die Sinus oder Cosinus der doppelten Winkel ausdrückt und die constanten Glieder $1+\cos\varepsilon^2$ und das Glied $\cos 2\alpha\sin\varepsilon^2$ vernachlässigt. Substituirt man wieder die numerischen Werthe, so erhält man:

$$\begin{aligned}&+[0''.0000402-0''.0004665\cos 2\alpha]\,\text{tang}\,\delta\cos 2\odot\\&-0''.0004648\,\text{tang}\,\delta\sin 2\alpha\sin 2\odot\end{aligned}\qquad (d)$$

und auch diese Glieder erreichen für kleinere Declinationen als $87^0\,6'$ noch nicht $\frac{1}{100}$ einer Bogensecunde und werden daher nur bei den Polarsternen berücksichtigt.

Die Formeln (A) für die Aberration setzen voraus, dafs die Gröfsen α, δ und $\odot$ auf das scheinbare Aequinoctium bezogen sind und dafs ε die scheinbare Schiefe der Ecliptic ist. Bei der Berechnung der Aberration eines Sterns für einen längeren Zeitraum ist es aber bequem, die Nutation zu vernachlässigen und α, δ und $\odot$ auf das mittlere Aequinoctium zu beziehen, sowie für ε die mittlere Schiefe zu nehmen. Dann mufs man aber die daraus entstehenden Fehler berechnen und die gefundenen Werthe für die Aberration danach verbessern. Man findet deren Ausdrücke, wenn man die Formeln (A) nach α, δ, $\odot$ und ε differenzirt und $d\alpha$, $d\delta$, $d\odot$ und $d\varepsilon$ gleich der Nutation für diese Gröfsen nimmt. Natürlich braucht man aber nur die gröfsten Glieder der Nutation mitzunehmen und wenn man in der Correction für die Rectascension alle Glieder vernachlässigt, die nicht in $\sec\delta\,.\,\text{tang}\,\delta$ und in der für die Declination alle Glieder, die nicht in $\sin\delta\,.\,\text{tang}\,\delta$ multiplicirt sind, so sieht man leicht, dafs die

Aenderungen $d\odot$ und $d\varepsilon$ keine merklichen Glieder erzeugen und dafs man nur mitzunehmen hat:

$$d\alpha = -[6''.867 \sin \Omega \sin \alpha + 9''.223 \cos \Omega \cos \alpha] \operatorname{tang} \delta,$$
$$d\delta = -[6''.867 \sin \Omega \cos \alpha + 9''.223 \cos \Omega \sin \alpha].$$

Setzt man hier der Kürze wegen $6''.867 = b$ und $9''.223 = a$, so findet man, wenn man diese Gröfsen in die Differentialgleichungen von (A) einsetzt:

$$\alpha' - \alpha = \operatorname{tang}\delta \sec\delta\, 10''.2225 \left\{ \begin{array}{l} -(b + a\cos\varepsilon)\sin 2\alpha \cos(\odot + \Omega) \\ +(b\cos\varepsilon + a)\cos 2\alpha \sin(\odot + \Omega) \\ +(b - a\cos\varepsilon)\sin 2\alpha \cos(\odot - \Omega) \\ -(b\cos\varepsilon - a)\cos 2\alpha \sin(\odot - \Omega) \end{array} \right\}$$

$$\delta' - \delta = \operatorname{tang}\delta \sin\delta\, 5''.1112 \left\{ \begin{array}{l} -(b + a\cos\varepsilon)\cos 2\alpha \cos(\odot + \Omega) \\ -(b\cos\varepsilon + a)\sin 2\alpha \sin(\odot + \Omega) \\ +(b - a\cos\varepsilon)\cos 2\alpha \cos(\odot - \Omega) \\ +(b\cos\varepsilon - a)\sin 2\alpha \sin(\odot - \Omega) \\ +(b - a\cos\varepsilon)\cos(\odot + \Omega) \\ -(b + a\cos\varepsilon)\cos(\odot - \Omega) \end{array} \right\}$$

oder, wenn man die numerischen Werthe einsetzt:

$$\alpha' - \alpha = \operatorname{tang}\delta \sec\delta \,. \left\{ \begin{array}{l} -0''.0007597 \sin 2\alpha \cos(\odot + \Omega) \\ +0''.0007693 \cos 2\alpha \sin(\odot + \Omega) \\ -0''.0000790 \sin 2\alpha \cos(\odot - \Omega) \\ +0''.0001449 \cos 2\alpha \sin(\odot - \Omega) \end{array} \right\} \quad (e)$$

$$\delta' - \delta = \operatorname{tang}\delta \sin\delta \,. \left\{ \begin{array}{l} -0''.0003798 \cos 2\alpha \cos(\odot + \Omega) \\ -0''.0003847 \sin 2\alpha \sin(\odot + \Omega) \\ -0''.0000395 \cos 2\alpha \cos(\odot - \Omega) \\ -0''.0000725 \sin 2\alpha \sin(\odot - \Omega) \\ -0''.0000395 \cos(\odot + \Omega) \\ -0''.0003798 \cos(\odot - \Omega) \end{array} \right\}$$

So lange die Declination kleiner als $85\frac{1}{2}^0$ ist, wird $\alpha' - \alpha$ kleiner als $\frac{1}{100}$ Zeitsecunde, und $\delta' - \delta$ wird erst gleich $\frac{1}{100}$ Bogensecunde für die Declination $85^0\,6'$. Auch diese Glieder sind daher wie die durch (c) und (d) gegebenen aufser bei den Polarsternen zu vernachlässigen.

Die Gleichungen für die Aberration werden viel einfacher, wenn man statt des Aequators die Ecliptic zur Grundebene nimmt. Mit Vernachlässigung der constanten Glieder wird nämlich dann:

$$\frac{dx}{dt} = + \frac{a}{\cos\varphi} \sin\odot \frac{dM}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = - \frac{a}{\cos\varphi} \cos\odot \frac{dM}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Formeln (a) und setzt λ und β an die Stelle von α und δ, so erhält man für die jährliche Aberration der Fixsterne in Länge und Breite:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -20''.4451 \cos(\lambda - \odot) \sec\beta, \\ \beta' - \beta &= +20''.4451 \sin(\lambda - \odot) \sin\beta, \end{aligned} \qquad (B)$$

Formeln, die nicht geändert werden, wenn man das mittlere Aequinoctium statt des scheinbaren bei λ und $\odot$ anwendet. Ferner findet man für die Glieder zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} &\text{in Länge:} \quad = +0''.0010133 \sin 2(\odot - \lambda) \sec\beta^2, \\ &\text{in Breite:} \quad = -0''.0005067 \cos 2(\odot - \lambda \operatorname{tang}\beta, \end{aligned}$$

wo der Coefficient 0.0010133 gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{(20''.4451)^2}{206265}$ ist.

Beispiel. Für den ersten April 1849 hat man für Arcturus:

$$\alpha = 14^h\, 8^m\, 48^s = 212^\circ\, 12'.0, \quad \delta = +19^\circ\, 58'.1, \quad \odot = 11^\circ\, 37'.2$$
$$\varepsilon = 23^\circ\, 27'.4.$$

Damit findet man:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= +18''.88, \\ \delta' - \delta &= -\ \ 9''.65, \end{aligned}$$

und da:

$$\lambda = 202^\circ\, 8', \quad \beta = +30^\circ\, 50',$$

auch:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= +23''.41, \\ \beta' - \beta &= -\ \ 1''.91. \end{aligned}$$

17. Um die Berechnung der Aberration in Rectascension und Declination, die nach den eben gegebenen Formeln etwas unbequem ist, zu vereinfachen, hat man Tafeln entworfen. Die bequemsten sind die von Gaufs gegebenen. Gaufs setzt:

$$\begin{aligned} 20''.445 \sin\odot &= a \sin(\odot + A), \\ 20''.445 \cos\odot \cos\varepsilon &= a \cos(\odot + A), \end{aligned}$$

und erhält dann einfach:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -a \sec\delta \cos(\odot + A - \alpha), \\ \delta' - \delta &= -a \sin\delta \sin(\odot + A - \alpha) - 20''.445 \cos\odot \cos\delta \sin\varepsilon \\ &= -a \sin\delta \sin(\odot + A - \alpha) - 10''.222 \sin\varepsilon \cos(\odot + \delta) \\ &\quad - 10''.222 \sin\varepsilon \cos(\odot - \delta). \end{aligned}$$

Hiernach sind nun die Tafeln entworfen. Die erste Tafel giebt A und $\log a$ mit dem Argumente der Länge der Sonne, wodurch man die Aberration in Rectascension und den ersten Theil der Aberration in Declination erhält. Den zweiten und dritten Theil findet man dann aus der zweiten Tafel, in welche man mit den Argumenten $\odot + \delta$ und $\odot - \delta$ eingeht.

Diese Tafeln wurden zuerst von Gauſs in der monatlichen Correspondenz Band XVII pag. 312 gegeben. Die dort gebrauchte Constante ist die ältere 20″. 255. Später wurden dieselben von Nicolai mit der Constante 20″. 4451 neu berechnet und in der Warnstorff'schen Sammlung von Hülfstafeln abgedruckt.

Für das vorige Beispiel erhält man aus letzteren Tafeln:

$$A = 1^0\,1', \quad \log a = 1.2748$$

und damit:

$$\alpha' - \alpha = +18''.88$$

und für den ersten Theil der Aberration in Declination — 2″. 15. Den zweiten und dritten Theil findet man gleich — 3″. 47 und = — 4″. 03, wenn man in die zweite Tafel mit den Argumenten 31° 35′ und — 8° 21′ eingeht. Es ist also:

$$\delta' - \delta = -9''.65.$$

18. Das Maximum und Minimum der Aberration in Länge findet statt, wenn die Länge des Sterns gleich der der Sonne oder 180° gröſser ist, dagegen trifft das Maximum oder Minimum in der Breite ein, wenn der Stern der Sonne 90° vorausgeht oder ihr um eben so viel folgt. Ganz analog den Formeln für die jährliche Aberration sind die Formeln für die jährliche Parallaxe der Fixsterne (d. h. für den Winkel, welchen die Richtungen von den Mittelpunkten der Sonne und der Erde nach dem Fixsterne mit einander bilden), nur daſs dort die Maxima und Minima auf andre Zeiten treffen. Ist nämlich Δ die Entfernung des Fixsterns von der Sonne, λ und β seine von der Sonne aus gesehene Länge und Breite, so sind die Coordinaten des Sterns in Bezug auf die Sonne:

$$x = \Delta \cos\beta \cos\lambda, \quad y = \Delta \cos\beta \sin\lambda, \quad z = \Delta \sin\beta.$$

Die Coordinaten des Sterns in Bezug auf die Erde sind aber:

$$x' = \Delta' \cos\beta' \cos\lambda', \quad y' = \Delta' \cos\beta' \sin\lambda', \quad z' = \Delta' \sin\beta'$$

und da die Coordinaten der Sonne in Bezug auf die Erde:

$$X = R \cos \odot \quad \text{und} \quad Y = R \sin \odot$$

sind, wo die halbe groſse Axe der Erde = 1 genommen ist, so hat man:

$$\begin{aligned}
\Delta' \cos\beta' \cos\lambda' &= \Delta \cos\beta \cos\lambda + R \cos \odot \\
\Delta' \cos\beta' \sin\lambda' &= \Delta \cos\beta \sin\lambda + R \sin \odot \\
\Delta' \sin\beta' &= \Delta \sin\beta.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man leicht:

$$\lambda' - \lambda = -\frac{R}{\Delta'} \sin(\lambda - \odot) \sec\beta \, . \, 206265,$$

$$\beta' - \beta = -\frac{R}{\Delta'} \cos(\lambda - \odot) \sin\beta \, . \, 206265.$$

oder da $\frac{1}{\Delta'}$ 206265 gleich der jährlichen Parallaxe π ist:

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -\pi R \sin(\lambda - \odot) \sec\beta \\ \beta' - \beta &= -\pi R \cos(\lambda - \odot) \sin\beta. \end{aligned} \qquad (C)$$

Die Formeln sind also ganz ähnlich wie die für die Aberration, nur findet das Maximum und Minimum der Parallaxe in Länge statt, wenn der Stern der Sonne 90^0 vorausgeht oder um ebensoviel folgt; dagegen findet das Maximum oder Minimum in der Breite statt, wenn die Länge des Sterns 180^0 gröfser oder gleich der Länge der Sonne ist.

Für die Rectascension und Declination hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta' \cos\delta' \cos\alpha' &= \Delta \cos\delta \cos\alpha + R \cos\odot \\ \Delta' \cos\delta' \sin\alpha' &= \Delta \cos\delta \sin\alpha + R \sin\odot \cos\varepsilon \\ \Delta' \sin\delta' &= \Delta \sin\delta \quad\;\; + R \sin\odot \sin\varepsilon, \end{aligned}$$

woraus man dann ähnlich wie bei der Aberration findet:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\pi R [\cos\odot \sin\alpha - \sin\odot \cos\varepsilon \cos\alpha] \sec\delta \\ \delta' - \delta &= -\pi R [\cos\varepsilon \sin\alpha \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta] \sin\odot \\ &\quad - \pi R \cos\odot \sin\delta \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (D)$$

19. Die tägliche Bewegung der Erde um ihre Axe bringt ebenso wie die jährliche Bewegung um die Sonne eine Aberration hervor, welche die tägliche Aberration genannt wird. Diese ist indessen viel unbedeutender als die jährliche Aberration, da die Geschwindigkeit der Bewegung der Erde um ihre Axe sehr viel kleiner ist als die Geschwindigkeit der Bewegung in der jährlichen Bahn um die Sonne.

Die Coordinaten eines Ortes auf der Oberfläche der Erde in Bezug auf drei auf einander senkrechte Axen, von denen die eine mit der Rotationsaxe zusammenfällt, die beiden andern in der Ebene des Aequators liegen und zwar so, dafs die positive Axe der x vom Mittelpunkte nach dem Frühlingspunkte, die positive Axe der y nach dem neunzigsten Grade der Rectascensionen gerichtet ist, sind nach No. 2 dieses Abschnitts:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi' \cos\Theta, \\ y &= \varrho \cos\varphi' \sin\Theta, \\ z &= \varrho \sin\varphi'. \end{aligned}$$

Man hat also:

$$\frac{dx}{dt} = -\varrho \cos\varphi' \sin\Theta \,.\, \frac{d\Theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = +\varrho \cos\varphi' \cos\Theta \,.\, \frac{d\Theta}{dt};$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Substituirt man diese Werthe in die Formeln (a) in No. 16, so erhält man leicht mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen:

$$\alpha' - \alpha = \frac{1}{\mu}\,\frac{d\Theta}{dt}\,\varrho \cos\varphi' \cos(\Theta - \alpha) \sec\delta,$$

$$\delta' - \delta = \frac{1}{\mu}\,\frac{d\Theta}{dt}\,\varrho \cos\varphi' \sin(\Theta - \alpha) \sin\delta.$$

Bezeichnet nun T die Anzahl der Sterntage in einem siderischen Jahre, so ist also die durch die Umdrehung der Erde entstehende Winkelbewegung eines Punktes derselben T mal schneller als die Winkelbewegung der Erde in ihrer Bahn, sodafs:

$$\frac{d\Theta}{dt} = T\,\frac{dM}{dt}.$$

Man erhält daher als Constante der täglichen Aberration, da:

$$\frac{1}{\mu}\,\varrho = k\,\frac{\varrho}{a} = k \sin\pi$$

ist, wo π die Sonnenparallaxe und k die Anzahl von Zeitsecunden bezeichnet, welche das Licht braucht, um den Halbmesser der Erdbahn zu durchlaufen:

$$k \,.\, \frac{dM}{dt} \,.\, \sin\pi \,.\, T,$$

oder da:

$$k \,.\, \frac{dM}{dt} = 20''.445, \;\; \pi = 8''.5712 \text{ und } T = 366\,.\,26 \text{ ist,}$$

$$0''.3113.$$

Setzt man noch statt der verbesserten Polhöhe φ' einfach die Polhöhe φ, so erhält man also für die tägliche Aberration in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= 0''.3113 \cos\varphi \cos(\Theta - \alpha) \sec\delta, \\ \delta' - \delta &= 0''.3113 \cos\varphi \sin(\Theta - \alpha) \sin\delta. \end{aligned} \qquad (E)$$

Danach ist im Meridian die tägliche Aberration der Sterne in Declination Null, während sie in Rectascension ihr Maximum erreicht, nämlich:

$$0''.3113 \,.\, \cos\varphi \sec\delta.$$

20. Für die jährliche Aberration der Fixsterne in Länge und Breite waren vorher die Ausdrücke gefunden:

$$\lambda' - \lambda = - k \cos(\lambda - \odot) \sec \beta,$$
$$\beta' - \beta = + k \sin(\lambda - \odot) \sin \beta,$$

wo die Constante 20″.445 durch k bezeichnet ist. Denkt man sich nun an dem mittleren Orte des Sterns eine tangirende Ebene an der scheinbaren Himmelskugel und in dieser ein rechtwinkliges Axenkreuz, dessen Axen der x und y die Durchschnittslinien der Ebenen des Parallel- und des Breitenkreises mit der tangirenden Ebene sind, und bezieht nun den wahren mit der Aberration behafteten Ort auf den mittleren durch die Coordinaten:

$$x = (\lambda' - \lambda) \cos \beta \quad \text{und} \quad y = \beta' - \beta \; ^{*}),$$

so erhält man leicht, wenn man die obigen Gleichungen quadrirt:

$$y^2 = k^2 \sin \beta^2 - x^2 \sin \beta^2.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren halbe grofse Axe gleich k, deren halbe kleine Axe dagegen $k \sin \beta$ ist. Vermöge der jährlichen Aberration beschreiben also die Fixsterne Ellipsen um ihren mittleren Ort, deren halbe grofse Axe 20″.445 und deren halbe kleine Axe das Maximum der Aberration in Breite ist. Für Sterne, welche in der Ecliptic stehen, ist β und mithin auch die halbe kleine Axe gleich Null. Solche Sterne beschreiben also im Laufe eines Jahres eine gerade Linie, indem sie sich in der Ecliptic 20″.445 von dem mittleren Orte nach jeder Seite hin entfernen. Für einen Stern welcher im Pole der Ecliptic stände, wäre $\beta = 90^0$, mithin die halbe kleine Axe gleich der halben grofsen Axe. Ein solcher Stern würde also im Laufe eines Jahres um seinen mittleren Ort einen Kreis von 20″.445 Halbmesser beschreiben.

Um den jedesmaligen Ort des Sterns auf der Ellipse zu erhalten, denke man sich in der Ebene der Ellipse um dasselbe Centrum einen Kreis mit der grofsen Axe als Durchmesser beschrieben. Dann ist klar, dafs ein Radius dieses Kreises ihn während eines Jahres mit gleichförmiger Bewe-

*) Indem für so kleine Entfernungen vom Anfangspunkte die tangirende Ebene mit der Kugeloberfläche zusammenfallend angesehen werden kann.

gung durchlaufen mufs, dergestalt, dafs er mit dem westlichen Theile der halben grofsen Axe zusammenfällt, wenn die Länge der Sonne gleich der Länge des Sterns ist, dagegen mit dem südlichen Theile der halben kleinen Axe, wenn die Länge der Sonne 90° gröfser als die Länge des Sterns ist. Zieht man dann für irgend eine Zeit den der Länge der Sonne entsprechenden Radius und fällt ein Perpendikel von dem Endpunkte des Radius auf die grofse Axe, so ist der Punkt, wo dieser die Ellipse schneidet, der Ort des Sterns.

Wenn der Stern auch eine Parallaxe π hat, so werden die Ausdrücke für die beiden rechtwinkligen Coordinaten:

$$x = -k\cos(\lambda - \odot) - \pi\sin(\lambda - \odot)$$
$$y = +k\sin(\lambda - \odot)\sin\beta - \pi\cos(\lambda - \odot)\sin\beta$$

oder, wenn man setzt:

$$k = a\cos A$$
$$\pi = a\sin A$$
$$x = -a\cos(\lambda - \odot - A)$$
$$y = +a\sin(\lambda - \odot - A)\sin\beta.$$

Der Stern beschreibt also auch dann um seinen mittleren Ort eine Ellipse, deren halbe grofse Axe $\sqrt{k^2 + \pi^2}$ und deren halbe kleine Axe $\sin\beta\sqrt{k^2 + \pi^2}$ ist.

Ganz Aehnliches gilt nun auch für die tägliche Aberration. Vermöge der letzteren beschreiben die Sterne im Laufe eines Sterntages Ellipsen um ihren mittleren Ort, deren halbe grofse und halbe kleine Axe $0''.3113\cos\varphi$ und $0''.3113\cos\varphi\sin\delta$ ist. Für Sterne, die im Aequator stehen, geht diese Ellipse in eine gerade Linie über, für einen Stern dagegen, welcher genau im Weltpole stände, in einen Kreis.

21. Hat ein Gestirn eine eigene Bewegung, wie die Sonne, der Mond und die Planeten, so ist für diese die bisher betrachtete Aberration der Fixsterne noch nicht die vollständige Aberration. Denn da ein solches Gestirn in der Zeit, während welcher der Lichtstrahl von demselben zur Erde läuft, seinen Ort verändert, so entspricht die beobachtete Richtung des Lichtstrahls nicht dem wahren geocentrischen Orte des Gestirns zur Zeit der Beobachtung. Man nehme nun an, dafs der Lichtstrahl, welcher zur Zeit t das Objectiv des Fernrohrs trifft, zur Zeit T vom Planeten ausgegangen sei. Es seien ferner P Fig. 5 der Ort des Planeten im

Raume zur Zeit T, p derselbe zur Zeit t, A der Ort des Objectivs zur Zeit T, a und b seien die Oerter des Objectivs und Oculars zur Zeit t, a' und b' dagegen die Oerter zur Zeit t', wo der Lichtstrahl das Ocular trifft. Dann ist:

1) AP die Richtung nach dem Orte des Planeten zur Zeit T,
2) ap die Richtung nach dem wahren Orte zur Zeit t,
3) ab und $a'b'$ die Richtung nach dem scheinbaren Orte zur Zeit t und zur Zeit t', deren Differenz unendlich klein ist,
4) $b'a$ die Richtung nach demselben scheinbaren Orte, von der Aberration der Fixsterne befreit.

Da nun P, a und b' in einer geraden Linie liegen, so ist:

$$Pa : ab' = t - T : t' - t.$$

Da ferner das Zeitintervall $t' - T$ immer sehr klein ist, sodafs man annehmen kann, dafs die Erde sich innerhalb desselben geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, so liegen auch A, a und a' in einer geraden Linie, sodafs Aa und aa' ebenfalls den Zeiten $t - T$ und $t' - t$ proportional sind. Daraus folgt also, dafs AP parallel $b'a'$ ist, dafs also der scheinbare Ort des Planeten zur Zeit t gleich dem wahren Orte zur Zeit T ist. Der Unterschied der Zeiten t' und T ist aber die Zeit, in welcher das Licht vom Planeten zum Auge gelangt oder das Product der Distanz des Planeten in $497^s.8$ d. h. in die Zeit, in welcher das Licht die halbe grofse Axe der Erdbahn, welche als Einheit angenommen wird, durchläuft.

Daraus folgen nun drei Methoden, den wahren Ort eines Wandelsterns aus dem scheinbaren für irgend eine Zeit t zu berechnen.

I. Man ziehe von der beobachteten Zeit die Zeit ab, innerhalb welcher das Licht von dem Planeten zur Erde gelangt; dann erhält man die Zeit T und der wahre Ort zur Zeit T ist mit dem scheinbaren zur Zeit t identisch.

II. Man berechne mit der Entfernung des Wandelsterns die Reduction der Zeit oder $t - T$ und damit mit Hülfe der täglichen Bewegung des Gestirns in Rectascension und Declination die Reduction des beobachteten scheinbaren Ortes auf die Zeit T.

III. Den gegebenen Ort von der Aberration der Fixsterne befreit, betrachte man als den wahren Ort zur Zeit T, aber gesehen von dem Orte, welchen die Erde zur Zeit t hat. Diese letztere Methode wendet man dann an, wenn man die Entfernung des Gestirns nicht kennt, z. B. bei der Berechnung einer Bahn eines noch unbekannten Planeten oder Cometen.

Da die Zeit, in welcher das Licht von der Sonne zur Erde gelangt, $497^s.8$ ist und die mittlere Bewegung der Sonne in einem Tage $59'\,8''.19$ beträgt, so ist nach II. die Aberration der Sonne in Länge $20''.45$ im Bogen, um welche Gröfse man die Längen der Sonne immer zu klein beobachtet. Wegen der Aenderung der Entfernung der Sonne und ihrer Geschwindigkeit schwankt dieser Werth im Laufe des Jahres um einige Zehntheile einer Secunde.

22. Dieser Fall der Aberration für ein bewegliches Gestirn, der in der That der allgemeinere ist, kann auch leicht aus den Fundamentalgleichungen (a) in No. 16 abgeleitet werden. Es ist nämlich klar, dafs man in diesem Falle statt der absoluten Geschwindigkeit der Erde nur die relative Geschwindigkeit derselben in Bezug auf das bewegliche Gestirn zu substituiren hat, da diese in Verbindung mit der Geschwindigkeit des Lichts denjenigen Neigungswinkel des Fernrohrs gegen die wahre Richtung der von dem Gestirne nach einander ausgehenden Lichtstrahlen bestimmen wird, bei dem das Gestirn, trotz seiner eigenen Bewegung und der Bewegung der Erde, immer in der Axe des Fernrohrs erscheint. Sind daher ξ, η, ζ die Coordinaten des Gestirns in Bezug auf das dort betrachtete System von Axen, so mufs man $\frac{dx}{dt}-\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{dy}{dt}-\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{dz}{dt}-\frac{d\zeta}{dt}$ statt $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ in (a) substituiren. Ist aber Δ die Entfernung des Gestirns von der Erde, so erhält man die heliocentrischen Coordinaten ξ, η, ζ, da die Coordinaten in Bezug auf die Erde oder die geocentrischen $\Delta\cos\delta\cos\alpha$, etc., sind:

$$\begin{aligned} \xi &= \Delta\cos\delta\cos\alpha + x, \\ \eta &= \Delta\cos\delta\sin\alpha + y, \\ \zeta &= \Delta\sin\delta + z, \end{aligned} \qquad (f)$$

woraus man leicht findet:

$$\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d\xi}{dt}\right)\sin\alpha-\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d\eta}{dt}\right)\cos\alpha=\Delta\cos\delta\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d\xi}{dt}\right)\sin\delta\cos\alpha+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d\eta}{dt}\right)\sin\delta\sin\alpha\mp\left(\frac{dz}{dt}-\frac{d\zeta}{dt}\right)\cos\delta=\Delta\frac{d\delta}{dt}.$$

Die Formeln (a) gehen daher über in:

$$\alpha'-\alpha=-\frac{\Delta}{\mu}\frac{d\alpha}{dt},$$

$$\delta'-\delta=-\frac{\Delta}{\mu}\frac{d\delta}{dt},$$

oder da $\frac{\Delta}{\mu}$ gleich der Zeit ist, in welcher das Licht die Distanz Δ durchläuft, wenn man dieselbe mit $t-T$ bezeichnet:

$$\alpha'=\alpha-(t-T)\frac{d\alpha}{dt},$$

$$\delta'=\delta-(t-T)\frac{d\delta}{dt},$$

Gleichungen, welche ausdrücken, dafs der scheinbare Ort gleich dem wahren zur Zeit T ist und also den Regeln I und II der vorigen Nummer entsprechen.

Man erhält aber auch die Aberration für diesen Fall, wenn man zu der rechten Seite der ersten Formel (a) das Glied $\frac{1}{\mu}\left[\frac{d\xi}{dt}\sin\alpha-\frac{d\eta}{dt}\cos\alpha\right]\sec\delta$ und das ähnliche Glied der zweiten Gleichung hinzufügt. Dann findet man, wenn man die Aberration der Fixsterne mit $D\alpha$ und $D\delta$ bezeichnet:

$$\alpha'-\alpha=D\alpha+\frac{1}{\mu}\left[\frac{d\xi}{dt}\sin\alpha-\frac{d\eta}{dt}\cos\alpha\right]\sec\delta,$$

$$\delta'-\delta=D\delta+\frac{1}{\mu}\left[\frac{d\xi}{dt}\sin\delta\cos\alpha+\frac{d\eta}{dt}\sin\delta\sin\alpha+\frac{d\zeta}{dt}\cos\delta\right].$$

Differenzirt man aber die Gleichungen (f), indem man rechts nur die geocentrischen Gröfsen Δ, α, δ als veränderlich, dagegen die Coordinaten der Erde als constant ansieht und bezeichnet die partiellen Differentialquotienten mit $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$, so findet man die zweiten Glieder der rechten Seite der obigen Gleichungen beziehlich gleich:

$$-\frac{\Delta}{\mu}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \text{ und } -\frac{\Delta}{\mu}\left(\frac{d\delta}{dt}\right).$$

Man erhält daher: $\alpha'-D\alpha=\alpha-(t-T).\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$

$$\text{und } \delta'-D\delta=\delta-(t-T).\left(\frac{d\delta}{dt}\right),$$

Gleichungen, die der Regel III der vorigen Nummer ent-

sprechen. Denn da $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$ die Differentialquotienten von α und δ bezeichnen, wenn zwar der heliocentrische Ort des Wandelsterns geändert wird, aber nicht der Erdort, so entsprechen die rechten Seiten der beiden Gleichungen dem Ort des Gestirns zur Zeit T, aber gesehen von dem Orte, den die Erde zur Zeit t hat.

Anm. Die Bewegung der Erde um die Sonne in einer Ellipse und die durch die Axendrehung der Erde erzeugte Bewegung geben noch nicht die vollständige Bewegung eines Punktes auf der Erde im Raume, da die Sonne selbst Bewegungen hat, an denen die Erde mit dem ganzen Sonnensysteme Theil nimmt. Einmal nämlich hat die Sonne, wie man später sehen wird, eine fortschreitende Bewegung im Raume und aufserdem eine periodische, durch die Anziehungen der Planeten verursachte, indem sich nämlich die Planeten nicht in Ellipsen um den Mittelpunkt der Sonne bewegen, sondern Sonne und Planet um den ruhenden Schwerpunkt beider Ellipsen beschreiben, die sich umgekehrt wie die Massen der beiden Körper verhalten. Die erstere Bewegung, die für jetzt nur als geradlinig angenommen werden kann und auch gewifs so für sehr lange Zeiträume bleibt, ändert deshalb die Oerter der Sterne nur um constante Gröfsen und kann daher unberücksichtigt bleiben und die durch die zweite Bewegung veranlafste Aberration ist so klein, dafs sie immer vernachlässigt werden kann. Sind nämlich a und a' die Halbmesser der Bahnen zweier Planeten, die hier kreisförmig angenommen werden, τ und τ' ihre Umlaufszeiten, so verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten beider wie $\frac{1}{\tau} : \frac{1}{\tau'}$, mithin die linearen Geschwindigkeiten wie $a\tau' : a'\tau$ oder wie $\sqrt{a'} : \sqrt{a}$, da sich nach dem dritten Keplerschen Gesetze die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die Cuben der halben grofsen Axen der Bahnen verhalten. Die Constante der Aberration für einen Planeten, dessen halbe grofse Axe a ist, wird daher, wenn man den Halbmesser der Erdbahn gleich Eins nimmt, $\frac{20''.45}{\sqrt{a}}$, und die durch die Bewegung der Sonne um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider erzeugte Aberration gleich $m \cdot \frac{20''.45}{\sqrt{a}}$, wenn m die Masse des Planeten bezeichnet, die Masse der Sonne als eins gesetzt. Für Jupiter ist $m = \frac{1}{1050}$ und $a = 5.20$, daher die Constante der durch die Anziehung Jupiters erzeugten Aberration nur $0''.0086$.

Auch die Störungen der Bewegung der Erde durch die Planeten bewirken Aenderungen der Aberration, die aber ebenfalls zu klein sind, um berücksichtigt zu werden.

Vergl. über die Aberration die Vorrede zu Bessel's Tabulae Regiomontanae p. XVII et seq.; auch Wolfers, Tabulae Reductionum p. XIII et seq. Gaufs, Theoria motus pag. 68 et seq.

Vierter Abschnitt.

Von der Herleitung der mittleren Sternörter und der wahrscheinlichsten Werthe der darauf Einfluſs habenden Constanten aus Beobachtungen.

Die Hauptaufgabe der sphärischen Astronomie ist die Bestimmung der Oerter der Sterne in Bezug auf die Fundamentalebenen und speciell in Bezug auf den Aequator, da die Längen und Breiten nie durch Beobachtungen gefunden, sondern nur durch Rechnung aus der Rectascension, Declination und Schiefe der Ecliptic abgeleitet werden. Werden diese Beobachtungen so angestellt, daſs sie den Ort der Sterne unmittelbar in Bezug auf den Aequator und den Frühlings-Nachtgleichenpunkt geben, so nennt man dieselben absolute Bestimmungen, dagegen sind relative Bestimmungen solche, durch welche nur der Unterschied der Rectascensionen und Declinationen von Sternen von denen früher bestimmter Sterne gefunden wird.

Die Beobachtungen geben die scheinbaren Oerter der Sterne d. h. behaftet mit Refraction (im Falle der Beobachtung der Sonne, des Mondes und der Planeten auch mit Parallaxe) und Aberration und bezogen auf den Aequator und das wahre Aequinoctium für den Augenblick der Beobachtung. Diese Oerter müssen daher noch durch Anbringung der in den beiden vorigen Abschnitten betrachteten Correctionen auf mittlere Oerter reducirt werden. Eine jede dieser Correctionen enthält aber eine Constante, deren numerischer Werth aus ähnlichen Beobachtungen wie die Sternörter gefunden oder mit denselben zugleich bestimmt werden muſs. Die in den vorigen Abschnitten gegebenen Werthe dieser Constanten sind die neuesten Bestimmungen, die indessen immer durch künftige Beobachtungen noch Verbesserungen erfahren

werden, und es ist daher zu zeigen, wie diese Bestimmungen gemacht werden. Beobachtet man die Oerter der Fixsterne zu verschiedenen Zeiten, so sollte man, wenn dieselben unveränderlich wären, nur solche Unterschiede erhalten, die den möglichen Beobachtungsfehlern und den Fehlern der Constanten zugeschrieben werden können. Man findet aber bei der Vergleichung der Oerter zu verschiedenen Epochen gröſsere oder geringere Abweichungen, die nicht durch solche Fehler erklärt werden können und daher durch eine eigene Bewegung der Sterne verursacht werden müssen. Diese Bewegungen sind zum Theil gesetzlos und den Sternen eigenthümlich, zum Theil aber nur parallactisch und durch die Bewegung unseres Sonnensystems im Raume verursacht; mit wenigen Ausnahmen kann man dieselben aber immer als der Zeit proportional und in einem gröſsten Kreise vorgehend ansehen. Auch diese Bewegungen müssen in Rechnung gebracht werden, um die mittleren Oerter der Sterne auf eine Epoche zu reduciren, oder von einer Epoche auf die andre zu übertragen.

Die Berechnung der verschiedenen Correctionen, die an die Sternörter anzubringen sind, ist in den beiden vorigen Abschnitten gegeben; da dieselben aber so häufig zu machen sind, so bedient man sich noch andrer Methoden, welche die Reduction der scheinbaren Oerter auf die mittleren zu Anfang des Jahres so bequem und so wenig zeitraubend als möglich machen und die zunächst gegeben werden sollen.

I. Von der Reduction der mittleren Oerter der Sterne auf scheinbare und umgekehrt.

1. Kennt man den mittleren Ort eines Sterns und sucht man den scheinbaren Ort für irgend einen gegebenen Tag eines andern Jahres, so hat man zuerst den gegebenen Ort durch Anbringung der Präcession und nöthigenfalls der eigenen Bewegung auf den mittleren Ort zu Anfang dieses Jahres zu bringen und nachher noch die Präcession und eigene Bewegung vom Anfange des Jahres bis zu dem gegebenen

Tage sowie die Nutation und Aberration für diesen Tag hinzuzufügen. Um nun die drei letzteren Correctionen bequem anbringen zu können, hat man dafür Tafeln berechnet, welche den Tag des Jahres zum Argumente haben. Diese Tafeln sind von Bessel in seinem Werke: Tabulae Regiomontanae gegeben *).

Bedeuten α und δ die mittlere Rectascension und Declination eines Sterns zu Anfang eines Jahres, α' und δ' dagegen die scheinbare Rectascension und Declination zur Zeit τ, welche vom Anfange des Jahres ab gezählt und in Theilen desselben ausgedrückt wird; bezeichnet man ferner mit μ und μ' die eigene Bewegung des Sterns in Rectascension und Declination, die der Zeit proportional ist, so hat man nach den Formeln (D) in No. 2, (B) und (C) in No. 5 des zweiten Abschnitts und (A) in No. 16 des dritten Abschnitts:

$$\begin{aligned}
\alpha' - \alpha = & + \tau\,[m + n \operatorname{tang}\delta \sin\alpha] + \tau\mu \\
& - [15''.8148 + 6''.8650 \operatorname{tang}\delta \sin\alpha] \sin \Omega \\
& - 9''.2231 \operatorname{tang}\delta \cos\alpha \cos \Omega \\
& + [0''.1902 + 0''.0822 \operatorname{tang}\delta \sin\alpha] \sin 2\Omega \\
& + 0''.0896 \operatorname{tang}\delta \cos\alpha \cos 2\Omega \\
& - [1''.1642 + 0''.5054 \operatorname{tang}\delta \sin\alpha] \sin 2\odot \\
& - 0''.5509 \operatorname{tang}\delta \cos\alpha \cos 2\odot \\
& + [0''.1173 + 0''.0509 \operatorname{tang}\delta \sin\alpha] \sin(\odot - P) \\
& - [0''.0195 + 0''.0085 \operatorname{tang}\delta \sin\alpha] \sin(\odot + P) \\
& - 0''.0093 \operatorname{tang}\delta \cos\alpha \cos(\odot + P) \\
& - 20''.4451 \cos\varepsilon \sec\delta \cos\alpha \cos\odot \\
& - 20''.4451 \sec\delta \sin\alpha \sin\odot
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta' - \delta = & + \tau n \cos\alpha + \tau\mu' \\
& - 6''.8650 \cos\alpha \sin\Omega + 9''.2231 \sin\alpha \cos\Omega \\
& + 0''.0822 \cos\alpha \sin 2\Omega - 0''.0896 \sin\alpha \cos 2\Omega \\
& - 0''.5054 \cos\alpha \sin 2\odot + 0''.5509 \sin\alpha \cos 2\odot \\
& + 0''.0509 \cos\alpha \sin(\odot - P) \\
& - 0''.0085 \cos\alpha \sin(\odot + P) + 0''.0093 \sin\alpha \cos(\odot + P) \\
& + 20''.4451 [\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon] \cos\odot \\
& - 20''.4451 \cos\alpha \sin\delta \sin\odot.
\end{aligned}$$

Hier sind die Glieder der Nutation, die von der doppelten Länge 2☾ und der Anomalie ☾ — P' des Mondes abhängen, weggelassen, da dieselben wegen der schnellen Bewe-

*) Für einige wenige Sterne ist auch noch die Anbringung der jährlichen Parallaxe erforderlich, wofür die bequemsten Ausdrücke nachher gegeben werden.

gung des Mondes eine kurze Periode haben und daher vortheilhafter in eine besondre Tafel gebracht werden. Die Glieder sind aufserdem klein und heben sich wegen der kurzen Periode im Mittel aus mehreren Beobachtungen eines Sterns gröfstentheils auf. Sie werden gewöhnlich nur bei den Polarsternen mitgenommen. Für diese werden aber auch die Glieder merklich, die von den Quadraten und dem Producte der Nutation und Aberration abhängen und die durch die Formeln (E) in No. 5 des zweiten Abschnitts und (c), (d) und (e) in No. 16 des dritten Abschnitts gegeben sind. Diese Glieder, so wie die vorher erwähnten, können für jeden Stern, für welchen dieselben merklich werden, in Tafeln gebracht werden, deren Argumente, ☾, $\odot$, $\odot + \Omega$ und $\odot - \Omega$ sind.

Um nun die obigen Ausdrücke für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ in Tafeln zu bringen, setze man:

$$\begin{array}{ll}
6''.8650 = n i & 15''.8148 - m i = h \\
0''.0822 = n i_1 & 0''.1902 - m i_1 = h_1 \\
0''.5054 = n i_2 & 1''.1642 - m i_2 = h_2 \\
0''.0509 = n i_3 & 0'.1173 - m i_3 = h_3 \\
0''.0085 = n i_4 & 0''.0195 - m i_4 = h_4 .
\end{array}$$

Dann kann man die Formeln auch so schreiben:

$$\begin{aligned}
\alpha' - \alpha = {} & [\tau - i \sin \Omega + i_1 \sin 2\Omega - i_2 \sin 2\odot + i_3 \sin(\odot - P) \\
& \qquad - i_4 \sin(\odot + P)] [m + n \operatorname{tang} \delta \sin \alpha] \\
& - [9''.2231 \cos \Omega - 0''.0896 \cos 2\Omega + 0''.5509 \cos 2\odot \\
& \qquad + 0''.0093 \cos(\odot + P)] \operatorname{tang} \delta \cos \alpha \\
& - 20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot . \cos \alpha \sec \delta \\
& - 20''.4451 \sin \odot . \sin \alpha \sec \delta \\
& + \tau \mu \\
& - h \sin \Omega + h_1 \sin 2\Omega - h_2 \sin 2\odot + h_3 \sin(\odot - P) - h_4 \sin(\odot + P)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta' - \delta = {} & [\tau - i \sin \Omega + i_1 \sin 2\Omega - i_2 \sin 2\odot + i_3 \sin(\odot - P) \\
& \qquad - i_4 \sin(\odot + P)]\, n \cos \alpha \\
& + [9''.2231 \cos \Omega - 0''.0896 \cos 2\Omega + 0''5509 \cos 2\odot \\
& \qquad + 0''.0093 \cos(\odot + P)] \sin \alpha \\
& - 20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot [\operatorname{tang} \varepsilon \cos \delta - \sin \delta \sin \alpha] \\
& - 20''4451 \sin \odot . \sin \delta \cos \alpha \\
& + \tau \mu' .
\end{aligned}$$

Führt man daher folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
A &= \tau - i \sin \Omega + i_1 \sin 2\Omega - i_2 \sin 2\odot + i_3 \sin(\odot - P) - i_4 \sin(\odot + P) \\
B &= -9''.2231 \cos \Omega + 0''.0896 \cos 2\Omega - 0''.5509 \cos 2\odot - 0''.0093 \cos(\odot + P) \\
C &= -20''.4451 \cos \varepsilon \cos \odot \\
D &= -20''.4451 \sin \odot \\
E &= -h \sin \Omega + h_1 \sin 2\Omega - h_2 \sin 2\odot + h_3 \sin(\odot - P) - h_4 \sin(\odot + P)
\end{aligned}$$

$$a = m + n \tang \delta \sin \alpha \qquad a' = n \cos \alpha$$
$$b = \tang \delta \cos \alpha \qquad b' = -\sin \alpha$$
$$c = \sec \delta \cos \alpha \qquad c' = \tang \varepsilon \cos \delta - \sin \delta \sin \alpha$$
$$d = \sec \delta \sin \alpha \qquad d' = \sin \delta \cos \alpha,$$

so hat man einfach:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + \tau\mu + E \\ \delta' - \delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \tau\mu', \end{aligned} \qquad (A)$$

wo die Gröſsen a, b, c, d, a', b', c', d' blos von dem Orte des Sterns und der Schiefe der Ecliptic, dagegen A, B, C, D von ☉ und ☊ abhängen, also reine Functionen der Zeit sind und daher auch in Tafeln gebracht werden können, welche die Zeit zum Argumente haben.

Die in obigen Formeln gegebenen numerischen Werthe gelten für 1800, und man erhält für diese Zeit:

$$i = 0.34223 \quad i_1 = 0.00410 \quad i_2 = 0.02519 \quad i_3 = 0.00254 \quad i_4 = 0.00042$$
$$h = 0.0572 \quad h_1 = 0.0016 \quad h_2 = 0.0041 \quad h_3 = 0.0005 \quad h_4 = 0.0000,$$

woraus folgt, daſs die Gröſse E immer nur einige Hunderttheile einer Secunde beträgt und daher fast immer vernachlässigt werden kann. Da einige der Coefficienten in den obigen Formeln für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ mit der Zeit veränderlich sind (nach No. 5 des zweiten Abschnitts), ebenso die Werthe von m und n, so erhält man für 1900:

$$i = 0.34256 \quad i_1 = 0.00410 \quad i_2 = 0.02520 \quad i_3 = 0.00253 \quad i_4 = 0.00042$$
$$h = 0.0488 \quad h_1 = 0.0014 \quad h_2 = 0.0035 \quad h_3 = 0.0005.$$

Bessel hat die Werthe der Constanten A, B, C, D, E in seinem Werke „Tabulae Regiomontanae" für die Jahre 1750 bis 1850 gegeben. Da denselben aber ein anderer Werth der Nutations- und der Aberrationsconstante zum Grunde liegt, auch die in (☉ − P) und (☉ + P) multiplicirten Glieder fehlen, so erfordern die Besselschen Werthe der Constanten die folgenden Correctionen, um dieselben den obigen Formeln entsprechend zu machen:

für 1750:

$$\begin{aligned} dA &= -0.0090 \sin ☊ + 0.0001 \sin 2☊ + 0.0013 \sin 2☉ \\ &\qquad + 0.0025 \sin(☉ - P) - 0.0004 \sin(☉ + P) \\ dB &= -0.2456 \cos ☊ + 0.0019 \cos 2☊ + 0.0290 \cos 2☉ \\ &\qquad - 0.0093 \cos(☉ + P) \\ dC &= -0.1744 \cos ☉ \\ dD &= -0.1901 \sin ☉ \\ dE &= -0.006 \sin ☊ + 0.001 \sin 2☊ \end{aligned}$$

Für 1850 wird der Werth von dB:

$$dB = -0.2465 \cos ☊ + 0.0019 \cos 2☊ + 0.0291 \cos 2☉ - 0.0093 \cos(☉ + P).$$

Für die Jahre 1850 bis 1860 wurden die Constanten von Zech berechnet nach den Besselschen Formeln, für die Jahre 1860 bis 1880 dagegen von Wolfers in seinem Werke „Tabulae Reductionum Observationum astronomicarum“ mit den oben gegebenen neueren Werthen. Man findet diese Constanten auch in den astronomischen Jahrbüchern.

2. Die Argumente aller dieser Tafeln sind die Tage des Jahres, dessen Anfang in dem Augenblicke angenommen ist, wo die mittlere Länge der Sonne 280° beträgt. Diese Tafeln gelten daher unmittelbar für denjenigen Meridian, für welchen die Sonne in dem Augenblicke, wo das bürgerliche Jahr beginnt, diese Länge hat. Weil aber die Sonne zu einem vollständigen Umlaufe 365 Tage und einen Bruchtheil gebraucht, so werden die Tafeln in einem jeden Jahre für einen anderen Meridian gelten.

Bezeichnet man daher die Meridiandifferenz in Zeit desjenigen Ortes, für welchen die Sonne beim Anfange des Jahres die mittlere Länge 280° hat, vom Meridian von Paris ab gezählt mit k und nimmt dies positiv, wenn der Ort östlich liegt, bezeichnet man ferner die Meridiandifferenz irgend eines Ortes von Paris, aber westlich positiv genommen, mit d, so mufs man zu der Zeit dieses letzteren Ortes, für welchen man die Constanten A, B, C, D, E aus den Tafeln sucht, die Gröfse $k + d$ hinzuthun und mit dieser corrigirten Zeit als Argument in die Tafeln eingehen. Die Gröfse k findet man aus

$$k = \frac{L - 280^0}{\mu},$$

wo L die mittlere Länge der Sonne zu Anfang des Jahres für den Meridian von Paris, μ dagegen die mittlere tropische Bewegung der Sonne gleich 59′8″.33 ist. Diese Gröfse findet man in den Tabulis Regiomontanis und Wolfers Fortsetzung derselben von 1750—1850 und 1860—1880 für jedes Jahr in Theilen eines Tages ausgedrückt, aufserdem die Constanten A, B, C, D, E für den Anfang des fingirten Jahres, welches beginnt, wenn die Länge der Sonne 280° ist, also für $18^h 40^m$ Sternzeit desjenigen Meridians, für welchen die Sonne beim Beginne des Jahres diese Länge hat und dann für die-

selbe Zeit jedes zehnten Sterntages*). Will man die Werthe aus den Tafeln für eine andere Sternzeit haben z. B. für die Culminationszeit eines Sterns, dessen Rectascension α, so muſs man zu dem Argumente $k+d$ die Gröſse hinzufügen:

$$\alpha' = \frac{\alpha - 18^h\,40^m}{24^h} = \frac{\alpha}{24} - 0.778.$$

Da ferner auf den Tag, an welchem die Rectascension der Sonne gleich der Rectascension des Sterns ist, zwei Culminationen des Sterns fallen, so muſs man nach dieser Zeit zu dem bürgerlichen Datum des Tages Eins addiren, sodaſs das vollständige Argument gleich dem Datum ist plus der Gröſse

$$k + d + \alpha' + i,$$

wo $i = 0$ ist vom Anfange des Jahres bis zu der Zeit, wo die Rectascension der Sonne gleich α wird, nachher aber $i = +1$ ist.

Der mit Jan. 0 in den Tafeln bezeichnete Tag ist nun derjenige, zu dessen Sternzeit $18^h\,40^m$ das Jahr nach der gewöhnlichen Methode die Tage zu zählen, indem man den Anfang desselben am Mittage nimmt, anfängt. Die Culmination derjenigen Sterne, deren Rectascension $< 18^h\,40^m$ ist, fällt daher nicht auf den in den Tafeln mit Jan. 0 bezeichneten Anfangstag, sondern auf den Tag vorher, man muſs daher für solche Sterne dem Datum des vom Mittage gezählten Tages einen Tag hinzufügen, ehe man damit in die Tafeln eingeht, sodaſs für solche Sterne i vom Anfange des Jahres bis zum Tage, wo die Rectascension der Sonne gleich α ist, gleich 1 und nachher gleich 2 zu nehmen ist.

Man suche z. B. die Correction des mittleren Orts von

---

*) Für die Berechnung der Tafeln ist daher:

$$\tau = \frac{10n}{366.242201}.$$

$$\text{Mittlere Länge der Sonne} = 280^0 + \frac{10n \,.\, 360^0}{366.242201},$$

wo n in jedem Jahre die Werthe aller ganzen Zahlen von 0 bis 37 durchläuft. Daraus findet man die wahre Länge nach I. No. 14. Auch ist:

$$\Omega = 33^0\,15'\,25''.9 - 19^0\,20'\,29''.53\,(t - 1800) - \frac{10n}{366.242201}\,19^0\,20'\,29''.53.$$

α Lyrae für April 1861 und zwar für die Culminationszeit von Berlin. Man hat für den Anfang des Jahres:

$\alpha = 278^\circ\, 3'\, 30''$ $\delta = +38^\circ\, 39'\, 23''$ $\varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 22''$ $m = 46''.062$ $\log n = 1.30220$

und damit erhält man:

$$\log a = 1.47971 \qquad \log a' = 0.44889$$
$$\log b = 9.04973 \qquad \log b' = 9.99569$$
$$\log c = 9.25409 \qquad \log c' = 9.98106$$
$$\log d = 0.10309_n \qquad \log d' = 8.94233$$

und außerdem ist

$$\log \mu = 9.4425 \qquad \log \mu' = 9.4564.$$

Ferner hat man nach Wolfers Tabulae Reductionum:

	$\log A$	$\log B$	$\log C$	$\log D$	$\log \tau$	E
März 31	9.7494	0.5497_n	1.2660_n	0.5668_n	9.3905	+ 0.05
April 10	9.7653	0.5279_n	1.2456_n	0.8488_n	9.4362	+ 0.05
20	9.7819	0.4982_n	1.2109_n	1.0089_n	9.4776	+ 0.05
30	9.7995	0.4620_n	1.1596_n	1.1155_n	9.5154	+ 0.05

und man erhält hieraus nach den obigen Formeln (A):

	$\alpha' - \alpha$	$\delta' - \delta$
März 31	$+ 1^s.203$	$- 19''.85$
April 10	$+ 1\ .541$	$- 19\ .09$
20	$+ 1\ .871$	$- 17\ .79$
30	$+ 2\ .185$	$- 15\ .97.$

Nun ist $k = +0.124$, $d = -0.031$, $\dfrac{\alpha - 18^h 40^m}{24^h} = -0.005$, und da hier $i = 1$ weil $\alpha < 18^h 40^m$ und im März und April die Rectascension der Sonne kleiner als $18^h 40^m$ ist, so wird das Argument in diesem Falle gleich:

$$\text{Datum} + 1.088.$$

Man erhält daher für die Culminationszeit für Berlin:

März 31	$+ 1^s.239$	$- 19''.79$
April 10	$+ 1\ .577$	$18\ .98$
20	$+ 1\ .906$	$17\ .62$
30	$+ 2\ .219$	$15\ .76.$

Zieht man diese Correctionen von dem scheinbaren Orte ab, so erhält man den mittleren Ort für den Anfang des Jahres.

3. Diese Art der Berechnung der Reduction auf den scheinbaren Ort ist besonders bequem, wenn man eine Ephemeride für eine längere Zeit berechnen will und wenn man viele Beobachtungen desselben Sternes zu reduciren hat. Sucht man nur die Reduction für einen einzelnen Tag, so bedient man sich mit großer Bequemlichkeit der folgenden Methode,

weil man dabei der Mühe der Berechnung der constanten Gröfsen a, b, c etc. überhoben ist.

Die Glieder für die Präcession und Nutation sind nämlich: für die Rectascension:

$$Am + An \sin\alpha \operatorname{tang}\delta + B \operatorname{tang}\delta \cos\alpha + E$$

und für die Declination:

$$An \cos\alpha - B \sin\alpha.$$

Setzt man daher:

$$An = g \cos G$$
$$B = g \sin G$$
$$Am + E = f,$$

so werden die Glieder für die Rectascension

$$f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tang}\delta$$

und für die Declination:

$$g \cos(G + \alpha).$$

Ferner werden die Glieder der Aberration: in Rectascension:

$$C \sec\delta \cos\alpha + D \sec\delta \sin\alpha$$

in Declination:

$$- C \sin\delta \sin\alpha + D \sin\delta \cos\alpha + C \operatorname{tang}\varepsilon \cos\delta.$$

Setzt man daher:

$$C = h \sin H \qquad D = h \cos H \qquad i = C \operatorname{tang}\varepsilon,$$

so wird die Aberration in Rectascension:

$$h \sin(H + \alpha) \sec\delta$$

in Declination:

$$h \cos(H + \alpha) \sin\delta + i \cos\delta.$$

Also sind die vollständigen Formeln für die Reduction auf den scheinbaren Ort:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tang}\delta + h \sin(H + \alpha) \sec\delta + \tau\mu \\ \delta' - \delta &= \quad g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin\delta + i \cos\delta + \tau\mu'. \end{aligned} \qquad (B)$$

Die Gröfsen f, g, h, i, G und H kann man dann in Tafeln bringen, deren Argument wieder die Zeit ist. Solche Tafeln werden in den astronomischen Jahrbüchern gegeben und zwar für die mittleren Tage von zehn zu zehn oder fünf zu fünf Tagen.

Sucht man z. B. die Reduction für α Lyrae für 1861 April 10 $17^h 15^m$ mittlere Zeit, die Zeit der Culmination von α Lyrae, so hat man nach dem Berliner Jahrbuche für diese Zeit:

$f = +26''.98$ $g = +12''.20$ $G = 344°3'$ $h = +18''.98$ $H = 247°3'$ $i = -7''.58$

also $G + \alpha = 262^\circ\ 6'$ $H + \alpha = 165^\circ\ 6'$

$\cos(G+\alpha)$	9.13813_n	$g \sin(G+\alpha)$	1.08222_n
g	1.08636	$\operatorname{tang}\delta$	9.90304
$\sin(G+\alpha)$	9.99586_n	$h\sin(H+\alpha)$	0.68846
$\cos(H+\alpha)$	9.98515_n	$\cos\delta$	9.89260
h	1.27830	i	0.87967_n
$\sin(H+\alpha)$	9.41016	$h\cos(H+\alpha)$	1.26345_n
		$\sin\delta$	9.79564

$$f = +26''.98$$
$$g\sin(G+\alpha)\operatorname{tang}\delta = -\ 9''.67$$
$$h\sin(H+\alpha)\sec\delta = +\ 6''.25$$
$$\tau\mu = +\ 0''.08$$
$$\alpha' - \alpha = +23''.64 = +1^s.576$$

$$i\cos\delta = -\ 5''.92$$
$$g\cos(G+\alpha) = -\ 1''.68$$
$$h\cos(H+\alpha)\sin\delta = -11''.46$$
$$\tau\mu' = +\ 0''.08$$
$$\delta' - \delta = -18''.98.$$

4. Die Formeln (*A*) und (*B*) für die Reduction auf den scheinbaren Ort enthalten nicht die tägliche Aberration und die jährliche Parallaxe. Da der Ausdruck für die tägliche Aberration die Polhöhe enthält, so kann man dieselbe nicht in allgemeine Tafeln bringen, indessen ist für Meridianbeobachtungen die tägliche Aberration in Declination Null und in Rectascension hat der Ausdruck dieselbe Form wie die wegen des Collimationsfehlers des Instruments an die Beobachtungen anzubringende Correction, wie man später sehen wird, sodafs man ohne weitere Mühe die beiden Correctionen vereinigen kann.

Die Parallaxe ist nur für eine sehr geringe Anzahl von Sternen bestimmt und mufs für diese, wenn es auf die äufserste Genauigkeit ankommt, besonders berechnet werden. Es war aber die Formel für die Parallaxe nach No. 18 des dritten Abschnitts:

$$\alpha' - \alpha = -\pi\,[\cos\odot\sin\alpha - \sin\odot\cos\varepsilon\cos\alpha]\sec\delta$$
$$\delta' - \delta = -\pi\,[\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta]\sin\odot$$
$$-\pi\cos\odot\sin\delta\cos\alpha.$$

Setzt man also:

$$-\cos\varepsilon\cos\alpha = k\sin K$$
$$-\sin\alpha = k\cos K$$
$$\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon = l\sin L$$
$$-\cos\alpha\sin\delta = l\cos L,$$

so wird einfach:

$$\alpha' - \alpha = \pi\,k\cos(K+\odot)\sec\delta$$
$$\delta' - \delta = \pi\,l\cos(L+\odot).$$

Diese Correction wird aber nur in sehr seltenen Fällen mitzunehmen sein, wie z. B. bei dem Polarstern, wo die Rectascension merklich geändert werden kann oder bei dem Stern α Centauri, wo die Parallaxe nahe eine Bogensecunde ist.

II. Bestimmung der Rectascensionen und Declinationen der Sterne, sowie der Schiefe der Ecliptic.

5. Beobachtet man die Unterschiede der Zeiten, zu denen die Sterne durch den Meridian eines Ortes gehen, so sind diese Unterschiede gleich denen der scheinbaren Rectascensionen der Sterne in Zeit ausgedrückt. Zu diesen Beobachtungen bedarf man also einer guten Uhr, d. h. einer solchen, die für Zeiten, in welchen gleich große Bögen des Aequators durch den Meridian gehen, auch immer eine gleich große Anzahl von Secunden angiebt*) und eines in der Ebene des Meridians fest aufgestellten Höheninstruments, d. h. eines Meridiankreises. Dieser besteht in seinen wesentlichen Theilen aus einer horizontalen, in zwei festen Lagern liegenden Axe, welche auf jeder Seite einen Kreis, von denen einer wenigstens fein getheilt ist, und in der Mitte ein Fernrohr trägt. An den Lagern sind Nonien oder Mikroskope befestigt, vermittelst welcher man bei der gleichzeitigen Bewegung des Fernrohrs und der Kreise mit der horizontalen Axe die vom Fernrohre durchlaufenen Bögen auf dem Kreise abliest.

Um den regelmäßsigen Gang der Uhr zu prüfen, ohne die Kenntniſs der Sternörter selbst nöthig zu haben, beobachtet man die auf einander folgenden Durchgänge verschiedener Sterne durch ein im Brennpunkte des Fernrohrs ausgespanntes Fadenkreuz, dessen Durchschnittspunkt genau im Meridian angenommen wird**). Die Zeit zwischen zwei aufein-

---

*) Die Zeit selbst braucht man hierzu nicht zu kennen, da immer nur Unterschiede von Zeiten beobachtet werden.

**) Der eine Faden dieses Kreuzes wird der täglichen Bewegung parallel gestellt dadurch, daſs man dem Aequator nahe stehende Sterne den Faden entlang laufen läſst und das ganze Kreuz mittelst zweier zu dem Zwecke angebrachten, gegen einander wirkenden Schrauben so lange dreht, bis der Stern während seiner Bewegung durch das Feld den Faden nicht mehr verläſst.

anderfolgenden Durchgängen desselben Sterns durch den Meridian ist dann gleich 24 Stunden Sternzeit $+\Delta\alpha$, wenn $\Delta\alpha$ die Veränderung der Reduction auf den scheinbaren Ort während dieser 24 Stunden bezeichnet. Wären daher die Beobachtungen fehlerfrei und wäre das Instrument bei beiden Beobachtungen genau im Meridian, welche letztere Bedingung als erfüllt angenommen wird, so würden auch die an einer genau regulirten Uhr beobachteten Zwischenzeiten zwischen den Durchgängen jedes Sterns gleich $24^h + \Delta\alpha$ sein; wegen der Fehler der einzelnen Beobachtungen kann man aber nur annehmen, dafs das Mittel der beobachteten Zwischenzeiten aus einer Anzahl von Sternen weniger dem Mittel aller $\Delta\alpha$ gleich 24^h ist. Findet man dagegen, dafs dies Mittel nicht 24^h, sondern $24^h - a$ ist, so ist a der tägliche Gang der Uhr und alle Beobachtungen müssen wegen desselben verbessert werden. In dem Falle, dafs für eine gewisse Zeit die einzelnen Sterne so nahe denselben Unterschied $24^h - a$ geben, dafs man die Abweichung den möglichen Fehlern der Beobachtungen zuschreiben kann, nimmt man den Gang während dieser Zeit als constant und gleich dem Mittel aus allen a an und multiplicirt die beobachteten Rectascensionsunterschiede mit $\frac{24}{24-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{24}}$, um dieselben vom Gange der Uhr zu befreien. Zeigt sich aber ein mit der Zeit wachsender oder abnehmender Gang der Uhr und sind die Beobachtungen zahlreich genug, so kann man den stündlichen Gang zur Zeit t von der Form annehmen $a + b\,(t - T)$, wo a der Gang zur Zeit T ist. Multiplicirt man dies mit dt und integrirt zwischen den Grenzen t und $24 + t$, so findet man den Gang während zweier Culminationen eines Sterns, der zur Zeit t in den Meridian kommt, gleich

$$24\,a + 24\,b\,(12 + t - T) = u$$

und indem man für alle so beobachteten Sterne den Coefficienten von b berechnet und dann u dem aus den einzelnen Sternen gefundenen Gange gleichsetzt, erhält man eine Anzahl von Bedingungsgleichungen, aus denen man a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen kann. Zuletzt erhält man den Gang während der Zeit $t'' - t'$ durch

$$a(t''-t')+b(t''-t')\left\{\frac{t'+t''}{2}-T\right\},$$

um welche Gröfse jede beobachtete Zwischenzeit $t''-t'$ verbessert werden mufs.

Hat man aber schon eine Reihe von Sternen, deren Rectascensionsunterschiede genau bestimmt sind, so giebt der Unterschied des scheinbaren Ortes jedes Sterns und der an der Uhr beobachteten Zeit U den Fehler der Uhr ΔU, der bei allen Sternen innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler und der Fehler der Sternörter gleich sein wird, wenn die Uhr genau nach Sternzeit geht. Hat dieselbe aber den Gang a zur Zeit T, so giebt jeder Stern eine Gleichung von der Form:

$$0=U-\alpha+\Delta U+a(t-T)+\frac{b}{2}(t-T)^2$$

und aus vielen Sternen kann man daher ΔU, a und b bestimmen.

Um nun die Culminationszeiten der Sterne zu beobachten, ist es nöthig, den Meridiankreis so zu berichtigen, dafs der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes in jeder Lage des Fernrohrs im Meridiane oder, wenn dies nicht der Fall ist, die Abweichung desselben vom Meridiane bekannt ist*). Ist die Collimationslinie, d. h. die Linie vom Mittelpunkte des Objectivs nach dem Fadenkreuze senkrecht auf der Axe der Zapfen (der Umdrehungsaxe des Instruments), so beschreibt dieselbe bei der Umdrehung des Fernrohrs eine Ebene, welche die Himmelskugel in einem gröfsten Kreise schneidet. Ist dann die Axe der Zapfen horizontal, so wird dieser gröfste Kreis ein Verticalkreis und wenn diese Axe endlich nach den Punkten Ost und West des Horizonts gerichtet ist, so bewegt sich die Collimationslinie im Meridiane. Das Instrument erfordert daher drei Berichtungen.

Die Horizontalität der Axe kann immer, wie in No. 1

---

*) Die vollständigen Methoden zur Berichtigung des Meridiankreises, sowie zur Bestimmung der Fehler desselben und der deswegen nothwendigen Correctionen der Beobachtungen werden im siebenten Abschnitte gegeben. Hier soll nur gezeigt werden, dafs diese Bestimmungen vollständig gemacht werden können, ohne die Kenntnifs der Oerter der Sterne selbst nöthig zu haben.

des letzten Abschnitts gezeigt wird, mittelst einer Wasserwage geprüft und auch berichtigt werden, da das eine der Zapfenlager durch Schrauben erhöht und erniedrigt werden kann. Der Winkel, welchen die Collimationslinie mit der Axe macht, kann durch Umlegen des ganzen Instruments in seinen Lagern berichtigt werden, indem man das Fernrohr in jeder Lage des Instruments auf ein entferntes irdisches Object richtet, oder noch besser auf ein zu dem Zwecke vor dem Fernrohre des Meridiankreises aufgestelltes Fernrohr (Collimator), dessen Collimationslinie mit der des Meridiankreises zusammenfällt. Ist nämlich im Brennpunkte dieses Fernrohrs ebenfalls ein Fadenkreuz, so wird dies im Fernrohre des Meridiankreises ebenso wie ein unendlich entferntes Object gesehen werden, da die vom Fadenkreuze ausgehenden Strahlen das Objectiv des Collimators parallel verlassen. Ist nun der Winkel, welchen die Collimationslinie mit der Axe des Meridiankreises macht, von einem rechten Winkel um x verschieden, so werden die Winkel, welche die Axen der beiden Fernröhre in beiden Lagen des Meridiankreises mit einander machen, um $2x$ verschieden sein, oder das Fadenkreuz des festen Fernrohrs wird sich, im Fernrohre des Meridiankreises gesehen, um den Winkel $2x$ gegen das andre Fadenkreuz bewegt zu haben scheinen. Verschiebt man dann dies Fadenkreuz durch Schrauben, welche dasselbe senkrecht gegen die Gesichtslinie bewegen, um den Winkel x, so wird jetzt die Collimationslinie senkrecht auf der Umdrehungsaxe stehen und das Fadenkreuz des Collimators wird in beiden Lagen des Instruments seine Lage gegen das Fadenkreuz des Instruments unverändert beibehalten, oder richtiger in beiden Lagen gleichweit vom Durchschnittspunkte des Fadenkreuzes abstehen. Sollte dies noch nicht genau der Fall sein, so kann man durch Wiederholung der Operation den Fehler beliebig klein machen.

Wenn diese Berichtigungen gemacht sind, beschreibt die Collimationslinie einen Verticalkreis. Um endlich die horizontale Axe genau von Ost nach West zu richten, muſs man zur Beobachtung der Sterne seine Zuflucht nehmen, aber die Kenntniſs der Oerter derselben ist nicht erforderlich. Die Circumpolarsterne, z. B. der Polarstern, beschreiben, auſser

unter sehr kleinen Polhöhen, einen vollen Kreis über dem Horizonte. Bewegt sich nun das Fernrohr in einem Verticalkreise und ist es wenigstens dem Meridian nahe, so wird die Gesichtslinie den Parallelkreis des Sterns in zwei Punkten schneiden, der Stern wird also zweimal während seines Umlaufs im Fernrohre gesehen werden können. Beobachtet man dann die Zeiten der Durchgänge durch das Fadenkreuz zuerst über, dann unter dem Pole, so wird nur in dem Falle, dafs sich das Fernrohr im Meridiane bewegt, die Zwischenzeit gleich 12 Stunden Sternzeit $+ \Delta\alpha$ sein, wo $\Delta\alpha$ jetzt die Aenderung der scheinbaren Rectascension des Sterns in 12 Stunden ist; während die Zeit gröfser oder kleiner sein wird, je nachdem sich das Fernrohr auf der Ost- oder Westseite vom Meridiane bewegt. Da nun das eine der Zapfenlager eine Bewegung in der Richtung von Nord nach Süd zuläfst, so kann man dies solange verrücken, bis die Zwischenzeit zwischen zwei Beobachtungen genau gleich $12^h + \Delta\alpha$ ist, wenn das Fernrohr im Meridiane oder die Axe von Ost nach West gerichtet sein wird*).

Man kann auch die Zwischenzeit zwischen drei aufeinander folgenden Durchgängen des Sterns durch den Meridian, von denen also zwei auf derselben Seite des Pols sind, mit einander vergleichen, die, im Falle das Instrument sich im Meridiane bewegt, gleich sein müssen. Sind die Zwischenzeiten ungleich, so bewegt sich das Fernrohr auf derjenigen Seite vom Meridian, auf welcher der Stern die kürzere Zeit verweilt hat.

Beobachtet man nun an einem so berichtigten Instrumente die Durchgangszeiten der Sterne, so erhält man die scheinbaren Rectascensionsunterschiede und an diese sind die Reductionen auf den scheinbaren Ort mit umgekehrten Zeichen anzubringen, um die mittleren Rectascensionsunterschiede für den Anfang des Jahres zu erhalten. Die Berechnung der Formeln für diese Correctionen setzt aber schon eine genä-

---

*) Da die vollkommene Berichtigung des Instruments wegen der Aenderungen der Fehler unpraktisch wäre, so berichtigt man dasselbe nur annähernd und bestimmt durch die obigen oder ähnliche Methoden, wie im letzten Abschnitte gezeigt wird, die Fehler des Instruments und corrigirt die beobachteten Durchgangszeiten wegen dieser Fehler.

herte Kenntniſs der Rectascension und Declination voraus, die man aber durch frühere Sternverzeichnisse hat.

Hat das Gestirn eine sichtbare Scheibe, so kann man nur den Rand desselben beobachten und man muſs daher, da ein solches Gestirn auch eine eigene Bewegung hat, nach No. 28 des ersten Abschnitts die Zeit berechnen, in welcher sich der Halbmesser desselben durch den Meridian bewegt und diese Zeit zu der beobachteten Zeit hinzulegen oder davon abziehen, je nachdem man den dem Mittelpunkte vorhergehenden oder den demselben folgenden Rand beobachtet hat. Bei der Sonne, wo man beide Ränder beobachten kann, kann man einfach das Mittel aus den beiden Beobachtungszeiten nehmen.

Die Uhrzeiten der Culminationen der Sterne können noch auf eine andre Weise, nämlich durch die Beobachtung der Zeiten, zu welchen die Sterne gleiche Höhen auf beiden Seiten des Meridians erreichen, bestimmt werden. Zu diesen Beobachtungen ist ein Höhenkreis erforderlich, der an einer verticalen Säule befestigt ist, welche selbst eine Bewegung um ihre Axe zuläſst, sodaſs der Kreis in die Ebene aller Verticalkreise gebracht werden kann. Beobachtet man mit einem solchen Instrumente die Zeiten, zu welchen ein Stern gleiche Höhen auf beiden Seiten des Meridians erreicht, so ist die halbe Summe dieser Zeiten die Uhrzeit der Culmination des Sterns. Es ist klar, daſs man die Höhe des Sterns selbst gar nicht zu kennen braucht, und es ist nur wesentlich, daſs das Fernrohr in beiden Beobachtungen genau denselben Winkel mit dem Horizonte macht. Sind aber die beiden Winkel etwas verschieden, so kann man leicht den dadurch verursachten Fehler der Uhrzeit der Culmination berechnen; denn, wenn die westliche Zenithdistanz von Δz zu groſs beobachtet ist, so ist der Stern in einem Stundenwinkel beobachtet, der um $\frac{\Delta z}{\cos \varphi \sin A}$ zu groſs ist und man muſs daher von dem Mittel der beiden Zeiten die Correction $\frac{1}{30} \frac{\Delta z}{\cos \varphi \sin A}$ abziehen. Eine solche Correction wird schon immer wegen der Refraction zu machen sein; denn obwohl die mittlere Refraction für die beiden Beobachtungen dieselbe ist, wenn die Höhe dieselbe ist, so wird doch der verschiedene Stand der

meteorologischen Instrumente zu den Zeiten beider Beobachtungen einen kleinen Unterschied hervorbringen, dessen Einfluſs nach der obigen Formel berechnet werden kann. Bei der Sonne macht auch die Aenderung der Declination während der Zwischenzeit beider Beobachtungen eine Correction nothwendig.

Aus der Formel $\frac{dz}{dt} = \cos\varphi \sin A$ sieht man, daſs es am Vortheilhaftesten sein wird, die Zenithdistanzen der Sterne in der Nähe des ersten Verticals zu beobachten, weil sich dieselben dort am schnellsten ändern, und besonders vortheilhaft werden diese Bestimmungen in der Nähe des Aequators, weil dort auch $\cos\varphi$ nahe gleich Eins ist und für Gestirne nahe am Aequator. Da die Bestimmung der absoluten Rectascensionen, wie man später sehen wird, auf solchen Beobachtungen beruht, so wird dieselbe an einem Orte in der Nähe des Aequators sich mit Vortheil nach der obigen Methode machen lassen.

6. Stellt man die Sterne bei dem Durchgange durch den verticalen Faden des Meridiankreises auch auf den horizontalen Faden ein und liest die Zahlen ab, welche die Nonien oder Mikroskope auf dem Kreise angeben, so erhält man aus den Unterschieden dieser Zahlen die Unterschiede der scheinbaren Meridianhöhen *). Kennt man dann auch den Zenithpunkt des Kreises, so erhält man, wenn man denselben von allen Ablesungen abzieht, die scheinbaren Zenithdistanzen der Sterne. Diesen Punkt kann man aber leicht durch die Beobachtung der reflectirten Bilder der Fäden in einem Quecksilberhorizonte finden. Richtet man nämlich das Fernrohr nach dem Nadir und stellt ein Gefäſs mit Quecksilber unter das Objectiv, so wird man, wenn man Licht von der Auſsenseite des Oculars nach dem Quecksilber hin reflectirt, auſser den Fäden auf hellem Grunde auch die reflectirten Bilder derselben erblicken, und wenn man das Fernrohr

---

*) Im siebenten Abschnitte werden die vollständigen Correctionen gegeben, die an diese Ablesungen anzubringen sind, um dieselben von den Fehlern des Instruments zu befreien, wie z. B. den Theilungsfehlern und den von der Einwirkung der Schwere auf die einzelnen Theile des Instruments herrührenden Fehlern.

soweit bewegt, daſs das reflectirte Bild des horizontalen Fadens mit dem Faden zusammenfällt, so wird das Fernrohr nach dem Nadir gerichtet sein, man erhält daher dann durch die Ablesung den Nadirpunkt, mithin auch den Zenithpunkt des Kreises.

Die scheinbaren Zenithdistanzen der Sterne müssen zunächst von der Refraction und, wenn man die Sonne, den Mond oder einen der Planeten beobachtet, auch von der Parallaxe befreit werden, indem man zu der Zenithdistanz die nach Formel (A) in No. 12 des dritten Abschnitts berechnete Refraction addirt und davon $p \sin z$ abzieht, wo p die Horizontalparallaxe ist (auſser beim Monde, wo die strenge Formel anzuwenden ist). Hat das Gestirn eine sichtbare Scheibe wie die Sonne, so muſs man an die beobachtete und wegen Refraction und Parallaxe verbesserte Zenithdistanz des Randes noch den Halbmesser anbringen, oder wenn man den oberen sowohl als unteren Rand der Sonne beobachtet hat, aus beiden corrigirten Zenithdistanzen das Mittel nehmen. Da man in diesem Falle die Einstellung des oberen und unteren Randes in einiger Entfernung vom verticalen Faden, also vom Meridian machen muſs, so ist es nöthig, noch eine kleine Correction anzubringen (deren Ausdruck im siebenten Abschnitte gegeben wird), da der Horizontalfaden einen gröſsten Kreis an der Himmelskugel darstellt, also vom Parallel des Gestirns verschieden ist.

Kennt man die Zenithdistanzen im Meridiane, so erhält man daraus nach No. 23 des ersten Abschnitts die Declinationen, wenn die Polhöhe des Standpunkts des Instruments bekannt ist. Diese kann man aber leicht bestimmen, indem man nach dem Vorigen die Zenithdistanzen der Circumpolarsterne in der oberen und unteren Culmination beobachtet, da die halbe Summe der wegen der Refraction corrigirten Zenithdistanzen $+ \frac{1}{2} \Delta \delta$ gleich der Aequatorhöhe des Beobachtungsortes ist, wo $\Delta \delta$ die Aenderung der Reduction auf die scheinbare Declination während der Zwischenzeit ist. Man kann auch die Polhöhe dadurch bestimmen, daſs man die Circumpolarsterne in der oberen und unteren Culmination sowohl direct, als auch von einem künstlichen Horizonte reflectirt beobachtet. Dann ist die halbe Summe der wahren

Höhen in der oberen und unteren Culmination weniger $\frac{1}{2}\Delta\delta$ gleich der Polhöhe des Beobachtungsortes. Da aber die directen und reflectirten Beobachtungen nicht gleichzeitig gemacht werden können, auch gewöhnlich bei jeder Culmination mehrere Beobachtungen in der Nähe des Meridians gemacht werden, so mufs man in dem Falle an jede einzelne Beobachtung die Reduction auf den Meridian anbringen, wie dies im siebenten Abschnitte beim Meridiankreise gezeigt wird.

Für einen Beobachtungsort in der Nähe des Aequators lassen sich diese Methoden der Bestimmung der Polhöhe durch die Circumpolarsterne nicht anwenden. Für einen solchen Ort mufs man die Höhe oder Zenithdistanz des Aequators durch die Beobachtung der Sonne bestimmen, wie dies in der folgenden Nummer gezeigt werden wird.

Nachdem so die Polhöhe des Beobachtungsorts bestimmt ist, findet man aus den wegen Refraction verbesserten Zenithdistanzen die scheinbaren Declinationen der Sterne, die dann durch Anbringung der Reduction auf den scheinbaren Ort mit ungekehrten Zeichen in mittlere Declinationen für den Anfang des Jahres verwandelt werden.

7. Da für die Sonne

$$\sin A \operatorname{tang} \varepsilon = \operatorname{tang} D,$$

so giebt die Beobachtung der Declination der Sonne entweder die Schiefe der Ecliptic, wenn die Rectascension bekannt ist, oder die Rectascension, wenn die Schiefe als bekannt angenommen wird. Die Differentialgleichung (welche man erhält, wenn man die obere Gleichung logarithmisch differenzirt)

$$\operatorname{cotang} A \,.\, dA + \frac{2\,d\varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \frac{2\,dD}{\sin 2D}$$

zeigt aber, dafs es am Vortheilhaftesten ist, die Schiefe der Ecliptic durch Beobachtungen in der Nähe der Solstitien, die Rectascension dagegen durch Beobachtungen in der Nähe der Aequinoctialpunkte zu bestimmen. Beobachtet man die Declination der Sonne zur Zeit, wenn die Rectascension derselben 90° oder 270° ist, so ist dieselbe, wenn man die Breite der Sonne davon abzieht, gleich der Schiefe der Ecliptic. Wenn man aber auch nur die Declination in der Nähe der Solstitialpunkte beobachtet, so wird man, wenn man die Lage des Frühlingspunkts näherungsweise kennt, durch Rechnung

entweder nach obiger Formel, oder besser durch die Entwickelung derselben in eine Reihe, die Schiefe der Ecliptic finden. Sei D' die beobachtete Declination, B die Breite der Sonne, so wird nach den Formeln in der Anm. zu No. 11 des ersten Abschnitts

$$D' - \frac{\cos \varepsilon}{\cos D} B = D$$

die wegen der Breite der Sonne verbesserte Declination sein, welche man beobachtet haben würde, wenn der Mittelpunkt der Sonne in der Ecliptic gestanden hätte. Ist dann x die Entfernung der Sonne vom Solstitialpunkte in Rectascension, also gleich $90^0 - A$, so hat man die Gleichung:

$$\cos x \operatorname{tang} \varepsilon = \operatorname{tang} D,$$

aus der man, da x nach der Voraussetzung eine kleine Gröſse ist, ε in eine schnell convergirende Reihe entwickeln kann, indem man nach Formel (18) in No. 11 der Einleitung erhält:

$$\varepsilon = D + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x^2 . \sin 2 D + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x^4 \sin 4 D + \ldots \qquad (A)$$

Danach kann man also aus einer Beobachtung der Declination der Sonne in der Nähe eines der Solstitialpunkte die Schiefe der Ecliptic leicht bestimmen. Es ist klar, daſs die Aberration der Sonne, die nur den scheinbaren Ort in der Ecliptic ändert, keinen Einfluſs auf das Resultat hat. Ebenso wenig wird ε geändert, wenn A und D mittelst der Präcession auf ein andres Aequinoctium reducirt würden. Ist aber A und D mit der Nutation behaftet, so wird auch das gefundene ε die scheinbare, mit Nutation behaftete Schiefe der Ecliptic sein.

Am 19. Juni 1843 wurde zu Königsberg die Declination der Sonne beobachtet gleich $+ 23^0 26' 8''.57$, welcher Werth schon wegen der Refraction und Parallaxe verbessert ist. Die Rectascension zu derselben Zeit ward $5^h 48^m 50^s.54$ gefunden. Es ist also für diesen Fall $x = 0^h 11^m 9^s.46 = 2^0 47' 21''.90$, und da die Breite der Sonne gleich $+ 0''.70$ war, so wird:

$D =$	$+ 23^0\ 26'\ \ 7''.87$
I. Glied der Reihe $=$	$+ 1\ \ 29\ .23$
II. Glied der Reihe $=$	$+ 0\ .04$
	$\varepsilon = 23^0\ 27'\ 37''.14.$

Dies ist also die scheinbare Schiefe für 1843 Juni 19, wie dieselbe aus dieser Beobachtung folgt. Berechnet man

nun die Nutation der Schiefe nach den Formeln in No. 5 des zweiten Abschnitts, so findet man, da $\Omega = 272^0\,37'.4$, $\odot = 87^0\,0'$, $☾\,350^0\,17'$ und $P = 280^0\,14'$ ist, $\Delta\varepsilon = +0''.05$, mithin wird die mittlere Schiefe für diesen Tag nach dieser Beobachtung $23^0\,27'\,37''.09$.

Dasselbe hätte man, nur auf längerem Wege, erhalten, wenn man A und D nach den in No. 5 und 7 des zweiten Abschnitts gegebenen Vorschriften wegen der Nutation verbessert und mit diesen verbesserten Werthen die Formel (A) berechnet hätte. Es ist aber die Nutation der Länge gleich $+17''.18$, womit man findet $\Delta\alpha = +1^s.25$, $\Delta\delta = +0''.39$, mithin:

Verbessertes $D =$	$23^0\,26'\;\;7''.48$
I. Glied	$+1\;29\;.57$
II. Glied	$+0\;.04$
Mittlere Schiefe $=$	$23^0\,27'37''.09.$

Um nun das Resultat von den zufälligen Beobachtungsfehlern zu befreien, beobachtet man die Declination der Sonne an möglichst vielen, in der Nähe des Solstitiums liegenden Tagen und nimmt aus den einzelnen dadurch erhaltenen Bestimmungen von ε das Mittel. Die in x und D möglicherweise vorhandenen constanten Fehler werden aber auf diese Weise nicht eliminirt. Bezeichnet man die mit den Werthen x und D nach dem Vorigen berechnete Schiefe durch ε', den wahren Werth der Schiefe durch ε, die Fehler von x und D durch dx und dD, so giebt jede Beobachtung die Gleichung:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \tfrac{15}{2}\,\text{tang}\,x \sin 2\varepsilon\; dx + \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2D}\, dD,$$

wie man leicht aus der oben gegebenen Differentialgleichung findet und wo dx in Zeitsecunden ausgedrückt ist. Für das obige Beispiel wird z. B.:

$$\varepsilon = 23^0\;27'\;37''.09 + 0.212\,dx + 1.001\;dD,$$

sodafs ein Fehler von einer Zeitsecunde in x erst einen Fehler von $0''.21$ in der Schiefe erzeugt. Nimmt man dann einen Werth ε_0 von ε an, sodafs $\varepsilon = \varepsilon_0 + d\varepsilon$ ist und setzt $\varepsilon_0 - \varepsilon' = n$, so giebt eine jede Beobachtung eine Gleichung von der Form:

$$0 = n + d\varepsilon - \tfrac{15}{2}\,\text{tang}\,x \sin\varepsilon\; dx - \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2D}\, dD.$$

Behandelt man dann alle Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so kann man aus den drei Gleichungen des Minimums $d\varepsilon$ als Function von dx und dD darstel-

len, sodaſs man dann leicht, wenn man genöthigt sein sollte, die Rectascensionen oder Declinationen um die constanten Gröſsen $dA = -dx$ und dD zu ändern, die daraus entstehende Aenderung von ε findet. Der aus den Beobachtungen eines Solstitiums gefundene wahrscheinlichste Werth der Schiefe wird also die Form haben:

$$\varepsilon' + a dD + b dx,$$

wo der Coefficient von dD immer nahe gleich eins ist. Sind keine constanten Fehler in D und x vorhanden, also dD und dx gleich Null, so sollte man, wenn man eine ähnliche Bestimmung zur Zeit des Wintersolstitiums macht, bis auf die Säcularveränderung 0".23 während der Zwischenzeit der Beobachtungen denselben Werth für die Schiefe erhalten. Im Allgemeinen werden sich aber die bei den einzelnen Zenithdistanzen gemachten zufälligen Fehler oder zufällige Fehler in der Refraction nicht völlig in dem Mittel der um das Solstitium herum gemachten Beobachtungen aufheben, sodaſs man erst hoffen kann, aus dem Mittel einer Anzahl von beobachteten Solstitien auf eine Epoche reducirt, einen genauen Werth für die Schiefe zur Zeit dieser Epoche zu erhalten. Bestimmt man aber die mittlere Schiefe der Ecliptic zu verschiedenen Zeiten, so erhält man zugleich die Säcularänderung derselben. Hat man zur Zeit t die mittlere Schiefe ε beobachtet und nimmt man an, daſs zur Zeit t_0 der wahre Werth der mittleren Schiefe $\varepsilon_0 + d\varepsilon$ war, und daſs die jährliche Abnahme $\Delta\varepsilon + x$ ist, so würde, wenn der beobachtete Werth der richtige wäre,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + d\varepsilon - (\Delta\varepsilon + x)(t - t_0)$$

sein.

Setzt man daher

$$\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon(t - t_0) - \varepsilon = n,$$

so giebt jede Beobachtung der mittleren Schiefe zur Zeit eines Solstitiums eine Gleichung von der Form:

$$0 = n + d\varepsilon + x(t - t_0)$$

und wenn man mehrere solcher Bestimmungen hat, so kann man daraus die wahrscheinlichsten Werthe von $d\varepsilon$ und x nach der Methode der kleinsten Quadrate finden. Bessel fand so aus der Vergleichung seiner eigenen Beobachtungen mit denen von Bradley für die mittlere Schiefe der Ecliptic für

1800 den Werth $23^\circ 27' 54''.80$ und die jährliche Abnahme $0''.457$, während Peters aus der Vergleichung der Struveschen Beobachtungen mit denen von Bradley die mittlere Schiefe für die Zeit t gleich

$$23^\circ 27' 54''.22 - 0''.4645 (t - 1800)$$

fand, ein Werth, der jetzt gewöhnlich als der genauere angenommen wird.

Ist bei der Bestimmung der Declinationen ein constanter Fehler gemacht, z. B. die Polhöhe nur annähernd bekannt, so werden sich auch in der aus den Sommer- und Wintersolstitien bestimmten Schiefe constante Unterschiede zeigen. Da $D = z + \varphi$, so würde man, wenn $d\varphi$ die an die angenommene Polhöhe anzubringende Verbesserung bezeichnet und ε wieder der wahre, ε' der aus den Beobachtungen hergeleitete Werth der Schiefe ist, zur Bestimmung von $d\varphi$ aus dem Sommersolstitium die Gleichung haben:

$$\varepsilon = \varepsilon' + a\, d\varphi,$$

dagegen aus dem Wintersolstitium die Gleichung:

$$\varepsilon_{,} = \varepsilon'' - a'\, d\varphi$$

und es wäre daher:

$$d\varphi = \frac{\varepsilon'' - \varepsilon' + \varepsilon - \varepsilon_{,}}{a + a'},$$

wo $\varepsilon - \varepsilon_{,}$ die Säcularänderung ist. Dies ist die Verbesserung der Polhöhe, vorausgesetzt, daſs in der Bestimmung von z kein constanter Fehler ist. Einen genäherten Werth für die Polhöhe findet man auch auf diese Weise schon durch die Beobachtung der Zenithdistanz der Sonne an den Tagen des Sommer- und Winter-Solstitiums. Sind nämlich z' und z'' die wegen Refraction, Parallaxe und Nutation corrigirten Zenithdistanzen und nimmt man südliche Zenithdistanzen negativ, so wird:

$$\varphi = -\frac{z' + z''}{2}.$$

8. Kennt man die Schiefe der Ecliptic, so kann man die absolute Rectascension eines Sterns und somit aus den Rectascensionsunterschieden die Rectascensionen aller Sterne bestimmen. Man wählt dazu immer einen hellen Stern aus, den man auch bei Tage immer beobachten kann und der in der Nähe des Aequators steht, wie z. B. α Canis minoris (Procyon) oder α Aquilae (Atair). Beobachtet man nun den

Stern im Meridian zur Uhrzeit t, die Sonne zur Zeit T, so ist die Zeit $t - T$, wegen des Ganges der Uhr corrigirt, gleich dem Rectascensionsunterschiede des Sterns und der Sonne zur Zeit der Culmination derselben. Hat man dann auch bei der Culmination die Declination der Sonne beobachtet, so erhält man die Rectascension der Sonne aus der Gleichung:

$$\sin A \operatorname{tang} \varepsilon = \operatorname{tang} D,$$

wo wieder vorausgesetzt ist, dafs D wegen der Parallaxe und Breite der Sonne corrigirt ist. Man findet daher auch:

$$\alpha = \operatorname{arc} \sin \frac{\operatorname{tang} D}{\operatorname{tang} \varepsilon} + t - T,$$

wo strenge genommen auch die Zeit T wegen der Breite der Sonne corrigirt sein mufs, indem man dazu $+ \cos A \sec \delta \sin \varepsilon \frac{B}{15}$ addirt.

Ist die angenommene Schiefe ε und die beobachtete Declination D fehlerhaft, so wird man auch α, abgesehen von den Beobachtungsfehlern in der Zwischenzeit $t - T$, fehlerhaft erhalten. Um den Einflufs solcher Fehler zu schätzen, dient wieder die in der vorigen Nummer gefundene Differentialgleichung:

$$dA = - \frac{2 \operatorname{tang} A}{\sin 2 \varepsilon} d\varepsilon + \frac{2 \operatorname{tang} A}{\sin 2 D} dD,$$

wonach also jede Beobachtung die Gleichung giebt:

$$\alpha = \operatorname{arc} \sin \frac{\operatorname{tang} D}{\operatorname{tang} \varepsilon} + t - T - \frac{2 \operatorname{tang} A}{\sin 2 \varepsilon} d\varepsilon + \frac{2 \operatorname{tang} A}{\sin 2 D} dD. \qquad (A)$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dafs es am vortheilhaftesten ist, die Beobachtungen in der Nähe des Aequinoctiums anzustellen, da dann die Coefficienten von $d\varepsilon$ und dD am kleinsten werden, nämlich für $d\varepsilon$ gleich Null und für dD gleich cotang ε oder 2.3. Man sieht ferner, dafs man die Beobachtungen so combiniren kann, dafs der Einflufs eines Fehlers in ε sowohl als eines constanten Fehlers in D verschwindet. Nimmt man nämlich aus der Gleichung $\sin A = \frac{\operatorname{tang} D}{\operatorname{tang} \varepsilon}$ für A immer den spitzen Winkel, so erhält man für die Rectascension $180^0 - A'$ der Sonne, wenn t' und T' wieder die beobachteten Culminationszeiten des Sterns und der Sonne bezeichnen, die Gleichung:

$$\alpha = 180 - \operatorname{arc} \sin \frac{\operatorname{tang} D'}{\operatorname{tang} \varepsilon} + t' - T' + \frac{2 \operatorname{tang} A'}{\sin 2 \varepsilon} d\varepsilon - \frac{2 \operatorname{tang} A'}{\sin 2 D'} dD,$$

und indem man diese Gleichung mit der vorigen verbindet:

$$a = \tfrac{1}{2}[(t-T)+(t'-T')] + \tfrac{1}{2}\left[\arcsin\frac{\tang D}{\tang \varepsilon} - \arcsin\frac{\tang D'}{\tang \varepsilon} + 180^0\right]$$
$$+\left[\frac{\tang A}{\sin 2D} - \frac{\tang A'}{\sin 2D'}\right] dD - \frac{\tang A - \tang A'}{\sin 2\varepsilon}\, d\varepsilon. \qquad (B)$$

Ist nun der spitze Winkel $A' = A$, so ist auch $D' = D$. Beobachtet man also die Rectascensionsunterschiede der Sonne und eines Sterns zu den Zeiten, wo die Sonne die Rectascensionen A und $180^0 - A$ hat, so werden die Coefficienten von dD und $d\varepsilon$ in der Gleichung (B) gleich Null, die constanten Fehler in der Declination und der Schiefe werden dann also ohne allen Einfluſs auf die Rectascension des Sterns sein. Man wird dies zwar nie in aller Strenge erreichen können, weil es sich nie so treffen wird, daſs, wenn die Sonne bei einer Culmination die Rectascension A hat, auch grade die Rectascension $180^0 - A$ mit einer Culmination zusammentrifft. Wenn aber auch nur A' nahe gleich $180^0 - A$ ist, so wird der übrig bleibende, von dD und $d\varepsilon$ abhängige Fehler doch immer nur höchst gering sein.

Um also die absolute Rectascension eines Sterns zu bestimmen, muſs man die Rectascensionsunterschiede der Sonne und eines Sterns um das Frühlings- und Herbstäquinoctium herum beobachten. Hat man aber das eine Mal nach dem Frühlingsäquinoctium beobachtet, so muſs man die zweite Beobachtung ebenso lange vor dem Herbstäquinoctium anstellen und umgekehrt, fällt die erste Beobachtung vor das Frühlingsäquinoctium, so muſs die zweite Beobachtung ebenso lange nach dem Herbstäquinoctium gemacht werden. In der Verbindung zweier solcher Beobachtungen heben sich die constanten Fehler in D und ε auf und es bleiben nur die bei der Beobachtung begangenen zufälligen Fehler der Culminationszeiten und Declinationen im Resultate zurück. Diese kann man nur durch die Anzahl der Beobachtungen eliminiren und man muſs daher zu dem Ende nicht bloſs zwei, sondern eine möglichst groſse Anzahl von Beobachtungen, die vor und nach dem Frühlingsäquinoctium und ebenso vor und nach dem Herbstäquinoctium angestellt sind, verbinden, wo man sich aber gar nicht auf die Nähe des Aequinoctiums zu

beschränken braucht. Nimmt man für α einen genäherten Werth α_0 an, sodaſs $\alpha = \alpha_0 + d\alpha$ ist und setzt:

$$\alpha_0 - \text{arc sin}\,\frac{\text{tang}\,D}{\text{tang}\,\varepsilon} - (t - T) = n,$$

so giebt jede Beobachtung eine Gleichung von der Form:

$$0 = n + d\alpha + \frac{2\,\text{tang}\,A}{\sin 2\,\varepsilon}\,d\varepsilon - \frac{2\,\text{tang}\,A}{\sin 2\,D}\,dD.$$

Behandelt man alle Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so kann man daraus die wahrscheinlichsten Werthe von $d\alpha$, $d\varepsilon$ und dD finden oder auch aus den Gleichungen des Minimums $d\alpha$ als Function von $d\varepsilon$ und dD bestimmen, sodaſs, wenn man $d\varepsilon$ und dD aus anderen Beobachtungen ableitet und diese Werthe in dem Ausdrucke von $d\alpha$ substituirt, man diejenige Correction $d\alpha$ findet, welche mit diesen Werthen von $d\varepsilon$ und dD die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum macht. Ist die Anzahl der Beobachtungen groſs und sind dieselben um die beiden Aequinoctien gehörig vertheilt, so werden die Coefficienten von $d\varepsilon$ und dD in der Endgleichung für $d\alpha$ immer sehr klein sein.

Liegen die beobachteten Declinationen zwischen den Grenzen $\mp D$, so kann es sein, daſs, wenn die Beobachtungen sich weit vom Aequinoctium erstrecken, die Aenderung dD für die ganze Ausdehnung $2\,D$ nicht als constant angenommen werden kann, z. B. in dem Falle, daſs die am Instrumente abgelesenen Bogen Fehler besitzen, die von der Zenithdistanz abhängen, oder wenn die Constante der Refraction einer Verbesserung bedürfen sollte. Obwohl auch in diesem Falle der Einfluſs der Fehler auf das Resultat Null wird, wenn die Beobachtungen symmetrisch vertheilt sind, so würde doch der gefundene Werth von dD oder das von dD abhängige Glied in dem Endausdruck für $d\alpha$ keinen Sinn haben oder sich wenigstens nur auf einen Mittelwerth beziehen. In diesem Falle wird man die Beobachtungen in Gruppen, nach der Zenithdistanz geordnet, vertheilen, innerhalb welcher man den Fehler dD als nahe constant betrachten kann und die einzelnen Gruppen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln. Da $D = \varphi - z - \varrho$ ist, wenn die Zenithdistanz auf der Südseite vom Zenith ist, so kann man in dem Falle

statt dD in der obigen Gleichung setzen $d\varphi - dk \operatorname{tang} z - \beta f(z)$, wenn dk die Verbesserung der Refractionsconstante und $\beta f(z)$ die an die Ablesungen anzubringende Correction bedeutet. Für die Bestimmung dieser Unbekannten selbst besitzt man aber im Allgemeinen bessere Mittel.

Am 24. März 1843 wurde in Königsberg die Declination des Mittelpunkts der Sonne, von Refraction und Parallaxe befreit, gefunden:

$$D' = +1^\circ\, 15'\, 27''.24$$

und die Zwischenzeit zwischen der Culmination der Sonne und des Sterns α Canis minoris, wegen des Ganges der Uhr verbessert:

$$t - T = 7^h\, 19^m\, 29^s.86.$$

Da die Breite der Sonne $+0''.21$ war, so wird die Correction der Declination $-0''.19$, während die der Zeit T Null ist. Die Gröfsen D und T für die Sonne brauchen nun nicht von der Aberration befreit zu werden, da diese nur den Ort der Sonne in der Ecliptic ändert, für den Stern findet man aber nach der Formel (A) in No. 16 des dritten Abschnitts, da die Länge der Sonne $3^\circ\, 10'$ und der genäherte Ort des Sterns $\alpha = 112^\circ\, 46'$ und $\delta = +5^\circ\, 37'$ ist:

$$\alpha' - \alpha = 0^s.42.$$

Da dies von der Zeit t abzuziehen ist, so erhält man also:

$$t - T = 7^h\, 19^m\, 29^s.44$$
$$D = +1^\circ\, 15'\, 27''.05,$$

beides auf das scheinbare Aequinoctium zur Zeit der Beobachtung bezogen. Nimmt man nun für die mittlere Schiefe an dem Tage $23^\circ\, 27'\, 35''.05$, so mufs man hierzu die Nutation addiren, um die scheinbare Schiefe zur Zeit der Beobachtung zu erhalten. Da aber:

$$\Omega = 277^\circ\, 13'.8, \quad \odot = 1^\circ\, 14', \quad ☾ = 283^\circ\, 56', \quad P = 280^\circ\, 14'$$

ist, so erhält man nach der Formel in No. 5 des zweiten Abschnitts $\Delta\varepsilon = +1''.72$ also:

$$\varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 36''.77.$$

Damit findet man dann

$$A = \arcsin \frac{\operatorname{tang} D}{\operatorname{tang} \varepsilon} = 2^\circ\, 53'\, 57''.44 = 0^h\, 11^m\, 35^s.83.$$

Es wird daher die auf das scheinbare Aequinoctium bezogene Rectascension

$$\alpha = 7^h\, 31^m\, 5^s.27$$

und wenn man noch die Nutation in Rectascension $+1^s.10$ und die Präcession und eigene Bewegung vom Anfange des Jahres bis März 24 gleich $+0.71$ abziehet (indem die jährliche Aenderung $+3^s.146$ ist), und wenn man auch die Coefficienten von dD und $d\varepsilon$ berechnet, so erhält man aus dieser Beobachtung die mittlere Rectascension von α Canis minoris für 1843.0

$$\alpha = 7^h\,31^m\,3^s.46 + 0.1539\,dD - 0.0092\,d\varepsilon,$$

wo dD und $d\varepsilon$ in Bogensecunden ausgedrückt sind.

Ebenso wurde am 20. September desselben Jahres beobachtet:

$$D' = +1^\circ\,16'\,29''.22$$
$$t' - T' = -4^h\,17^m\,5^s.82.$$

Da an dem Tage die Breite der Sonne $-0''.56$ war, ferner $\Omega = 267^\circ 41'.9$, $\odot = 178^\circ 39'$, $☾ = 135^\circ 41'$, $P = 280^\circ 14'$, die von B abhängigen Correctionen von D' und T' gleich $-0''.51$ und $+0^s.01$ sind, ferner die Aberration $= -0^s.56$, die Nutation der Schiefe $+0''.27$ ist, so wird, da die mittlere Schiefe an dem Tage $23^\circ\,27'\,34''.82$ ist:

$$D = +1^\circ\,16'\,29''.73$$
$$t' - T' = -4^h\,17^m\,5^s.27$$
$$\varepsilon = 23^\circ\,27'\,35''.09.$$

Damit findet man $A = 2^\circ 56' 22''.36 = 0^h 11^m 45^s.49$, also die Rectascension der Sonne gleich $11^h 48^m 14^s.51$, mithin $\alpha = 7^h 31^m 9^s.24$ und da die Nutation für den Stern an diesem Tage $+1^s.11$, die Präcession und eigene Bewegung $+2^s.27$ ist, so erhält man aus dieser Beobachtung die mittlere Rectascension für 1843.0

$$\alpha = 7^h\,31^m\,5^s.86 - 0.1539\,dD + 0.0094\,d\varepsilon.$$

Im Mittel aus beiden Beobachtungen erhält man dann, von den constanten Fehlern in D und ε frei

$$\alpha = 7^h\,31^m\,4^s.66\ ^{*}).$$

Man hätte auch die Rechnung so führen können, dafs man von D, T und t die Reduction auf den scheinbaren Ort

*) Nach Bessel's Tabulae Regiomontanae war $\alpha = 7^h\,31^m\,4^s.81$. Da das Mittel aus den beiden Beobachtungen so nahe richtig ist, so müssen auch die zufälligen Fehler in D an beiden Tagen nahe gleich grofs gewesen sein, sodafs sie einander im Resultat nahe aufheben. Vergleicht man die beiden Declinationen mit den Sonnentafeln, so findet man auch für die Fehler der beobachteten Declinationen $+7''.67$ und $+8''.24$.

abgezogen hätte, indem man bei der Sonne die von der Aberration abhängigen Glieder weggelassen hätte. Dann hätte man für ε die für die beiden Beobachtungstage stattfindende mittlere Schiefe nehmen müssen und hätte dann beide Mal A gleich auf das mittlere Aequinoctium zu Anfang des Jahres bezogen erhalten.

9. Ist die absolute Rectascension eines Sterns bestimmt, so sind damit die Rectascensionen aller Sterne bestimmt, deren Rectascensionsunterschied von diesem Sterne beobachtet war und man kann dann dieselben nebst den Declinationen der Sterne in einem Cataloge zusammenstellen. Die von verschiedenen Beobachtern gemachten Cataloge können daher wegen der verschiedenen Bestimmung des Aequinoctiums constante Unterschiede haben, die man durch die Vergleichung einer grofsen Anzahl von Sternörtern, die in den verschiedenen Catalogen vorkommen und auf dieselbe Epoche reducirt sind, bestimmen kann. Aehnliche Unterschiede können auch bei den Declinationen vorkommen und auf dieselbe Weise bestimmt werden. Da aber die Fehler aus schon vorher erwähnten Ursachen veränderlich sein können, so mufs man die Sterne in Zonen von gewisser Breite mit einander vergleichen und so den Unterschied für diese verschiedenen Zonen bestimmen.

Um die relative Bestimmung der Sternörter, sowie die der Planeten und Cometen zu erleichtern, werden die scheinbaren Oerter von einigen Sternen, die mit grofser Genauigkeit bestimmt sind und die mit dem Namen der Fundamentalsterne (*Standard stars*) bezeichnet werden, in den astronomischen Jahrbüchern für die Culminationszeit für jeden zehnten Tag des Jahres gegeben. Um dann die Rectascension und Declination eines unbekannten Objectes zu finden, vergleicht man dasselbe mit einem oder mehreren dieser Fundamentalsterne, indem man den Rectascensions- und Declinationsunterschied beider nach dem Vorigen bestimmt. Ist das unbekannte Object in Declination wenig von dem Fundamentalsterne verschieden, so wird die Bestimmung besonders vortheilhaft, weil dann etwaige Fehler des Instruments und der Aufstellung auf beide Beobachtungen nahe denselben

Einflufs haben und einander daher im Unterschiede beider zum gröfsten Theile vernichten.

Ist das zu bestimmende Object dem Sterne sehr nahe, so kann man die Rectascensions- und Declinationsunterschiede anstatt durch ein Meridiansinstrument auch an einem mit einem Micrometer versehenen Fernrohre beobachten, (wie im siebenten Abschnitte gezeigt wird) eine Methode, die den Vortheil hat, dafs man dieselbe so häufig als man will wiederholen kann und dafs man nicht auf die Culmination des Objects zu warten hat, die überdies bei Tage stattfinden und so die Beobachtung eines schwachen Objects vereiteln kann. Diese Methode wird daher immer angewandt, wenn man die relativen Oerter sehr nahe stehender Sterne oder die Oerter von neuen Planeten oder Cometen bestimmen will. Dazu ist es nöthig, eine grofse Anzahl von Sternörtern zu besitzen, um unter allen Umständen Sterne auffinden zu können, die sich mit dem Objecte micrometrisch verbinden lassen. Zu diesem Zwecke, so wie überhaupt zu einer genaueren Kenntnifs des Fixsternhimmels hat man Sammlungen von Beobachtungen von kleinen Sternen bis zur neunten und zehnten Gröfse und selbst darunter, deren Anzahl noch immer vermehrt wird. Um dabei möglichst viele Sterne mitzunehmen und zugleich die Reduction aller dieser Sterne auf den mittleren Ort zu erleichtern, beobachtet man an jedem Tage nur solche Sterne, die in einer Zone von der Ausdehnung weniger Grade in Declination durch den Meridian gehen, indem man nur die Zeiten der Durchgänge sowie die Ablesung des Kreises für jeden Stern aufzeichnet. Solche Beobachtungen werden daher Zonenbeobachtungen genannt. Für eine jede Zone berechnet man dann eine Tafel, durch welche die mittlere Rectascension und Declination eines jeden Sterns für eine bestimmte Epoche aus den beobachteten Gröfsen hergeleitet werden kann, und da diese Tafeln leicht von Neuem berechnet werden können, wenn genauere Mittel für deren Berechnung, namentlich genauere Sternörter, auf denen sie beruhen, zu Gebote stehen, so ist diese Anordnung der Zonenbeobachtungen besonders vortheilhaft.

Nennt man t die beobachtete Durchgangszeit eines Sterns durch den Faden des Instruments, z die Ablesung des Krei-

ses, so mufs man, um aus beiden die mittlere Rectascension und Declination des Sterns für eine bestimmte Epoche zu erhalten, Correctionen anbringen, nämlich an t den Stand der Uhr, die Abweichung des Instruments vom Meridian, die Reduction auf den scheinbaren Ort mit umgekehrtem Zeichen und die Präcession bis zur Epoche, an z dagegen den Aequatorpunkt des Kreises, die Fehler der Biegung und Theilung, die Refraction und ebenfalls die Reduction auf den scheinbaren Ort mit umgekehrtem Zeichen und die Präcession. Allen diesen Correctionen kann man nun nach Bessel's Vorschlage die bequeme Form geben, dafs man die Werthe k und d derselben für die der Mitte der Zone entsprechende Declination und die verschiedenen in der Zone vorkommenden Werthe von t etwa von 10 zu 10 Minuten in eine Tafel bringt, aufserdem aber noch die Aenderungen k' und d' der Correctionen für 100 Minuten der Declination angiebt, sodafs man die mittlere Rectascension und Declination eines Sterns für die bestimmte Epoche durch die folgenden Formeln erhält, wo Z die Angabe des Instruments für die der Mitte der Zone entsprechende Declination D bezeichnet:

$$\alpha = t + k + k' \frac{z - Z}{100},$$

$$\delta = z + d + d' \frac{z - Z}{100}.$$

Bezeichnet man dann mit u und u' den Stand der Uhr und dessen stündliche Aenderung, mit e und e' die Abweichung des Instruments vom Meridian für die Ablesung Z und die Aenderung für 100 Minuten, mit A den Aequatorpunkt, mit ϱ und s die Refraction und die Fehler der Theilung und Biegung, und mit ϱ' und s' die Aenderungen dieser Gröfsen für 100 Minuten, endlich mit $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die Reduction auf den scheinbaren Ort, so ist, wenn die Theilung im Sinne der Declinationen fortläuft und wenn man den Anfang des Jahres als Epoche nimmt:

$$\alpha = t + u + e + u'(t - T) + e' \frac{(z - Z)}{100} - \Delta\alpha,$$

$$\delta = z - A \mp \varrho \mp \varrho' \frac{z - Z}{100} + s + s' \frac{z - Z}{100} - \Delta\delta.$$

Es ist aber nach den Formeln in No. 3:

$$\Delta\alpha = \frac{f}{15} + \frac{g}{15}\sin(G+\alpha)\operatorname{tang} D + \frac{h}{15}\sin(H+\alpha)\sec D,$$

$$+\left[\frac{g}{15}\,\frac{(\sin G+\alpha)}{\cos D^2}\,100' + \frac{h}{15}\sin(H+\alpha)\,\frac{\operatorname{tang} D}{\cos D}\,100'\right]\frac{z-Z}{100},$$

$$\Delta\delta = g\cos(G+\alpha) + h\cos(H+\alpha)\sin D + i\cos D$$

$$+\left[h\cos(H+\alpha)\cos D\,100' - i\sin D\,100'\right]\frac{z-Z}{100},$$

sodafs man also hat:

$$k = u + e + u'(t-T) - \frac{f}{15} - \frac{g}{15}\sin(G+\alpha)\operatorname{tg} D - \frac{h}{15}\sin(H+\alpha)\sec D,$$

$$k' = e' - \frac{g}{15}\,\frac{\sin(G+\alpha)}{\cos D^2}\,100' + \frac{h}{15}\sin(H+\alpha)\,\frac{\operatorname{tang} D}{\cos D}\,100',$$

$$d = -A \mp \varrho + s - g\cos(G+\alpha) - h\cos(H+\alpha)\sin D - i\cos D,$$

$$d' = \mp \varrho' + s' - [h\cos(H+\alpha)\cos D\,100' + i\sin D\,100'].$$

Der Stand der Uhr und der Aequatorpunkt des Kreises werden durch die in den Zonen vorkommenden bekannten Sterne bestimmt, oder auch durch die Hauptsterne, wenn man einige derselben vor oder nach der Zone beobachtet hat und die Fehler des Instruments sowie der Aequatorpunkt und Gang der Uhr als constant angesehen werden können. Die Werthe von k, k', d und d' werden dann für die ganze Ausdehnung der Zone für die Werthe von t von 10 zu 10 Minuten berechnet und in eine Tafel gebracht, aus der man leicht die Werthe für jedes beliebige t interpoliren kann.

III. Von der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der zur Reduction der Sternörter angewandten Constanten aus Beobachtungen.

A. Bestimmung der Constanten der Refraction.

10. In No. 6 ist gezeigt worden, wie man die scheinbaren Zenithdistanzen der Sterne durch Beobachtungen findet, die zunächst von der Refraction befreit werden müssen, um die wahren Zenithdistanzen zu erhalten. Beobachtet man nun die Zenithdistanzen eines Circumpolarsterns bei der obern und untern Culmination und verbessert dieselben für Refraction, sowie für die kleinen Aenderungen der Aberration, Nutation und Präcession während der Zwischenzeit zwischen

den Beobachtungen, so giebt das arithmetische Mittel aus diesen verbesserten Zenithdistanzen die Aequatorhöhe des Beobachtungsortes. Macht man dann eine Reihe von solchen Beobachtungen verschiedener Sterne, so sollten alle, wenn die angewandte Constante der Refraction richtig ist, innerhalb der Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler und der zufälligen Fehler in der Refraction, deren in No. 13 des dritten Abschnitts erwähnt war, denselben Werth für die Aequatorhöhe geben, und die Abweichungen zwischen den aus verschiedenen Sternen bestimmten Aequator- oder Polhöhen werden daher ein Mittel an die Hand geben, die den angewandten Refractionstafeln zum Grunde liegenden Constanten zu verbessern.

Bezeichnet man die gemessenen Zenithdistanzen bei der oberen und unteren Culmination mit z und ζ, die Refraction mit r und ϱ, so hat man für nördliche Polhöhen die Gleichungen

$$\delta - \varphi = z \pm r$$
$$180^\circ - \delta - \varphi = \zeta + \varrho,$$

wo südliche Zenithdistanzen negativ genommen werden müssen und wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Stern in der oberen Culmination nördlich oder südlich vom Zenith ist. Beide Gleichungen geben:

$$90^\circ - \varphi = \frac{\zeta + z}{2} + \frac{\varrho \pm r}{2}. \qquad (a)$$

Hätte man noch einen andern Stern in beiden Culminationen beobachtet und die Zenithdistanzen ζ' und z' gefunden, so würde man aus den Gleichungen:

$$90^\circ - \varphi = \frac{\zeta + z}{2} + \frac{\varrho \pm r}{2}$$
$$\text{und} \quad 90^\circ - \varphi = \frac{\zeta' + z'}{2} + \frac{\varrho' \pm r'}{2}$$

die Werthe von φ und von der in ϱ, ϱ', r und r' als Factor enthaltenen Constante finden können. Wegen der Beobachtungsfehler würden aber diese Werthe nur genähert sein; auch ist, wie man aus der Gleichung (l) in No. 9 des dritten Abschnitts sieht, die Refraction nicht strenge der Constante α proportional, und aufserdem die Constante α nicht die einzige in der Refractionsformel enthaltene Constante, deren Bestimmung durch die Beobachtungen wünschenswerth ist. Die Ivory'sche Re-

fractionsformel enthält aufser α noch die Constante f, die von der Abnahme der Temperatur mit der Entfernung von der Erdoberfläche abhängt, die aber nur nahe am Horizonte von einigem Einflufs ist, sodafs sie hier unberücksichtigt bleiben soll; aufserdem aber enthält sie in Gemeinschaft mit allen andern Formeln noch den Coefficienten ε für die Ausdehnung der Luft durch die Wärme, der ebenfalls am besten durch astronomische Beobachtungen bestimmt wird. Da nämlich die atmosphärische Luft immer einen gewissen Grad von Feuchtigkeit hat und die Ausdehnung der Luft sich mit der Feuchtigkeit derselben ändert, so wird man, wenn man diesen Coefficienten aus einer grofsen Anzahl von beobachteten Refractionen bestimmt, einen Werth erhalten, der dem mittleren Feuchtigkeitszustande der Atmosphäre entspricht, sodafs die damit berechneten Refractionen bei einem Mittel aus vielen Beobachtungen möglichst nahe denjenigen Werth geben, den man erhalten haben würde, wenn man auf die jedesmalige Feuchtigkeit der Luft Rücksicht genommen hätte. Es ist nun, wenn man die mittlere Refraction mit R, die wahre mit R' bezeichnet, nach No. 12 des dritten Abschnitts:

$$R' = R\,[B\,.\,T]^A\,[1+\varepsilon\,(\tau-50)]^{-\lambda},$$

wo $A = 1+q$ und $\lambda = 1+p$ gesetzt ist. Daraus erhält man:

$$d\,R' = \frac{d\,R'}{d\alpha}\,d\alpha - \frac{\lambda\,(\tau-50)}{1+\varepsilon\,(\tau-50)}\,R'\,d\,\varepsilon,$$

oder, wenn man setzt:

$$\alpha + d\alpha = \alpha\,(1+k), \quad \varepsilon + d\,\varepsilon = \varepsilon\,(1+i)$$

$$d\,R' = \alpha\,\frac{d\,R'}{d\alpha}\,k - \frac{\lambda\,\varepsilon\,(\tau-50)}{1+\varepsilon\,(\tau-50)}\,R'\,i.$$

Nun ist aber nach Formel (l) in No. 9 des dritten Abschnitts:

$$\alpha\,\frac{d\,R}{d\alpha} = R + \frac{\alpha^2\,\beta\,\sqrt{2\beta}}{(1-\alpha)\sin z^2}\,[2^{\frac{1}{2}}\,\psi(2) - \psi(1)].$$

Das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung wird erst für Zenithdistanzen von 80^0 an für diesen Zweck von Einflufs, und wenn man setzt:

$$\alpha\,\frac{d\,R}{d\alpha} = R\left(1+\frac{1}{y}\right),$$

so kann man die Werthe von y aus der folgenden Tafel nehmen:

z	y	z	y
80°	246	86°	60.5
81°	205	87°	43.2
82°	168	88°	29.5
83°	135	89°	19.0
84°	106	89° 30′	14.8
85°	82		

Es wird somit:

$$dR' = R'\left(1 + \frac{1}{y}\right)k - \frac{\lambda\varepsilon(\tau - 50)}{1 + \varepsilon(\tau - 50)} R'i.$$

Wenn man daher annimmt, daſs die zur Berechnung der Gleichung (a) angewandten Refractionen der Verbesserungen $d\varrho$ und dr bedürfen, so erhält man:

$$90^0 - \varphi = \frac{\zeta + z}{2} + \frac{\varrho \pm r}{2} + \frac{\varrho\left(1 + \frac{1}{y}\right) \pm r}{2} k - \frac{\mu\varrho \pm mr}{2} i,$$

wenn man die Werthe von $\frac{\lambda\varepsilon(\tau - 50)}{1 + \varepsilon(\tau - 50)}$ für die obere und untere Culmination mit m und μ bezeichnet. Nimmt man auch für φ einen genäherten Werth φ_0 an, sodaſs $\varphi = \varphi_0 + d\varphi$ ist und setzt:

$$\frac{\zeta + z}{2} + \frac{\varrho \pm r}{2} + \varphi_0 - 90^0 = n,$$

so giebt jede Verbindung der oberen und unteren Culmination eines Sterns eine Bedingungsgleichung von der Form:

$$0 = n + d\varphi + \frac{\varrho\left(1 + \frac{1}{y}\right) \pm r}{2} k - \frac{\mu\varrho \pm mr}{2} i. \qquad (b)$$

Die Beobachtungen der verschiedenen Sterne werden aber nicht dasselbe Gewicht haben, indem die zufälligen Beobachtungsfehler desto gröſser werden, je näher am Horizonte der Stern culminirt. Der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung wird daher im Allgemeinen mit der Zenithdistanz des Sterns bei der Culmination wachsen. Wären die Werthe von $d\varphi$, k und i schon bekannt und in die Gleichungen eingesetzt, so wären die n die reinen Beobachtungsfehler, und man könnte dann den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung für einen jeden Stern bestimmen. Da diese Werthe aber erst zu finden sind, so kann man nur aus den Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom Mittel aus denselben den wahrscheinlichen Fehler für einen Stern annähernd bestimmen. Sind dann w und w' die wahrscheinlichen Fehler

einer Beobachtung bei der oberen und unteren Culmination, so mufs man alle Gleichungen desselben Sterns mit $\sqrt{w^2+w'^2}$ dividiren, um den Gleichungen der verschiedenen Sterne das richtige Gewicht zu geben. Sollte man dann später nach Auflösung der Gleichungen die wahrscheinlichen Fehler beträchtlich verschieden finden, so kann man die ganze Rechnung wiederholen.

Man kann aber auch die Sterne, welche auf der Südseite des Zeniths culminiren, zur Bestimmung der Verbesserung i des Ausdehnungscoefficienten der Luft benutzen. Für einen solchen Stern ist nämlich nach der früheren Bezeichnung, wenn man die Zenithdistanzen positiv nimmt:

$$\varphi_0 - \delta_0 + d(\varphi - \delta) = z + r + r\left(1 + \frac{1}{y}\right)k - mri,$$

oder wenn man setzt:

$$n = z + r + \delta_0 - \varphi_0,$$

$$0 = n + d(\delta - \varphi) + r\left(1 + \frac{1}{y}\right)k - mri. \qquad (c)$$

Multiplicirt man auch in diesem Falle die Gleichungen für jeden Stern mit dem entsprechenden Gewicht, so kann man, wenn man aus allen Gleichungen eines und desselben Sterns die Gleichungen des Minimums ableitet, die Unbekannten $d(\delta - \varphi)$ und k eliminiren, sodafs jeder Stern zuletzt eine Gleichung von der Form giebt:

$$0 = N - Mi. \qquad (d)$$

Eine ähnliche Gleichung giebt aber auch jeder in beiden Culminationen beobachtete Circumpolarstern, wenn man die demselben Sterne zugehörigen Gleichungen (a) auf ähnliche Weise behandelt. Man erhält somit soviele Gleichungen von der Form (d) als Sterne beobachtet sind, und aus allen kann man den wahrscheinlichsten Werth von i bestimmen *). Auf diese Weise hat Bessel die Gröfse i und somit den Ausdehnungscoefficienten der Luft für den mittleren Feuchtigkeitszustand der Atmosphäre in Königsberg aus den dortigen Beobachtungen bestimmt (vergl. Bessel, astronomische Beobach-

*) Da die Aenderung der Temperatur auf tiefe Sterne den gröfsten Einflufs hat, so wird es nicht nöthig sein, hierbei Sterne mitzunehmen, deren Meridianhöhe gröfser als 60° ist.

tungen, siebente Abtheilung, pag. X u. f.), und der von ihm gefundene Werth ist der früher angeführte, nämlich 0.0020243 für einen Grad des Fahrenheitschen Thermometers.

Substituirt man den wahrscheinlichsten Werth von i in die Gleichungen (b), oder vielmehr in die für einen jeden Stern gefundenen Gleichungen des Minimums, so erhält man aus der Verbindung dieser Gleichungen für die verschiedenen Sterne die wahrscheinlichsten Werthe von $d\varphi$ und k *).

Hätte man auch noch auf die Verbesserung der Constante f Rücksicht nehmen wollen, so wäre zu dR' noch das Glied $\frac{dR'}{df}\,df$ hinzuzufügen gewesen, oder wenn man $f+df=f(1+h)$ setzt, das Glied $f\frac{dR'}{df}\,h=\frac{R'}{x}\,h$, wo die Werthe von x der folgenden Tafel entnommen werden können:

z	x	z	x
85°	338	88°	59.3
86°	196	89°	29.8
87°	111	89° 30′	20.6.

B. Bestimmung der Constanten der Aberration und Nutation, sowie der jährlichen Parallaxen der Sterne.

11. Die Aberration, Nutation und Parallaxe sind die in den scheinbaren Oertern der Sterne enthaltenen periodischen Glieder, deren Constanten daher durch die Beobachtung der scheinbaren Oerter der Sterne zu verschiedenen Zeiten bestimmt werden müssen. Die Aberration und Parallaxe haben die Periode eines Jahres und können daher aus der Vergleichung der im Laufe eines Jahres beobachteten scheinbaren Oerter bestimmt werden. Das Hauptglied der Nutation hat aber eine Periode von 18 Jahren und 219 Tagen,

---

*) In dem Beispiele in No. 25 der Einleitung sind die Bedingungsgleichungen diejenigen, die man erhalten hätte, wenn man allen Beobachtungen dasselbe Gewicht gegeben und das Mittel aus allen Gleichungen für einen und denselben Stern genommen hätte. Dann wird die Form der Gleichungen, wenn die Correction von i schon angebracht ist, $0=n+d\varphi+ak$. Bessel hat aber alle Beobachtungen auf den Polpunkt, nicht wie hier vorausgesetzt ist, auf den Zenithpunkt des Kreises bezogen, weshalb der Coefficient a von dem oben vorkommenden verschieden ist.

in welcher Zeit die Mondsknoten einen vollen Umlauf in der Ecliptic machen. Die Constante der Nutation kann daher nur aus der Vergleichung einer Anzahl von scheinbaren Oertern, die über eine lange Reihe von Jahren vertheilt sind, bestimmt werden.

Für die Bestimmung der Aberrations- und Nutations-Constante sind die Beobachtungen der Rectascensionen des Polarsterns am geeignetsten, weil die scheinbaren Oerter wegen der Factoren sec δ und tang δ bedeutend geändert werden; aus demselben Grunde läſst sich auch die Parallaxe des Polarsterns auf dieselbe Weise mit Vortheil bestimmen. Setzt man:

$$-\cos\varepsilon\cos\alpha = a\sin A$$
$$-\sin\alpha = a\cos A,$$

so geben die Formeln für die Aberration und Parallaxe in Rectascension in No. 16 und 18 des dritten Abschnitts, wenn k die Constante der Aberration, π die Parallaxe bezeichnet:

$$\alpha' - \alpha = + k a \sin(\odot + A) \sec\delta + \pi a \cos(\odot + A) \sec\delta + \varphi(k^2),$$

wo $\varphi(k^2)$ für die Glieder der zweiten Ordnung gesetzt ist. Macht man daher mehrere Beobachtungen zu den Zeiten, wo $\sin(\odot + A) = \pm 1$ ist, also das Maximum der Aberration stattfindet, so erhält man einen genäherten Werth von k aus der Vergleichung der zu beiden Zeiten beobachteten Rectascensionen, nachdem dieselben auf ein mittleres Aequinoctium reducirt sind. Um aber wieder einen genaueren Werth zu erhalten, bestimmt man wieder den wahrscheinlichsten Werth, der aus einer sehr groſsen Anzahl von Beobachtungen folgt. Es sei die mittlere Rectascension α um $\Delta\alpha$ fehlerhaft, der angenommene Werth der Constante k um Δk, sodaſs $\alpha + \Delta\alpha$ und $k + \Delta k$ die wahren Werthe dieser Gröſsen sind. Bezeichnet man dann mit α_0 die scheinbare Rectascension, die aus α mittelst der Aberrationsconstante k und der als richtig angenommenen Präcession und Nutation berechnet ist und an die auch die von dem Quadrate von k, sowie die vom Producte der Aberration und Nutation abhängigen Glieder angebracht sind, da diese an sich klein sind und sich für den verbesserten Werth von k sehr wenig ändern; bezeichnet ferner α' die aus der Beobachtung gefundene scheinbare Rectascension, so ist:

$$\alpha' = \alpha_0 + \Delta\alpha + \Delta k\, a \sin(\odot + A) \sec\delta + \pi a \cos(\odot + A) \sec\delta,$$

und wenn man also setzt

$$\alpha_0 - \alpha' = n,$$

so giebt jede beobachtete Rectascension des Polarsterns eine Gleichung von der Form:

$$0 = n + \Delta\alpha + \Delta k \,.\, a \sin(\odot + A) \sec\delta + \pi\, a \cos(\odot + A) \sec\delta,$$

und aus der Verbindung aller vorhandenen Gleichungen bestimmt man dann die wahrscheinlichsten Werthe von $\Delta\alpha$, Δk und π nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Umfassen nun die Beobachtungen einen langen Zeitraum von Jahren, so kann man auch die Constante der Nutation bestimmen, d. h. den Coefficienten von $\cos\Omega$ in dem Ausdrucke für die Nutation der Schiefe. Bezeichnet man die Verbesserung dieses Coefficienten mit $\Delta\nu$, so mufs man der obigen Bedingungsgleichung noch das Glied $+\frac{d\alpha_0}{d\nu}\Delta\nu$ hinzufügen, wo der Werth von $\frac{d\alpha_0}{d\nu}$ in No. 6 des zweiten Abschnitts gegeben ist. Die vollständige Bedingungsgleichung für die Bestimmung der Aberration, Parallaxe und Nutation aus den beobachteten scheinbaren Rectascensionen wird daher:

$$0 = n + \Delta\alpha + \Delta k\, a \sin(\odot + A) \sec\delta + \pi\, a \cos(\odot + A) \sec\delta + \frac{d\alpha_0}{d\nu}\Delta\nu.$$

Wendet man zu dieser Bestimmung die Beobachtungen verschiedener Sternwarten an, so mufs man den verschiedenen Gleichungen das richtige Gewicht geben, indem man die wahrscheinlichen Fehler der auf den verschiedenen Sternwarten gemachten Beobachtungen bestimmt. Auch kann man dann den Fehler $\Delta\alpha$ bei den Beobachtungen der verschiedenen Sternwarten nicht gleich nehmen, da die beobachteten Rectascensionen einen constanten Unterschied haben können. Man mufs dann erst diesen Unterschied bestimmen und an die Beobachtungen anbringen oder die aus den Beobachtungen der einzelnen Sternwarten abgeleiteten Gleichungen für die Elimination von $\Delta\alpha$, $\Delta\alpha'$, etc. besonders behandeln.

Auf diese Weise bestimmte von Lindenau aus den von Bradley, Maskelyne, Pond, Bessel und ihm selbst in einem Zeitraume von 60 Jahren beobachteten Rectascensionen des Polarsterns die folgenden Werthe der Constanten:

$$k = 20''.4486 \qquad \nu = 8''.97707 \qquad \pi = 0''.1444,$$

Peters dagegen aus den von Struve und Preufs in den Jahren 1822 bis 1838 in Dorpat beobachteten Rectascensionen:

$$k = 20''.4255 \qquad \nu = 9''.2361 \qquad \pi = 0''.1724.$$

Will man die Declinationen zur Bestimmung dieser Constanten anwenden, so sind wieder Beobachtungen des Polarsterns hierzu sehr geeignet, weil man denselben bei jeder Culmination mehrmals einstellen, also die Sicherheit der Beobachtungen beliebig vergröfsern kann. Führt man für diesen Fall die folgenden Hülfsgröfsen ein:

$$\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon = b \sin B$$
$$-\cos\alpha \sin\delta = b \cos B,$$

so wird die Aberration in Declination gleich $k b \sin(\odot + B)$, die Parallaxe gleich $\pi b \cos(\odot + B)$. Bezeichnet man dann wieder mit δ_0 die scheinbare Declination, die aus der mittleren Declination mit der Aberrationsconstante k, der Nutationsconstante ν und der als richtig angenommenen Präcession berechnet ist, wieder mit Rücksicht auf die von den Quadraten und dem Producte der Aberration und Nutation abhängigen kleinen Glieder; bezeichnet ferner δ' die beobachtete scheinbare Declination und setzt man $\delta_0 - \delta' = n$, so giebt wieder eine jede Beobachtung der Declination eine Gleichung von der Form:

$$0 = n + \Delta\delta + \Delta k\, b \sin(\odot + B) + \pi b \cos(\odot + B) + \frac{d\delta_0}{d\nu}\Delta\nu,$$

und wenn die Beobachtungen einen hinlänglichen Zeitraum umfassen, so kann man wieder aus diesen die wahrscheinlichsten Werthe von $\Delta\delta$, Δk, π und $\Delta\nu$ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen *). Durch solche Beobachtungen, nämlich die von Meridianzenithdistanzen der Sterne wurde die Aberration von Bradley entdeckt, indem er vom Jahre 1725 ab zu Kew aufser 22 anderen Sternen vorzüglich den Stern γ Draconis, der nahe durch das Zenith des Ortes ging, verfolgte und eine periodische Aenderung seiner Zenithdistanz bemerkte, die von der Parallaxe, deren Auffindung der eigent-

---

*) Da, wie man später sehen wird, der Stern noch eine eigene Bewegung haben kann, so sollten den Gleichungen für die Rectascension und Declination eigentlich noch Glieder von der Form $p(t - t_0)$ und $q(t - t_0)$ hinzugefügt sein, wo p und q die eigenen Bewegungen in Rectascension und Declination sind, α und δ aber dann die mittleren Oerter zur Zeit t_0 bedeuten.

liche Zweck dieser Beobachtungen war, nicht herrühren konnte. Die Erklärung dieser Erscheinung durch die Zusammensetzung der Bewegung des Lichts mit der Bewegung der Erde wurde indessen erst später von Bradley richtig gegeben. Das Instrument, dessen er sich zu diesen Beobachtungen bediente, war ein Zenithsector, d. h. ein Kreissector von sehr großsem Radius, womit er die Zenithdistanzen der Sterne bis etwas über 12° zu jeder Seite des Zeniths messen konnte. Da der Stern γ Draconis in der Nähe des Pols der Ecliptic steht, so war derselbe für die Bestimmung der Parallaxe, mithin auch der Aberration, besonders geeignet. Für den Pol der Ecliptic ist nämlich $\alpha = 270^0$ und $\delta = 90^0 - \varepsilon$, es wird also $b = 1$ und $B = -90^0$, das Maximum und Minimum der Aberration und Parallaxe in Declination ist daher gleich k und π selbst.

Durch ähnliche Beobachtungen entdeckte Bradley auch die Nutation. Die Beobachtungen reichen vom 19. August 1727 bis zum 3. September 1747 und umfassen daher eine vollständige Periode der Nutation. Busch bestimmte aus diesen Beobachtungen den Werth der Aberrationsconstante gleich 20″.2116 und den der Nutationsconstante gleich 9″.23. Lundahl fand aus den von Struve und Preuſs in Dorpat beobachteten Declinationen des Polarsterns:

$$k = 20''.5508 \qquad \nu = 9''.2164 \qquad \pi = 0''.1473.$$

Der in No. 5 des zweiten Abschnitts aufgeführte Werth der Nutationsconstante ist der von Peters in seiner Abhandlung „Numerus constans nutationis" gegebene, der aus den obigen drei Bestimmungen von Peters, Busch und Lundahl mit Rücksicht auf die Sicherheit der einzelnen Resultate abgeleitet ist.

Der in No. 16 des dritten Abschnitts gegebene Werth der Aberrationsconstante ist aber nicht aus den oben gegebenen Werthen abgeleitet, sondern ist von Struve aus den Durchgängen gewisser Sterne durch den ersten Vertical hergeleitet.

Stellt man nämlich ein Instrument genau im ersten Verticale auf und beobachtet die Zeit, wann ein Stern im Osten und Westen am Faden des Instruments erscheint *), so ist

---

*) Das Nähere hierüber ist in No. 26 des siebenten Abschnitts zu finden.

die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen gleich dem Stundenwinkel des Sterns bei seinem Durchgange durch den ersten Vertical. Nennt man diesen t, so giebt das rechtwinklige Dreieck zwischen dem Zenith, dem Pole und dem Sterne die Gleichung:

$$\tang \delta = \tang \varphi \cos t,$$

woraus man sieht, daſs man durch solche Beobachtungen die Declinationen der Sterne bestimmen kann. Differenzirt man die Gleichung logarithmisch, so findet man:

$$d\delta = \frac{\sin 2\delta}{\sin 2\varphi} d\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\delta \tang t \, dt,$$

woraus man also sieht, daſs ein Fehler, den man in der Beobachtung von t gemacht hat, desto weniger Einfluſs hat, je kleiner t ist, je näher also am Zenith der Stern durch den ersten Vertical geht. Ist die Zenithdistanz sehr klein, so läſst sich also die Declination solcher Sterne mit groſsem Vortheil auf diesem Wege bestimmen. Die Bedingungsgleichungen für jeden einzelnen Stern werden dann dieselben wie früher und es ist wieder besonders vortheilhaft für die Bestimmung der Constanten Sterne auszuwählen, welche dem Pole der Ecliptic nahe liegen. Auf diese Weise fand Struve aus vielen Sternen mit sehr groſser Uebereinstimmung den Werth der Aberrationsconstante 20″.4451, eine Zahl, die wohl nur wenig von der Wahrheit abweichen wird. Die Beobachtungen umfassen aber einen zu kurzen Zeitraum für die Bestimmung der Nutationsconstante, die ebenfalls, wie auch die Parallaxe solcher Sterne, auf diesem Wege mit Vortheil bestimmt werden kann.

Die Constante der Aberration kann noch auf einem anderen Wege gefunden werden, da dieselbe nach No. 16 des dritten Abschnitts aus der Geschwindigkeit der Bewegung der Erde und der des Lichts berechnet werden kann. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist sehr genau bestimmt, nämlich 59′ 8″.193 in einem Tage. Die Zeit, welche das Licht braucht, um den Halbmesser der Erdbahn zu durchlaufen, wurde zuerst von dem Dänischen Astronomen Olav Römer aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten hergeleitet, indem derselbe im Jahre 1675 die Bemerkung machte, daſs diese Verfinsterungen zu der Zeit, wenn die Erde zwischen

der Sonne und Jupiter steht, um $8^m 13^s$ früher, dagegen zu der Zeit, wo die Sonne zwischen Jupiter und der Erde steht, um ebenso viel später eintrafen, als die Vorausberechnung derselben ergab. Da nun im ersteren Falle die Erde dem Jupiter um den ganzen Durchmesser der Erdbahn näher steht als im zweiten Falle, so kam Römer bald auf die richtige Erklärung dieser Erscheinung, daſs nämlich das Licht eine Zeit von $16^m 26^s$ brauche, um den Halbmesser der Erdbahn zu durchlaufen. Ist daher T die nach den Tafeln berechnete Zeit des Anfangs oder des Endes einer Verfinsterung, so muſs man zu dieser Zeit, um dieselbe mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung zu bringen, das Glied

$$+K\Delta$$

die sogenannte Lichtgleichung, hinzufügen, wo K die Anzahl von Secunden bezeichnet, in welcher das Licht den Halbmesser der Erdbahn durchläuft, Δ aber die Entfernung des Jupitermondes von der Erde ist, in Einheiten der halben groſsen Axe der Erdbahn ausgedrückt. Ist dann T_0 die so verbesserte Zeit der Verfinsterung, T' die beobachtete Zeit, so giebt jede beobachtete Finsterniſs eine Gleichung:

$$0 = T_0 - T' + \Delta\, dK$$

und aus einer groſsen Anzahl solcher Gleichungen läſst sich der wahrscheinlichste Werth von dK bestimmen. Die beobachtete Zeit des Anfangs und des Endes einer Verfinsterung ist aber immer unsicher, indem die Monde ihr Licht nur allmählig verlieren und da der Fehler der Beobachtung von der Güte des Fernrohrs abhängt, so wird es gut sein, nur solche Beobachtungen zusammen zu nehmen, die mit demselben Instrumente gemacht sind, auch die beobachteten Zeiten der Eintritte von denen der Austritte besonders zu behandeln. Delambre fand aus einer sorgfältigen Discussion der vorhandenen Beobachtungen von Verfinsterungen, die Aberrationsconstante 20″.255, welcher Werth nach dem Vorigen etwas zu klein ist.

12. Die jährliche Parallaxe eines Sterns kann noch auf einem anderen Wege bestimmt werden, nämlich durch die Messung der Aenderungen seines Orts gegen die eines benachbarten Sterns, dessen Parallaxe Null ist und diese Methode ist vorzüglicher als die vorige, weil sich die relativen

Oerter zweier benachbarten Sterne durch micrometrische Messung (wie im siebenten Abschnitte gezeigt wird) mit grofser Genauigkeit bestimmen lassen, und weil der Einfluſs der kleinen Correctionen auf die Oerter der beiden Sterne so nahe gleich ist, daſs ein etwaiger Fehler in den angewandten Constanten keinen merklichen Fehler in dem Unterschiede der abgeleiteten mittleren Oerter hervorbringen kann*). Eigentlich giebt diese Methode nur den Unterschied der Parallaxen der beiden angewandten Sterne. Da man aber im Allgemeinen annehmen kann, daſs sehr kleine Sterne auch sehr weit entfernt sind, also eine unmerkliche Parallaxe haben, so kann man immer hoffen, wenn man einen oder mehrere solcher schwachen Sterne als Vergleichssterne wählt, daſs die gefundene Parallaxe der Wahrheit sehr nahe kommt.

Hat man die Unterschiede beider Sterne in Rectascension und Declination beobachtet, so giebt eine jede Beobachtung, wegen der kleinen Correctionen verbessert, zwei Gleichungen, wenn man für die Zeiten t_0 die Unterschiede $\alpha'_0 - \alpha_0$ und $\delta'_0 - \delta_0$ annimmt und $\alpha'_0 - \alpha_0 - (\alpha' - \alpha)$ mit n und $\delta'_0 - \delta_0 - (\delta' - \delta)$ mit n' bezeichnet und die Fehler der angenommenen Werthe mit $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$:

$$0 = n + \Delta\alpha + \pi\, a \cos(\odot + A) \sec\delta + p\,(t - t_0)$$
$$0 = n' + \Delta\delta + \pi\, b \cos(\odot + B) \qquad + q\,(t - t_0).$$

Gewöhnlich beobachtet man aber statt des Rectascensions- und Declinationsunterschiedes der beiden Sterne die Distanz und den Positionswinkel, d. h. den Winkel, welchen der Declinationskreis des einen Sterns mit dem durch beide Sterne gehenden gröſsten Kreise macht. Ist α und δ die wahre, α' und δ' die mit Parallaxe behaftete Rectascension und Declination des einen Sterns, α'' und δ'' die Rectascension und Declination des anderen Sterns, so ist die Aenderung der Rectascensions- und Declinationsunterschiede durch Parallaxe:

$$d(\alpha'' - \alpha) = \alpha - \alpha' = \pi R [\cos\odot \sin\alpha - \sin\odot \cos\varepsilon \cos\alpha] \sec\delta$$
$$d(\delta'' - \delta) = \delta - \delta' = \pi R [\cos\varepsilon \sin\alpha \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta] \sin\odot$$
$$+ \pi R \sin\delta \cos\alpha \cos\odot.$$

---

*) Wenn die Sterne so nahe stehen, so ist es vortheilhafter, nicht die mittleren Oerter jedes einzelnen Sterns herzuleiten, sondern nur den Unterschied der scheinbaren Oerter von Refraction, Aberration, Präcession und Nutation zu befreien. Die dazu dienenden Formeln werden in VIII und IX des siebenten Abschnitts gegeben.

Bezeichnet man die wahre Distanz und den wahren Positionswinkel mit Δ und P, so ist:

$$\Delta \sin P = \cos \delta (\alpha'' - \alpha)$$
$$\Delta \cos P = \delta'' - \delta$$

also

$$d\Delta = \sin P \cos \delta \, d(\alpha'' - \alpha) + \cos P \, d(\delta'' - \delta)$$
$$\Delta \, dP = \cos P \cos \delta \, d(\alpha'' - \alpha) - \sin P \, d(\delta'' - \delta).$$

Substituirt man hierin die obigen Werthe, so findet man leicht, dafs wenn man setzt:

$$m \cos M = \sin \alpha \sin P + \sin \delta \cos \alpha \cos P,$$
$$m \sin M = [-\cos \alpha \sin P + \sin \delta \sin \alpha \cos P] \cos \varepsilon - \cos \delta \cos P \sin \varepsilon,$$
$$m' \cos M' = \frac{1}{\Delta} [\sin \alpha \cos P - \sin \delta \cos \alpha \sin P],$$
$$m' \sin M' = \frac{1}{\Delta} [-(\cos \alpha \cos P + \sin \delta \sin \alpha \sin P) \cos \varepsilon + \cos \delta \sin P \sin \varepsilon],$$

man erhält:

$$d\Delta = \pi R m \cos (\odot - M)$$
$$dP = \pi R m' \cos (\odot - M').$$

Bezeichnet man also wieder mit $d\Delta_0$ die Verbesserung der angenommenen Entfernung zu der Epoche t_0, mit dq die Verbesserung der angenommenen eigenen Bewegung in der Richtung von Δ, so erhält man aus den gemessenen Entfernungen eine Gleichung:

$$0 = \nu + d\Delta_0 + (t - t_0) \, dq + \pi R m \cos (\odot - M)$$

und ebenso aus den Positionswinkeln:

$$0 = \nu' + dP_0 + (t - t_0) \, dq' + \pi R m' \cos (\odot - M'),$$

die man nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt. Auf diese Weise bestimmte Bessel zuerst die Parallaxe des Sterns 61 Cygni.

C. Bestimmung der Constante der Präcession und der eigenen Bewegungen der Sterne.

13. Man erhält die Aenderung der Rectascension und Declination eines Sterns durch die Präcession während des Intervals $t' - t$, wenn man die jährlichen Aenderungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha = \cos \varepsilon_0 \frac{dl_{,}}{dt} - \frac{da}{dt} + \sin \varepsilon_0 \frac{dl_{,}}{dt} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha$$
$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha = \sin \varepsilon_0 \frac{dl_{,}}{dt} \cos \alpha$$

für die Mitte des Intervals berechnet und mit der Zwischenzeit $t' - t$ multiplicirt. Da nun der numerische Werth von

$\frac{da}{dt}$ durch die Theorie der säcularen Störungen der Planeten gegeben ist, so läſst die Vergleichung der Unterschiede der zu zwei Epochen beobachteten Positionen eines Sterns mit den obigen Formeln eine Bestimmung des Werthes der Lunisolarpräcession $\frac{dl_{\prime}}{dt}$, sowohl aus den Rectascensionen als aus den Declinationen zu. Wären die Sterne im Raume unbeweglich, so würde man aus verschiedenen Sternen nahe dieselbe Präcessionsconstante finden, und zwar desto genauer, je entfernter die Beobachtungen von einander wären, da etwaige Fehler der Beobachtungen desto geringeren Einfluſs haben würden. Da nun aber nicht nur verschiedene Sterne verschiedene Werthe für die Präcession geben, sondern auch die einzelnen Sterne verschiedene Werthe aus den Rectascensionen und Declinationen, so muſs man denselben eigene Bewegungen zuschreiben, und da diese wie die Präcession der Zeit proportional sind, so läſst letztere sich nicht davon trennen. Die Schwierigkeit wird noch dadurch vermehrt, daſs diese eigenen Bewegungen zum Theil wenigstens ein bestimmtes, vom Orte des Sterns abhängiges Gesetz befolgen, und man kann daher die eigenen Bewegungen nur durch die Vergleichung sehr vieler, über alle Punkte des Himmels vertheilten Sterne eliminiren, indem man alle diejenigen ausschlieſst, die eine von den übrigen sehr verschiedene Präcession geben würden, also eine bedeutende eigene Bewegung haben müssen. Die groſse Menge der Beobachtungen wird dann den Einfluſs der eigenen Bewegungen so viel wie möglich und die etwaigen Beobachtungsfehler vollständig eliminiren. Da die eigenen Bewegungen der Zeit proportional sind, so bleibt die dadurch entstehende Unsicherheit in der Bestimmung der Präcession dieselbe, so groſs man auch die Zwischenzeit zwischen den mit einander verglichenen Sternverzeichnissen nimmt und man wird daher zwei solche Verzeichnisse auswählen, die eine möglichst groſse Anzahl von Sternen gemeinschaftlich enthalten und deren Zwischenzeit groſs genug ist, um die Unsicherheit, die von den Beobachtungsfehlern herrührt, hinreichend klein zu machen. Sind dann m_0 und n_0 die bei der Vergleichung der beiden Verzeichnisse angewandten Werthe

von m und n, ferner α, δ und α', δ' die in beiden Verzeichnissen aufgeführten mittleren Oerter eines Sterns für die Zeiten t und t', $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die constanten Unterschiede der Verzeichnisse in Rectascension und Declination, so giebt, wenn man:

$$\alpha + (m_0 + n_0 \operatorname{tg} \delta_0 \sin \alpha_0)(t' - t) - \alpha' = \nu (t' - t)$$

und

$$\delta + n_0 \cos \alpha_0 (t' - t) \qquad - \delta' = \nu' (t' - t)$$

setzt, jeder Stern zwei Gleichungen von der Form:

$$0 = \nu + \frac{\Delta\alpha}{t' - t} + dm_0 + dn_0 \operatorname{tg} \delta_0 \sin \alpha_0$$

und

$$0 = \nu' + \frac{\Delta\delta}{t' - t} + dn_0 \cos \alpha_0 .$$

Betrachtet man daher die eigenen Bewegungen, welche in ν und ν' enthalten sind, als von der Natur zufälliger Beobachtungsfehler, so kann man aus einer grofsen Anzahl von solchen Gleichungen die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate finden. Diese Annahme würde gerechtfertigt sein, wenn nicht, wie oben bemerkt, ein Theil der eigenen Bewegungen der Sterne ein Gesetz befolgte, das von dem Orte der Sterne abhängt. Da es aber grofse, wenn nicht unüberwindliche Schwierigkeiten hat, ein diese gesetzmäfsige Bewegung ausdrückendes Glied in die obigen Gleichungen einzuführen, worauf später zurückgekommen wird, so kann man kaum etwas Besseres thun, als die obige Annahme zu machen und darauf zu sehen, dafs die Anzahl der Sterne sehr grofs und möglichst gleich über den Himmel vertheilt ist. Dann ergiebt sich aus den Rectascensionen eine Bestimmung von m und n, aus den Declinationen eine Bestimmung von n; man sieht aber, dafs ein Fehler in der Bestimmung der absoluten Retascension, der bei jedem Verzeichnifs constant ist, sich mit dm verbindet, auch bleibt darin, weil $\frac{dm}{dt} = \cos \varepsilon_0 \frac{dl_i}{dt} - \frac{da}{dt}$, ein Fehler in der Präcession durch die Planeten, der von den unrichtig angenommenen Massen der Planeten herrühren kann. Die Bestimmung von $dn = dl_i \sin \varepsilon_0$ aus den Rectascensionen ist aber von einem solchen beständigen Fehler unabhängig und die Declinationen geben sowohl dn als auch den beständigen Fehler der Declination. Da man aber nicht annehmen kann,

dafs dieser für die beiden Verzeichnisse für alle Declinationen derselbe bleibt, so ist es besser, die Sterne in Zonen von einigen Graden Breite z. B. von 10^0 in Declination zu theilen und die Gleichungen für jede Zone besonders zu behandeln, also den mittleren Unterschied $\Delta\delta$ für eine jede solche Zone zu bestimmen. Auf diese Weise berechnete Bessel in seinem Werke Fundamenta astronomiae den Werth dieser Constante aus einer Anzahl von mehr als 2000 Sternen, deren Oerter aus den Bradleyschen Beobachtungen für das Jahr 1755 hergeleitet und von Piazzi für das Jahr 1800 bestimmt waren. Er fand dafür für das Jahr 1750 den Werth 50″. 340499, den er später nach den Königsberger Beobachtungen in 50″. 37572 umänderte. (Vergl. Astron. Nachrichten No. 92).

14. Die Unterschiede der beobachteten Oerter der Sterne zu den verschiedenen Epochen mit dem Betrage der Präcession in der Zwischenzeit, welche mit der so bestimmten Constante berechnet ist, sieht man dann als die eignen Bewegungen der Sterne an, und im Allgemeinen kann man dieselben durch die Annahme einer der Zeit proportionalen und in einem gröfsten Kreise vor sich gehenden Bewegung innerhalb der Grenzen der möglichen Beobachtungsfehler darstellen. Halley war der erste, welcher im Jahre 1713 eine solche eigne Bewegung bei den Sternen, Sirius, Aldebaran und Arcturus *) entdeckte. Seitdem hat man aber bei sehr vielen Sternen mit Sicherheit eigne Bewegungen erkannt und man mufs annehmen, dafs solche allen Sternen zukommen, wenn dieselben auch bei den meisten noch nicht nachgewiesen werden können, da sie sehr klein sind und noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen. Die gröfsten eignen Bewegungen kommen vor bei dem Stern 61 Cygni, dessen jährliche Aenderung in Rectascension und Declination 5″.1 und 3″.2 beträgt, dann bei α Centauri, dessen jährliche Bewegungen nach der Richtung der beiden Coordinaten 7″.0 und 0″.8 sind, endlich bei 1830 Groombridge, der sich 5″.2 in Rectascension und 5″.7 in Declination bewegt.

---

*) Der letztere Stern hat eine eigene Bewegung von 2″ in Declination und ist daher seit den Zeiten des Hipparch schon über einen Grad am Himmel fortgerückt.

Der ältere Herschel fand zuerst in diesen Bewegungen der Sterne ein Gesetz auf, indem er durch die Vergleichung von vielen derselben die Bemerkung machte, daſs die Sterne im Allgemeinen sich von einem Punkte des Himmels in der Gegend von λ Herculis entfernen. Er gründete darauf die Vermuthung, daſs die eigne Bewegung der Sterne zum Theil nur scheinbar sei und durch die Bewegung unseres Sonnensystems nach diesem Punkte des Himmels zu hervorgebracht würde, eine Ansicht, welche die späteren Untersuchungen über diesen Gegenstand vollkommen bestätigt haben. Die jährliche eigne Bewegung der Fixsterne wird daher zusammengesetzt sein, erstens aus der jährlichen eigenthümlichen Bewegung der einzelnen, vermöge welcher sich dieselben nach einem uns unbekannten Gesetze wirklich im Raume fortbewegen und zweitens aus der scheinbaren Bewegung, welche von der Bewegung unserer Sonne herrührt. Da der erstere Theil dieser Bewegung kein bestimmtes Gesetz befolgt, so werden vermöge derselben Sterne, welche in derselben Gegend des Himmels stehen, ihren Ort nach den verschiedensten Richtungen verändern. Die Richtung des andern Theils der scheinbaren Bewegungen der Sterne wird dagegen durch die Lage jedes Sterns gegen den Punkt des Himmels, nach welchem hin sich die Sonne bewegt, vollständig bedingt. Nimmt man nun für diesen Punkt einen bestimmten Punkt an, dessen Rectascension und Declination A und D ist, so kann man für jeden einzelnen Stern diejenige Richtung berechnen, nach welcher sich derselbe scheinbar vermöge der Fortrückung der Sonne bewegen muſs. Vergleicht man dann diese Richtung mit der wirklich beobachteten Richtung, so kann man für einen jeden Stern die Bedingungsgleichung zwischen den Unterschieden der berechneten und der beobachteten Richtung und den Aenderungen der Rectascension und Declination A und D aufstellen, und da derjenige Theil dieser Unterschiede, welcher von den eigenthümlichen Bewegungen der Sterne herrührt, kein bestimmtes Gesetz befolgt, also von der Natur zufälliger Beobachtungsfehler ist, so wird man aus einer sehr groſsen Anzahl solcher Bedingungsgleichungen durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen dA und dD bestimmen können.

Es ist klar, dafs die Richtung der scheinbaren Bewegung eines Sterns mit dem gröfsten Kreise zusammenfällt, welcher den Ort des Sterns mit dem Punkte des Himmels verbindet, auf welchen zu sich die Sonne bewegt, weil dieser Punkt, wenn man die Bewegung der Sonne als geradlinig voraussetzt, in der durch den Ort des Sterns und durch zwei Oerter der Sonne im Raume gelegten Ebene liegt. Ist a die als geradlinig betrachtete Veränderung des Orts der Sonne während der Zeit t, dividirt durch die Entfernung des Sterns von der Sonne, so hat man, wenn α und δ die Rectascension und Declination des Sterns zu Anfang der Zeit t, α' und δ' dieselben Gröfsen zu Ende der Zeit t bezeichnen und ϱ das Verhältnifs der Entfernungen des Sterns von der Sonne zu beiden Zeiten ist, die folgenden Gleichungen:

$$\varrho \cos \delta' \cos \alpha' = \cos \delta \cos \alpha - a \cos A \cos D$$
$$\varrho \cos \delta' \sin \alpha' = \cos \delta \sin \alpha - a \sin A \cos D$$
$$\varrho \sin \delta' = \sin \delta - a \sin D,$$

aus denen man leicht erhält:

$$\cos \delta' = \cos \delta - a \cos D \cos (\alpha - A),$$

also:

$$\begin{aligned} \cos \delta' (\alpha' - \alpha) &= a \cos D \sin (\alpha - A) \\ \delta' - \delta &= -a [\cos \delta \sin D - \sin \delta \cos D \cos (\alpha - A)]. \end{aligned} \qquad (A)$$

Man hat aber auch in dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Pole des Aequators, dem Sterne und dem Punkte, dessen Rectascension und Declination A und D ist, wenn man die Entfernung des Sterns von diesem Punkte mit Δ und den Winkel am Sterne mit P bezeichnet:

$$\begin{aligned} \sin \Delta \sin P &= \cos D \sin (\alpha - A) \\ \sin \Delta \cos P &= \sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos (\alpha - A), \end{aligned} \qquad (B)$$

und da nun auch, wenn p den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung der Bewegung des Sterns mit seinem Declinationskreise macht:

$$\operatorname{tang} p = \frac{\cos \delta' (\alpha' - \alpha)}{\delta' - \delta}$$

ist, so sieht man, dafs $p = 180^0 - P$ ist, oder dafs sich der Stern in der Richtung des gröfsten Kreises, welcher den Ort desselben mit dem Punkte, dessen Rectascension und Declination A und D verbindet, von dem letzteren entfernt. Durch die dritte der Differentialformeln (11) in No. 9 der Einleitung erhält man aber:

$$dP = -\frac{\cos\delta \sin(\alpha - A)}{\sin\Delta^2}\, dD$$
$$+ \frac{\cos D}{\sin\Delta^2}\,[\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)]\, dA,$$

also:

$$dp = +\frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\Delta^2}\, dD$$
$$- \frac{\cos D}{\sin\Delta^2}\,[\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)]\, dA.$$

Ist also p' der beobachtete Winkel, welchen die Richtung der eignen Bewegung mit dem Declinationskreise macht, von dem nördlichen Theile desselben durch Osten herum gezählt, sodafs also:

$$\operatorname{tang} p' = \frac{\cos\delta'(\alpha' - \alpha)}{\delta' - \delta}$$

und p der mit den genäherten Werthen A und D nach den Formeln (B) berechnete Werth von $180^0 - P$, so erhält man für jeden Stern die Bedingungsgleichung:

$$0 = p - p' + \frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\Delta^2}\, dD$$
$$- \frac{\cos D}{\sin\Delta^2}\,[\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)]\, dA,$$

oder:

$$0 = (p - p')\sin\Delta + \frac{\cos\delta\sin(\alpha - A)}{\sin\Delta}\, dD$$
$$- \frac{\cos D}{\sin\Delta}\,[\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A)]\, dA,$$

und kann dann aus vielen Sternen durch die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe von dD und dA finden.

Auf diese Weise bestimmte Argelander die Richtung der Bewegung des Sonnensystems *). Bessel hatte nämlich in seinen Fundamentis astronomiae die eigne Bewegung einer grofsen Menge von Sternen aus der Vergleichung von Bradley's und Piazzi's Beobachtungen hergeleitet. Argelander wählte nun alle diejenigen Sterne aus, welche in den 45 Jahren von 1755 bis 1800 eine gröfsere Bewegung als 5″ zeigten, beobachtete diese von Neuem an dem Meridiankreise der Sternwarte in Abo und bestimmte die eignen Bewegungen durch die Vergleichung seiner eignen Beobachtungen mit

*) s. Astronom. Nachrichten No. 363.

den Bradleyschen genauer *). Zur Berechnung der Richtung des Sonnensystems wurden dann 390 Sterne verwandt, deren jährliche eigne Bewegung 0″.1 im Bogen des gröfsten Kreises überstieg. Diese wurden nach der Gröfse der eigenen Bewegung in drei Klassen getheilt und aus jeder Klasse einzeln die an die angenommenen Werthe von *A* und *D* anzubringenden Correctionen bestimmt. Aus den drei nahe übereinstimmenden Resultaten ergaben sich dann mit Rücksicht auf die Sicherheit der einzelnen im Mittel die folgenden, auf den Aequator und das Aequinoctium für 1800 bezogenen Werthe von *A* und *D*:

$$A = 259^\circ\ 51'.8 \text{ und } D = +32^\circ\ 29'.1,$$

Werthe, welche sehr nahe mit den von Herschel angenommenen übereinstimmen. Lundahl bestimmte die Lage dieses Punktes noch aus 147 Sternen, welche der Aboer Catalog nicht enthielt, indem er die Bradleyschen Positionen mit Pond's Catalog von 1112 Sternen verglich und fand:

$$A = 252^\circ\ 24'.4 \text{ und } D = +14^\circ\ 26'.1.$$

Im Mittel aus beiden Bestimmungen erhält Argelander mit Rücksicht auf die Sicherheit der einzelnen:

$$A = 257^\circ\ 59'.7 \text{ und } D = +28^\circ\ 49'.7.$$

Ganz ähnliche Arbeiten wurden von O. von Struve und in neuester Zeit von Galloway unternommen. Der erstere verglich zu dem Ende 400 in Dorpat beobachtete Sterne mit den Bradleyschen Positionen und fand:

$$A = 261^\circ\ 23' \text{ und } D = +37^\circ\ 36'.$$

Galloway bestimmte dagegen die Richtung der Bewegung des Sonnensystems aus den eignen Bewegungen der südlichen Sterne und erhielt, indem er die Positionen, welche Johnson auf St. Helena und Henderson am Cap der guten Hoffnung beobachtet hatten, mit dem Sterncataloge von Lacaille verglich, für *A* und *D* die Werthe:

$$A = 260^\circ\ 1' \text{ und } D = +34^\circ\ 23'.$$

Die umfassendste Untersuchung wurde von Mädler gemacht, der aus einer sehr grofsen Anzahl von Eigenbewegungen die Werthe:

---

*) Argelander, DLX stellarum fixarum positiones mediae incunte anno 1830. Helsingforsiae 1835.

$$\alpha = 261^\circ\ 38'.8 \text{ und } \delta = +39^\circ\ 53'.9$$

findet. Nach der Uebereinstimmung aller dieser Werthe zu urtheilen, wird somit der Punkt, auf welchen zu sich das Sonnensystem im Raume bewegt, mit ziemlicher Genauigkeit, wie sie bei dem Problem erreichbar ist, bestimmt sein.

15. Die mit einem Mittelwerthe von A und D für jeden Stern berechnete Richtung dieser parallactischen Bewegung, die durch:

$$\operatorname{tang} P = \frac{\cos D \sin(\alpha - A)}{\sin D \cos\delta - \cos D \sin\delta \cos(\alpha - A)}$$

gegeben ist, kann man daher als der wahren ziemlich nahe kommend betrachten. Wäre nun auch der Betrag der jährlichen Bewegung in dieser Richtung für jeden Stern bekannt, so könnte man daraus die jährliche Aenderung in Rectascension und Declination, soweit sie von dieser parallactischen Bewegung herrührt, für jeden Stern berechnen und diese den in No. 13 gegebenen Bedingungsgleichungen für die Bestimmung der Präcessionsconstante hinzufügen. Diese parallactische Bewegung wird nothwendig von der Entfernung der Sterne abhängen; wären diese also bekannt, so könnte man auch die Gröfse dieser Bewegung für eine bestimmte Entfernung selbst bestimmen. Da nämlich die Gleichungen übergehen in:

$$0 = \nu + dm_0 + dn_0 \operatorname{tg}\delta_0 \sin\alpha_0 + \frac{k}{\Delta}\,\frac{\cos D_0}{\cos\delta_0} \sin(\alpha_0 - A)$$

$$\text{und}\quad 0 = \nu' + dn_0 \cos\alpha_0 + \frac{k}{\Delta}\, g \sin(G - D_0)$$

$$\text{wo}\quad \delta_0 = g \cos G,$$

$$\sin\delta_0 \cos(\alpha_0 - A) = g \sin G,$$

so könnte man, wenn Δ bekannt ist, aus diesen Gleichungen die Gröfse k, die Bewegung der Sonne in Secunden ausgedrückt, in der als Einheit angenommenen Entfernung gesehen, und aufserdem dm_0 und dn_0 von dieser gesetzmäfsigen Bewegung der Sterne ganz unabhängig bestimmen. Da aber die Entfernungen der Sterne unbekannt sind, so ist dies unmöglich und O. v. Struve suchte der Schwierigkeit dadurch auszuweichen, dafs er hypothetische Werthe der relativen Entfernungen der Sterne in den verschiedenen Gröfsenklassen, wie sie von W. v. Struve in seinen Etudes de l'Astronomie stellaire aus der

Anzahl der Sterne in den verschiedenen Gröſsenklassen hergeleitet waren, annahm*). Struve verglich dann 400 Fixsterne, die von W. von Struve und Preuſs in Dorpat beobachtet waren, mit den Bradleyschen Beobachtungen und indem er zuerst die eigene Bewegung der Sterne auſser Acht lieſs, fand er für die Aenderung der Präcessionsconstante aus den Rectascensionen und Declinationen zwei widersprechende Werthe, indem der eine positiv, der andere negativ war. Mit Rücksicht auf die Bewegung der Sonne geben aber die Rectascensionen + 1″.16 und die Declinationen + 0″.66. Daraus bestimmte Struve mit Rücksicht auf die Sicherheit der beiden Zahlen den Werth der Constante der allgemeinen Präcession für 1790 zu 50″.23449 oder um 0.01343 gröſser als Bessel. Ferner fand er die jährliche Winkelgeschwindigkeit der Sonne, gesehen von einem Punkte, welcher sich in der mittleren Entfernung der Sterne erster Gröſse befindet, aus den Rectascensionen gleich 0″.321 und aus den Declinationen gleich 0″.357. Bei dieser Bestimmung der Präcessionsconstante und der Sonnenbewegung und deren anscheinender Sicherheit darf man aber nicht auſser Acht lassen, daſs dieselbe auf dem hypothetischen Verhältnisse der mittleren Entfernungen der Sterne in den verschiedenen Gröſsenklassen beruht. Auch ist es wohl nicht ganz zu billigen, daſs zur Bestimmung der Constante eine so geringe Anzahl von Sternen, die überdies meist Doppelsterne sind, gewählt ist.

Will man die eigene Bewegung des Sonnensystems bei der Bestimmung der Präcessionsconstante berücksichtigen, so ist es vielleicht besser, nicht die Verhältnisse der Entfernungen der einzelnen Gröſsenklassen nach einer Hypothese numerisch einzuführen, sondern die Sterne in Klassen zu theilen nach ihrer Gröſse oder nach der Gröſse ihrer Eigenbewegungen und für jede Klasse die Gröſse $\frac{k}{\Delta}$, so wie die Verbesserung der Präcessionsconstante zu bestimmen. Die so gefundenen Gröſsen $\frac{k}{\Delta}$ können dann als Mittelwerthe für diese Klassen an-

*) Danach ist, wenn der Abstand der Sterne erster Gröſse gleich 1 angenommen wird, der der Sterne zweiter gleich 1.71, der dritter gleich 2.57, der vierter 3.76, fünfter 5.44, sechster 7.86 und siebenter 11.34.

gesehen werden und die gefundenen Werthe von m und n werden wenigstens von einem Theile der parallactischen Bewegungen unabhängig sein, der um so gröfser ist, je näher gleich die Entfernungen der verschiedenen zusammengenommenen Sterne sind*). Man könnte auch hierbei noch die Aenderungen von A und D berücksichtigen, sodafs die Gleichungen würden, wenn man $\frac{k}{\Delta}$ mit a bezeichnet:

$$0 = \nu + dm_0 + dn_0 \operatorname{tang} \delta_0 \sin \alpha_0 - \frac{\cos D}{\cos \delta_0} \cos(\alpha_0 - A)\, a\, dA$$
$$+ [\cos D - \sin D\, dD] \frac{\sin(\alpha_0 - A)}{\cos \delta_0} a$$

$$0 = \nu' + dn_0 \cos \alpha_0 - g \cos(G - D)\, a\, dD + \cos D \sin \delta_0 \sin(\alpha_0 - A)\, a\, dA$$
$$+ a g \sin(G - D).$$

Man könnte dann für jede Gröfsenklasse die wahrscheinlichsten Werthe von a, $a\,dA$ und $a\,dD$ finden. Wollte man das Struvesche Verhältnifs der Entfernungen annehmen, so würde in dem Falle nach Anbringung des gehörigen Factors die Unbekannte a dieselbe sein für alle Klassen. (Vergl. hierüber noch Airy's Abhandlung in den Memoirs of the Royal Astronomical Society Vol. XXVIII.)

16. Die eigenen Bewegungen der Sterne können, mit wenigen Ausnahmen, für jetzt ohne merklichen Fehler als der Zeit proportional und in einem gröfsten Kreise vor sich gehend angenommen werden. Die eigenen Bewegungen in Rectascension und Declination ändern sich aber wegen der Veränderung der Grundebenen, auf welche sie bezogen wer-

---

*) Der Verfasser hatte schon vor einer Reihe von Jahren eine derartige Arbeit unternommen, die aber noch nicht hat vollendet werden können. Die eigenen Bewegungen der Sterne wurden aus der Vergleichung der Hendersonschen Edinburger Beobachtungen mit den Bradleyschen hergeleitet. Für die jährlichen parallactischen Bewegungen ergeben sich auf diesem Wege für verschiedene Gröfsenklassen die folgenden Mittelwerthe:

für 32 Sterne	4.3.	Gröfse	$0''.068985 \pm 0.010964$
für 75 Sterne	4.	Gröfse	$0''.069715 \pm 0.006584$
für 71 Sterne	4.5.	Gröfse	$0''.046811 \pm 0.006925$
für 284 Sterne	5.	Gröfse	$0''.029043 \pm 0.002446$.

Sterne, deren jährliche eigene Bewegung gröfser als $0''.3$ im Bogen des gröfsten Kreises ist, waren bei der Untersuchung ausgeschlossen.

den, und wenigstens für die dem Pole nahe stehenden Sterne ist es nöthig hierauf Rücksicht zu nehmen.

Die Formeln, welche die auf ein bestimmtes Aequinoctium zur Zeit t' bezogenen Polarcoordinaten in Bezug auf den Aequator durch die auf ein anderes Aequinoctium zur Zeit t bezogenen Coordinaten ausdrücken, sind nun nach No. 3 im zweiten Abschnitt:

$$\begin{aligned}\cos\delta'\sin(\alpha'+a'-z') &= \cos\delta\sin(\alpha+a+z)\\ \cos\delta'\cos(\alpha'+a'-z') &= \cos\delta\cos(\alpha+a+z)\cos\Theta-\sin\delta\sin\Theta\\ \sin\delta' &= \cos\delta\cos(\alpha+a+z)\sin\Theta+\sin\delta\cos\Theta,\end{aligned}$$

wo a die Präcession durch die Planeten während der Zeit $t'-t$ bezeichnet und z, z' und Θ Hülfsgröſsen sind, welche man durch die Formeln (A) derselben Nummer erhält. Weil die eigenen Bewegungen so klein sind, daſs man deren Quadrate und Producte vernachlässigen kann, so erhält man nach der ersten und dritten Formel (11) in No. 9 der Einleitung, wenn man bedenkt, daſs die obigen Formeln aus einem Dreiecke hergeleitet sind, dessen Seiten $90^0-\delta'$, $90^0-\delta$ und Θ und dessen Winkel $\alpha+a+z$, $180-\alpha'-a'+z'$ und c sind:

$$\begin{aligned}\Delta\delta' &= \cos c\,\Delta\delta-\sin\Theta\sin(\alpha'+a'-z)\,\Delta\alpha\\ \cos\delta'\,\Delta\alpha' &= \sin c\,\Delta\delta+\cos\delta\cos c\,\Delta\alpha\end{aligned}$$

oder, wenn man $\sin c$ und $\cos c$ durch die übrigen Stücke des Dreiecks ausdrückt:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha' &= \Delta\alpha\,[\cos\Theta+\sin\Theta\tang\delta'\cos(\alpha'+a'-z')]+\frac{\Delta\delta}{\cos\delta}\sin\Theta\,\frac{\sin(\alpha'+a'-z')}{\cos\delta'}\\ \Delta\delta' &= -\Delta\alpha\sin\Theta\sin(\alpha'+a'-z')+\frac{\Delta\delta}{\cos\delta}\cos\delta'[\cos\Theta+\sin\Theta\tang\delta'\cos(\alpha'+a'-z')]\end{aligned}\qquad (a)$$

und ebenso:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \Delta\alpha'\,[\cos\Theta-\sin\Theta\tang\delta\cos(\alpha+a+z)]-\frac{\Delta\delta'}{\cos\delta'}\sin\Theta\,\frac{\sin(\alpha+a+z)}{\cos\delta}\\ \Delta\delta &= \Delta\alpha'\sin\Theta\sin(\alpha+a+z)+\frac{\Delta\delta'}{\cos\delta'}\cos\delta[\cos\Theta-\sin\Theta\tang\delta\cos(\alpha+a+z)].\end{aligned}\qquad (b)$$

Beispiel. Die mittlere Rectascension und Declination des Polarsterns für den Anfang des Jahres 1755 ist:

$$\alpha = 10^0\,55'\,44''.955 \qquad \delta = +87^0\,59'\,41''.12.$$

Durch Anbringung der Präcession findet man den Ort des Polarsterns für den Anfang des Jahres 1850:

$$\alpha' = 16^0\,12'\,56''.917 \qquad \delta' = +88^0\,30'\,34''.680.$$

Nach Bessel's Tabulae Regiomontanae ist dieser Ort aber:

$$\alpha' = 16^\circ\, 15'\, 19''.530 \qquad \delta' = +88^\circ\, 30'\, 34''.898.$$

Dieser Unterschied rührt nun von der eigenen Bewegung des Polarsterns her, die also in der Zeit von 1755 bis 1850 $+2'\,22''.613$ in Rectascension und $+0''.218$ in Declination beträgt. Die jährliche eigene Bewegung des Polarsterns bezogen auf den Aequator von 1850 ist daher:

$$\Delta\alpha' = +1''.501189 \qquad \Delta\delta' = +0''.002295.$$

Wollte man daraus z. B. die eigenen Bewegungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ des Polarsterns bezogen auf den Aequator von 1755 haben, so mufs man dieselben nach den Formeln (b) berechnen. Es ist aber:

$$\Theta = 0^\circ\, 31'\, 45''.600$$
$$\alpha + a + z = 11^\circ\, 32'\, 9''.530$$

und hiermit erhält man:

$$\Delta\alpha = +1''.10836 \qquad \Delta\delta = +0''.005063.$$

Bei einigen Sternen läfst die Hypothese einer gleichförmigen eigenen Bewegung Fehler übrig, die sich nicht durch Beobachtungsfehler erklären lassen. Bessel bemerkte diese Veränderlichkeit der eigenen Bewegungen zuerst bei Sirius und Procyon, indem er die Declinationen des letzteren Sterns mit anderen Sternen, die nahe im Parallel desselben sind, verglich und ebenso die Rectascensionen des Sirius mit denen benachbarter Sterne. Bessel erklärte dieselben durch die Anziehung eines unsichtbaren, in grofser Nähe zu dem Sterne befindlichen Körpers von bedeutender Masse, und Peters in Altona hat unter dieser Voraussetzung aus den Abweichungen in der Rectascension des Sirius die Bahn desselben um einen solchen dunklen Körper bestimmt und daraus die folgende Formel gefunden, welche die an die Rectascension des Sirius anzubringende Verbesserung ausdrückt:

$$\varrho = 0^s.127 + 0^s.00050\,(t - 1800) + 0^s.171 \sin(u + 77^\circ\, 44'),$$

wo der Winkel u aus der Gleichung

$$M = 7^\circ.1865\,(t - 1791.431) = u - 0.7994 \sin u$$

zu nehmen ist und wo $7^\circ.1865$ die mittlere Bewegung des Sirius um den Centralkörper ist. Durch die Anbringung der nach dieser Formel berechneten Verbesserung werden die beobachteten Rectascensionen des Sirius in grofse Uebereın-

stimmung gebracht. Safford in Cambridge hat kürzlich gezeigt, dafs auch die Declinationen des Sirius eine gleiche Periode zeigen und dafs man an die jedesmalige beobachtete Declination die Verbesserung anzubringen hat:

$$q' = +\,0''.56 + 0''.0202\,(t - 1800) + 1''.47 \sin u + 0''.51 \cos u,$$

wo u dieselbe Bedeutung wie oben hat *).

*) Interessant in Bezug hierauf ist die kürzlich von A. Clarke in Boston gemachte Entdeckung, dafs Sirius einen schwachen Begleiter in der Entfernung von etwa 8″ bei sich hat.

Fünfter Abschnitt.

Von der Bestimmung der Lage der festen gröfsten Kreise der Himmelskugel gegen den Horizont des Beobachtungsortes.

In No. 5 und 6 des vorigen Abschnitts ist schon gezeigt, wie man mittelst eines fest aufgestellten Meridian-Instruments die Lage der festen Kreise der Himmelskugel gegen den Horizont bestimmen kann. Ist nämlich das Instrument so berichtigt, dafs die Collimationslinie des Fernrohrs einen auf den Horizont senkrechten Kreis beschreibt, so bringt man dasselbe in den Meridian und bestimmt also den Verticalkreis des Poles des Aequators durch die Beobachtung der Circumpolarsterne über und unter dem Pole, indem, wenn das Instrument diesen Verticalkreis beschreibt, die Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen 12^h Sternzeit $+\Delta\alpha$ sein mufs, wo $\Delta\alpha$ die Aenderung des scheinbaren Orts während der Zwischenzeit bezeichnet. Ferner giebt die Beobachtung der Zenithdistanzen des Sterns in beiden Culminationen die Aequatorhöhe des Ortes, indem diese gleich der halben Summe der wegen Refraction verbesserten Zenithdistanzen $+\frac{1}{2}\Delta\delta$ ist, wo $\Delta\delta$ die Aenderung der scheinbaren Declination während der Zwischenzeit der Beobachtungen bedeutet. Beobachtet man ferner die Culmination eines Sterns, dessen Rectascension bekannt ist, so giebt die scheinbare Rectascension des Sterns in dem Augenblicke den Stundenwinkel des Frühlingspunkts oder die Sternzeit in diesem Augenblicke. Ist dann an einem andern Orte in demselben Augenblicke ebenfalls eine solche Zeitbestimmung gemacht, so ist der Unterschied der Stundenwinkel des Frühlingspunktes an beiden Orten, mithin der Unterschied der geographischen Längen beider Orte bekannt und es ist nur noch nöthig, die Methoden

anzuführen, durch welche man bewirkt, daſs die Zeitbestimmungen an beiden Orten gleichzeitig gemacht werden oder durch die man, wenn dies nicht der Fall ist, den Unterschied der Zeiten kennen lernt, zu denen die Beobachtungen an beiden Orten angestellt sind.

Dieser Methoden, welche die einfachsten und genauesten sind, bedient man sich, wenn man ein festes, im Meridian aufgestelltes Höheninstrument hat. Man kann aber auch die Lage des Zeniths des Beobachtungsortes gegen den Pol und den Frühlingsnachtgleichenpunkt durch die Beobachtung der Coordinaten bekannter Sterne in Bezug auf den Horizont auſserhalb des Meridians bestimmen und dieser Umstand giebt zu einer groſsen Anzahl von Methoden Veranlassung, durch die man je nach den Umständen mit gröſserem oder geringerem Vortheile diese Bestimmungen auf Reisen oder zur See und überhaupt dann machen kann, wenn es an den für die vorher erwähnten Methoden nöthigen Hülfsmitteln gebricht. Zwischen der Höhe und dem Azimute eines Sterns und dessen Rectascension und Declination sowie der Polhöhe und Sternzeit, hat man nämlich die Relationen:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\Theta - \alpha)$$

$$\operatorname{cotang} A = -\frac{\cos \varphi \operatorname{tang} \delta}{\sin (\Theta - \alpha)} + \sin \varphi \operatorname{cotg} (\Theta - \alpha).$$

Diese Gleichungen zeigen, daſs man aus der Beobachtung der Höhe oder des Azimuts eines bekannten Sterns bei bekannter Polhöhe die Zeit oder bei bekannter Sternzeit die Polhöhe bestimmen kann, daher aus der Verbindung von zwei Höhen- oder Azimutalbeobachtungen desselben Sterns oder zweier bekannter Sterne die Polhöhe sowie die Sternzeit.

Bei allen diesen Bestimmungen müssen die Beobachtungen natürlich wegen der Refraction und täglichen Parallaxe (wenn das beobachtete Gestirn kein Fixstern ist) verbessert werden und die zur Berechnung angewandten Oerter müssen die scheinbaren Oerter sein. Zu den Beobachtungen wendet man ein Höhen- und Azimutalinstrument an, das so berichtigt sein muſs, daſs die Collimationslinie des Fernrohrs bei der Drehung einen Verticalkreis beschreibt (siehe No. 12 des siebenten Abschnitts), oder auch, wenn man blos Höhen beobachtet, ein Reflexionsinstrument, mit dem man den Winkel

zwischen dem Stern und dem von einem künstlichen Horizonte reflectirten Bilde, also die doppelte Höhe mifst. Beobachtet man mit einem Höhen- und Azimutalinstrument, so kann man den Zenithpunkt des Kreises wie beim Meridianinstrumente mittelst eines künstlichen Horizonts bestimmen und den dafür gefundenen Werth von der bei der Einstellung des Sterns gemachten Ablesung oder letztere von ersterem abziehen, oder man kann den Stern zuerst in einer Lage des Instruments einstellen und dann die Beobachtung, nachdem man das Instrument 180° um die verticale Säule gedreht hat, wiederholen. Sind dann ζ und ζ' die beiden zu den Zeiten Θ und Θ' gemachten Ablesungen und $\frac{dz}{d\Theta}$ und $\frac{d^2z}{d\Theta^2}$ die Differentialquotienten der Zenithdistanzen (I, 25) für die Zeit $\Theta_0 = \frac{\Theta + \Theta'}{2}$, so sind, wenn man annimmt, dafs in der ersten Lage des Kreises die Theilung im Sinne der Zenithdistanzen fortgeht, die auf das Mittel der Zeiten reducirten Ablesungen, wenn Z den Zenithpunkt bezeichnet:

$$z_0 + Z = \zeta + \frac{\delta z}{d\Theta_0}(\Theta_0 - \Theta) - \tfrac{1}{2}\frac{d^2z}{d\Theta_0^{\,2}}(\Theta - \Theta_0)^2$$

$$Z - z_0 = \zeta' + \frac{dz}{d\Theta_0}(\Theta' - \Theta_0) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2z}{d\Theta_0^{\,2}}(\Theta' - \Theta_0)^2.$$

Es ist mithin die für das Mittel der Zeiten geltende Zenithdistanz:

$$z_0 = \tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta') - \tfrac{1}{8}\frac{d^2z}{d\Theta_0^{\,2}}(\Theta' - \Theta)^2.$$

Endlich ist, wenn man das Gestirn direct und von einem künstlichen Horizonte reflectirt beobachtet, wenn die Theilung im Sinne der Zenithdistanzen fortgeht, da dann die linke Seite der zweiten Gleichung $180^0 - z_0 + Z$ geschrieben werden mufs:

$$90^0 - z_0 = \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) + \tfrac{1}{8}\frac{d^2z}{d\Theta_0^{\,2}}(\Theta' - \Theta)^2 \text{ *)}.$$

---

*) Dabei ist aber vorausgesetzt, dafs der Punkt des Kreises, welcher in der einen Lage nach dem Zenith gerichtet war, auch in der andern diese Lage unverändert beibehält. Um sich dessen zu versichern, ist an dem Kreise ein Niveau befestigt, dessen Blase sich ändert, wenn eine feste Linie im Kreise ihre Neigung gegen die Lothlinie ändert. Ein solches Niveau zeigt daher eine Aenderung des Zenithpunkts an und giebt zugleich das Mittel an die Hand, diese Aenderung zu bestimmen. (Siehe No. 13 des siebenten Abschnitts.)

Um das Azimut eines Objects mit einem solchen Instrument zu beobachten, mufs man nach einer der im Folgenden gegebenen Methoden den Punkt des Kreises bestimmen, welcher dem Meridian entspricht, und den dafür gefundenen Werth von der bei der Einstellung des Sterns gemachten Ablesung des horizontalen Kreises abziehen oder umgekehrt letzteren von ersterem Werth, je nach der Richtung der Theilung.

I. Bestimmung der Richtung des Meridians oder eines absoluten Azimuts.

1. Die einfachste Methode zur Bestimmung der Richtung des Meridians ist die Beobachtung des Augenblicks, wenn ein Gestirn seine gröfste Höhe über dem Horizonte erreicht. Man verfolgt dazu z. B. die Sonne mit einem Höheninstrumente und nimmt an, dafs die Sonne im Meridian ist, sobald die Höhenänderung aufhört. Dieser Methode bedient man sich zur See um den Augenblick des wahren Mittags wenigstens annähernd zu finden, denn die Methode ist nothwendig sehr unsicher, da die Höhe der Gestirne im Meridian ein Maximum erreicht, also die Aenderung derselben unmittelbar vor und nach der Culmination sehr klein ist.

Eine zweite Methode ist die der Beobachtung der gröfsten Digressionen. Nach No. 27 des ersten Abschnitts ist der Stundenwinkel der gröfsten Digression eines Circumpolarsterns durch die Gleichung gegeben:

$$\cos t = \frac{\tang \varphi}{\tang \delta} \quad \text{oder} \quad \tang \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin(\delta - \varphi)}{\sin(\delta + \varphi)},$$

und zu dieser Zeit ist die Bewegung des Sterns senkrecht gegen den Horizont, also die Bewegung im Azimute Null, da der Verticalkreis den Parallelkreis des Sterns berührt. Verfolgt man also einen solchen Stern mit einem Azimutalinstrument, welches so berichtigt ist, dafs die Collimationslinie des Fernrohrs einen Verticalkreis beschreibt, so wird man im Allgemeinen das Fernrohr im Sinne des Vertical- und Azimutalkreises bewegen müssen, um den Stern auf dem Fadenkreuze zu erhalten, und nur zur Zeit der gröfsten

Digression wird die verticale Bewegung des Fernrohrs allein dazu hinreichen. Liest man, sobald dies der Fall ist, auf dem Azimutalkreise in dieser Stellung des Instruments a ab, dagegen a', wenn man dieselbe Beobachtung auf der andern Seite des Meridians macht, so ist $\frac{a+a'}{2}$ der dem Meridiane entsprechende Punkt des Kreises. Man gebraucht bei der Anwendung dieser Methode am vortheilhaftesten den Polarstern, weil derselbe unter den helleren Sternen wegen seiner langsamen Bewegung am längsten in der gröſsten Digression verweilt.

Eine dritte Methode, den Meridian zu finden, ist die der Beobachtung correspondirender Höhen. Da nämlich zu gleichen Stundenwinkeln auf beiden Seiten des Meridians auch gleiche Höhen gehören, so folgt, daſs wenn man zu zwei verschiedenen Zeiten ein Gestirn in derselben Höhe beobachtet hat, dadurch zwei Verticalkreise gegeben sind, welche auf verschiedenen Seiten des Meridians gleich weit von demselben entfernt sind. Stellt man also an einem Azimutalinstrumente ein Gestirn auf das Fadenkreuz, liest den Azimutalkreis ab und wartet dann, bis das Gestirn nach der Culmination wieder an das Fadenkreuz des in der Höhe unverändert gebliebenen Fernrohrs tritt, so ist, wenn man wieder den Kreis abliest, das arithmetische Mittel aus beiden Ablesungen der Meridianpunkt des Kreises. Braucht man zu diesen Beobachtungen die Sonne, welche ihre Declination in der Zwischenzeit zwischen beiden Beobachtungen ändert, so bedarf die so gefundene Richtung des Meridians noch einer kleinen Correction. Differenzirt man nämlich die Gleichung:

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A,$$

indem man allein δ und A als veränderlich ansieht, so erhält man:

$$dA = \frac{\cos\delta\, d\delta}{\cos\varphi\, \cos h\, \sin A} = \frac{d\delta}{\cos\varphi \sin t}.$$

Bezeichnet man daher mit $\Delta\delta$ die Aenderung der Declination in der Zwischenzeit der Beobachtungen, so muſs man von dem arithmetischen Mittel der beiden Ablesungen die Gröſse

$$\frac{\Delta\delta \cos\delta}{2\cos\varphi \cos h \sin A} = \frac{\Delta\delta}{2\cos\varphi\, \sin t}$$

abziehen, wenn die Theilung in demselben Sinne läuft, in welchem die Azimute gezählt werden.

Eine vierte Methode ist identisch mit derjenigen, welche in No. 5 des vierten Abschnitts erwähnt war, um ein Meridianinstrument genau in den Meridian zu bringen. Beobachtet man nämlich die Zeiten, zu welchen ein Circumpolarstern über und unter dem Pole dasselbe Azimut erreicht, so fällt die Richtung des Instruments mit dem Meridian zusammen, wenn die Zwischenzeit zwischen den beiden Beobachtungen gleich 12^h Sternzeit $+ \Delta\alpha$ ist, wo $\Delta\alpha$ die Aenderung der scheinbaren Orte der Sterne in der Zwischenzeit ist. Ist dies aber nicht der Fall, so findet man das Azimut auf die folgende Weise. Zählt man die Azimute von dem Nordpunkte ab anstatt von dem Südpunkte, so hat man für die erste Beobachtung:

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t$$
$$\cos h \cos A = \cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos t,$$

und für die zweite Beobachtung unterhalb des Pols:

$$\cos h' \sin A = \cos\delta \sin t'$$
$$\cos h' \cos A = \cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos t'.$$

Addirt man die erste Gleichung zur dritten und zieht die zweite von der vierten ab, so enthält man leicht durch Division der entstehenden Gleichungen:

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}(t' - t) \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(h + h') \operatorname{tang} \frac{1}{2}(h - h')}{\sin\varphi}.$$

Ist $t' - t$ nahe 12 Stunden Sternzeit, so wird $90 - \frac{1}{2}(t' - t)$ und ebenso A ein kleiner Winkel, und da dann $\frac{1}{2}(h + h')$ sehr nahe gleich φ und $\frac{1}{2}(h - h')$ sehr nahe gleich $90^\circ - \delta$ ist, so erhält man in dem Falle:

$$A = \frac{90^\circ - \frac{1}{2}(t' - t)}{\cos\varphi \operatorname{tang}\delta}.$$

2. Diese Methoden setzen die Kenntniſs der Zeit und der Polhöhe nicht voraus, oder erfordern wenigstens nur eine genäherte Kenntniſs derselben. Sind dieselben aber bekannt, so giebt jede Einstellung eines bekannten Sterns an einem Azimutalinstrumente den Meridianpunkt, indem man die Ablesung am Kreise mit dem aus den Gleichungen:

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin t$$
$$\cos h \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \qquad (a)$$

berechneten Azimute vergleicht. Macht man eine Reihe von Einstellungen, so ist es nicht nöthig, die Azimute für die einzelnen Zeiten nach diesen Formeln zu berechnen, sondern man kann kürzer so verfahren: Es seien Θ, Θ', Θ''., etc. die einzelnen Beobachtungszeiten, deren Anzahl n ist, ferner bezeichne Θ_0 das arithmetische Mittel aus allen, so hat man, wenn man A_0 das zur Zeit Θ_0 gehörige Azimut nennt:

$$A = A_0 + \frac{dA}{dt}(\Theta - \Theta_0) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2 A}{dt^2}(\Theta - \Theta_0)^2,$$

$$A' = A_0 + \frac{dA}{dt}(\Theta' - \Theta_0) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2 A}{dt^2}(\Theta' - \Theta_0)^2,$$

etc.

und da $\Theta - \Theta_0 + \Theta' - \Theta_0 +$ etc. $= 0$ ist, so erhält man:

$$A_0 = \frac{A + A' + A'' + \ldots}{n} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2 A}{dt^2}\left[\frac{(\Theta - \Theta_0)^2 + (\Theta' - \Theta_0)^2 + \ldots}{n}\right]$$

$$= \frac{A + A' + A'' + \ldots}{n} - \frac{d^2 A}{dt^2}\,\frac{\Sigma 2 \sin \frac{1}{2}(\Theta - \Theta_0)^2}{n},$$

wenn man mit $\Sigma 2 \sin \frac{1}{2}(\Theta - \Theta_0)^2$ die Summe aller einzelnen Gröfsen $2 \sin \frac{1}{2}(\Theta - \Theta_0)^2$ bezeichnet. Diese sind deshalb für $\frac{1}{2}(\Theta - \Theta_0)^2$ eingeführt, weil der Unterschied sehr klein ist, so lange $\Theta - \Theta_0$ klein ist, und weil sich in allen Sammlungen astronomischer Tafeln, z. B. Warnstorff's Hülfstafeln, bequeme Tafeln finden, die mit dem Argumente von t in Zeit ausgedrückt, die Gröfse $2 \sin^2 \frac{1}{2} t$ in Bogensecunden ausgedrückt geben. Nach No. 25 des ersten Abschnitts hat man noch:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -\frac{\cos\varphi \sin A_0}{\cos h_0{}^2}[\cos h_0 \sin\delta + 2\cos\varphi\cos A_0].$$

Addirt man daher zu dem arithmetischen Mittel aller Ablesungen am Kreise die Gröfse:

$$\frac{\cos\varphi \sin A_0}{\cos h_0{}^2}[\cos h_0 \sin\delta + 2\cos\varphi\cos A_0]\,\frac{\Sigma 2 \sin \frac{1}{2}(\Theta - \Theta_0)^2}{n},$$

so erhält man einen Werth A_1, den man mit dem Azimute vergleicht, welches man nach den Formeln (a) mit $t = \Theta_0 - \alpha$ berechnet.

Durch die Differentiation der Gleichungen (a) oder nach der Differentialgleichung in No. 8 des ersten Abschnitts erhält man:

$$dA = \frac{\cos\delta\cos p}{\cos h}\,dt - \operatorname{tang} h \sin A\, d\varphi + \frac{\sin p}{\cos h}\,d\delta,$$

woraus man sieht, dafs es besonders vortheilhaft ist, hierzu den Polarstern zur Zeit der gröfsten Digression zu beobachten, weil dann $p = 90^0$ und A aufser in hohen Breiten in der Nähe von 180^0 ist, sodafs ein Fehler in der Zeit gar keinen, ein Fehler in der Polhöhe nur einen geringen Einflufs auf das berechnete Azimut, mithin auf die Bestimmung des Meridianpunktes des Kreises hat.

3. Hat man den Meridianpunkt des Azimutalkreises bestimmt, so erhält man aus den Unterschieden der Ablesungen am Kreise mit diesem Punkte das Azimut eines jeden himmlischen oder irdischen *) Objects.

Das Azimut eines irdischen Objects kann man aber auch durch die Messung der Distanz desselben von einem Gestirne mittelst eines Reflexionsinstrumentes, obwohl mit geringerer Genauigkeit, bestimmen, wenn die Polhöhe und die Zeit bekannt ist und zugleich die Höhe des irdischen Objects über dem Horizonte beobachtet wird.

Aus dem bekannten Stundenwinkel des Gestirns zur Zeit der beobachteten Distanz, erhält man nämlich nach No. 7 des ersten Abschnitts die Höhe h und das Azimut a des Gestirns und hat dann in dem Dreiecke, welches vom irdischen Objecte, dem Gestirne und dem Zenith gebildet wird, die Gleichung:

$$\cos\Delta = \sin h \sin H + \cos h \cos H \cos(a - A)$$

wenn H und A die Höhe und das Azimut des Objects und Δ die beobachtete Distanz bezeichnet **).

Man findet dann also $a - A$ durch die Gleichung:

$$\cos(a - A) = \frac{\cos\Delta - \sin h \sin H}{\cos h \cos H} \qquad (A)$$

mithin, da a bekannt ist, auch das Azimut A des Objects.

Die Gleichung (A) kann man noch für die logarithmische Rechnung bequemer einrichten. Man erhält nämlich:

---

*) Bei diesen ist noch eine von der Entfernung des Objects abhängige Correction erforderlich, wenn sich das Fernrohr an einem Ende der Axe befindet. Siehe No. 12 des siebenten Abschnitts.

**) An das berechnete h hat man zuerst noch die Refraction und, wenn die Sonne beobachtet ist, auch die Höhenparallaxe anzubringen, und ebenso für H die gemessene mit der Refraction behaftete Höhe zu nehmen, um dann auch die gemessene Entfernung Δ in der Formel anwenden zu können.

$$1 + \cos(a - A) = \frac{\cos(H + h) + \cos\Delta}{\cos h \cos H}$$

und:

$$1 - \cos(a - A) = \frac{\cos(H - h) - \cos\Delta}{\cos h \cos H}$$

mithin:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - A)^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta - H + h)\sin\frac{1}{2}(\Delta + H - h)}{\cos\frac{1}{2}(\Delta + H + h)\cos\frac{1}{2}(H + h - \Delta)}$$

oder, wenn man setzt:

$$S = \tfrac{1}{2}(\Delta + H + h),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - A)^2 = \frac{\sin(S - H)\sin(S - h)}{\cos S \cos(S - \Delta)} \qquad (B).$$

Liegt das irdische Object im Horizonte, ist also $H = 0$, so erhält man einfach:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - A)^2 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\Delta + h) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\Delta - h).$$

Differenzirt man die Gleichung für $\cos\Delta$, indem man $a - A$ und Δ als veränderlich ansieht, so erhält man:

$$d(a - A) = \frac{\sin\Delta}{\cos h \cos H \sin(a - A)} d\Delta$$

und nach I. No. 8:

$$da = \frac{\cos\delta \cos p}{\cos h} dt.$$

Daraus sieht man also, daſs man um den Einfluſs eines Beobachtungsfehlers in der Zeit und in der gemessenen Distanz auf A nicht zu sehr zu vergröſsern, das Gestirn nicht zu weit vom Horizonte nehmen muſs, damit $\cos h$ nicht klein ist.

Hat man zwei Distanzen eines Gestirns von einem irdischen Objecte beobachtet, so kann man daraus den Stundenwinkel und die Declination, also auch Höhe und Azimut desselben berechnen.

Nennt man nämlich D und T Declination und Stundenwinkel des Objects, δ und t dasselbe für den Stern, so hat man in dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Pole, dem Gestirne und dem irdischen Objecte:

$$\cos\Delta = \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(t - T).$$

Ist dann λ die Zwischenzeit zwischen beiden Beobachtungen, die für die Sonne in wahrer Zeit ausgedrückt sein muſs, so erhält man für die zweite Distanz Δ' die Gleichung:

$$\cos\Delta' = \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(t - T + \lambda).$$

Aus beiden Gleichungen kann man, wie bei einem andren Probleme gezeigt werden wird, D und $t - T$ finden. Berechnet man dann für die Zeit der ersten Beobachtung den Stundenwinkel t des Gestirns, so erhält man auch T und kann dann aus T und D nach den Formeln in I. No. 7 A und H finden.

II. Bestimmung der Zeit oder der Polhöhe aus der Beobachtung einer einzelnen Höhe.

4. Hat man die Höhe eines bekannten Sterns beobachtet und kennt aufserdem die Polhöhe des Beobachtungsortes, so erhält man den Stundenwinkel aus der Gleichung:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

Um diese Formel für logarithmische Rechnung bequemer einzurichten, verfährt man wie bei der ähnlichen Gleichung in No. 3 und erhält dann, wenn man statt der Höhe die Zenithdistanz einführt:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(z - \varphi + \delta) \sin \frac{1}{2}(z + \varphi - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(z + \varphi + \delta) \cos \frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)}$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t^2 &= \frac{\sin (S - \varphi) \sin (S - \delta)}{\cos S \,.\, \cos (S - z)} \\ \text{wo } S &= \tfrac{1}{2}(z + \varphi + \delta) \end{aligned}\right\} \qquad (A).$$

Da diese Gleichung das Zeichen von t unbestimmt läfst, so mufs man wissen, auf welcher Seite des Meridians die Beobachtung angestellt ist und dann t positiv oder negativ nehmen, je nachdem die Höhe auf der West- oder Ostseite beobachtet wurde.

Ist dann α die Rectascension des beobachteten Gestirns, so erhält man die Sternzeit der Beobachtung aus der Gleichung:

$$\Theta = t + \alpha,$$

hat man dagegen die Sonne beobachtet, so ist der berechnete Stundenwinkel die wahre Sonnenzeit.

Beispiel. Dr. Westphal hat 1822 Oct. 29 zu Abutidsch in Aegypten die Höhe des unteren Sonnenrandes

$$h = 33^{\circ}\, 42'\, 18''.7$$

beobachtet, als die Uhr zeigte $20^{h}\, 16^{m}\, 20^{s}$.

Diese Höhe hat man nun zuerst wegen der Refraction und Parallaxe zu corrigiren; da aber die meteorologischen Instrumente nicht beobachtet sind, so kann man nur die mittlere Refraction, gleich 1′ 26″. 4 aus den Tafeln nehmen. Zieht man diese von der beobachteten Höhe ab und legt dazu den Halbmesser der Sonne 16′ 8″. 7 und die Höhenparallaxe 6″. 9, so erhält man für die reducirte Höhe des Mittelpunkts der Sonne:

$$h = 33^\circ\, 57'\, 7''.\, 9.$$

Die Polhöhe von Abutidsch ist nun 27° 5′ 0″, die Declination der Sonne war:

$$-13^\circ\, 38'\, 11''.\, 1$$

also ist:

$$S = \tfrac{1}{2}(z + \varphi + \delta) = +34^\circ\, 44'\, 50''.\, 5$$

$$S - \varphi = +7^\circ\, 39'\, 50''.5,\quad S - \delta = +48^\circ\, 23'\, 1''.\, 6,\quad S - z = -21^\circ\, 18'\, 1''.\, 6$$

und damit ist die Rechnung die folgende:

$\sin(S-\varphi)$	9.1250385	$\cos S$	9.9146991
$\sin(S-\delta)$	9.8736752	$\cos(S-z)$	9.9692707
	8.9987137		
	9.8839698		
$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}t^2$	9.1147439	$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}t$	9.5573719

$$\tfrac{1}{2}t = -19^\circ\, 50'\, 37''.\, 98$$
$$t = -39\;\; 41\;\; 15\;\; .96$$
$$t = -\;\; 2^h\, 38^m\, 45^s.\, 06.$$

Es war also die wahre Sonnenzeit zur Zeit der Beobachtung gleich $21^h\, 21^m\, 14^s.\, 9$ und da die Zeitgleichung $-16^m\, 8^s.\, 7$ war, so hatte man $21^h\, 5^m\, 6^s.\, 2$ mittlere Zeit. Die Uhr ging daher $48^m\, 46^s.\, 2$ gegen mittlere Zeit nach oder man mufste $+48^m\, 46^s.\, 2$ zu der Angabe der Uhr addiren, um mittlere Zeit zu erhalten.

Da die Declination der Sonne und die Zeitgleichung veränderlich sind, so mufs man eigentlich schon die Zeit kennen, um bei der Berechnung von t diejenige Declination und nachher auch diejenige Zeitgleichung anwenden zu können, welche wirklich für den Augenblick der Beobachtung galt. Man mufs daher zuerst einen genäherten Werth für die Declination der Sonne nehmen und, nachdem man damit eine genäherte Zeitbestimmung erhalten hat, die Declination der Sonne noch einmal schärfer aus den Ephemeriden interpoliren und damit die Rechnung wiederholen.

Die Zahl, welche man zur Angabe der Uhr hinzufügen mufs, um die wirkliche Zeit zu erhalten, heifst der Stand der Uhr. Gang der Uhr nennt man dagegen den Unterschied zweier zu verschiedenen Zeiten beobachteten Uhrstände und man nimmt das Zeichen desselben immer so an, dafs ein positiver Gang zu langsames, ein negativer zu schnelles Gehen der Uhr anzeigt. Sind beide Beobachtungen um $24^h - t$ Stunden aus einander und ist Δu der Gang der Uhr während dieser Zeit, so erhält man den Gang der Uhr in 24 Stunden, wenn man denselben gleichförmig annimmt, nach der Formel:

$$\frac{24\,\Delta u}{24 - t} = \frac{\Delta u}{1 - \frac{t}{24}}.$$

Differenzirt man die ursprüngliche Gleichung:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$

so erhält man nach I. No. 8:

$$dh = -\cos A\, d\varphi - \cos\delta \sin p\, dt,$$

oder da

$$\cos\delta \sin p = \cos\varphi \sin A$$

ist:

$$dt = -\frac{1}{\cos\varphi \sin A}\, dh - \frac{1}{\cos\varphi \operatorname{tang} A}\, d\varphi.$$

Die Coefficienten von dh und $d\varphi$ werden nun desto kleiner, je mehr A sich dem Werthe $\pm 90^0$ nähert. Für diesen Fall wird die Tangente unendlich, also hat ein Fehler in der Polhöhe, sobald die Höhe im ersten Verticale genommen ist, gar keinen Einflufs auf die Bestimmung der Zeit. Da ferner in diesem Falle $\sin A$ ein Maximum, also der Coefficient von dh ein Minimum ist, so hat dann auch ein Fehler, welcher in der Messung der Höhe begangen ist, den möglichst kleinsten Einflufs auf die Bestimmung der Zeit. Um daher die Zeit durch Höhenbeobachtungen zu bestimmen, wird es immer zweckmäfsig sein, dieselben im ersten Verticale oder doch so nahe als möglich dabei zu nehmen.

Da der Coefficient von dh auch gleich $-\frac{1}{\cos\delta \sin p}$ ist, so sieht man, dafs man bei der Zeitbestimmung durch Höhen die Beobachtungen von Sternen mit grofser Declination vermeiden mufs, und dafs es am Vortheilhaftesten ist, Sterne in der Nähe des Aequators zu beobachten.

Berechnet man die numerischen Werthe der Differentialquotienten für das vorige Beispiel, so erhält man zuerst nach der Formel:

$$\sin A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos h} \qquad A = -48^\circ\, 25'.8$$

und dann:

$$dt = +1.5013\, dh + 0.9966\, d\varphi$$

oder, wenn man dt gleich in Zeitsecunden haben will:

$$dt = +0.1001\, dh + 0.0664\, d\varphi.$$

Hat man also in der Höhe um eine Bogensecunde gefehlt, so begeht man in der Zeit einen Fehler von $0^s.10$, dagegen beträgt der Einfluſs des Fehlers von einer Bogensecunde in der Polhöhe nur $0^s.07$.

Die Differentialgleichung zeigt noch, daſs je gröſser die Polhöhe ist, je kleiner also $\cos\varphi$ ist, desto miſslicher die Zeitbestimmung durch Höhenbeobachtungen wird. Unter dem Pole, wo $\cos\varphi = 0$ ist, wird dieselbe ganz unbrauchbar.

5. Hat man mehrere Höhen oder Zenithdistanzen nach einander beobachtet, so hat man nicht nöthig, den Stand der Uhr aus jeder einzelnen Zenithdistanz zu berechnen, wenn man sich nicht vielleicht von der Uebereinstimmung der einzelnen Beobachtungen unter einander überzeugen will, sondern man kann sich hierzu des Mittels aus allen beobachteten Zenithdistanzen bedienen. Da aber die Zenithdistanzen nicht proportional den Zeiten wachsen, so muſs man entweder an das arithmetische Mittel derselben, wie in No. 2 für die Azimute, eine Correction anbringen, um den für das arithmetische Mittel der Zeiten geltenden Stundenwinkel aus dieser verbesserten Zenithdistanz zu erhalten oder man muſs einfacher an den aus dem arithmetischen Mittel der Zenithdistanzen berechneten Stundenwinkel eine Correction anbringen, damit derselbe für das arithmetische Mittel der Zeiten gelte.

Es seien wieder τ, τ', τ'', etc., die einzelnen Beobachtungszeiten, deren Anzahl n ist, T das arithmetische Mittel aus allen, so hat man, wenn man die zur Zeit T gehörige Zenithdistanz Z nennt:

$$z = Z + \frac{dZ}{dt}(\tau - T) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2 Z}{dt^2}(\tau - T)^2,$$

$$z' = Z + \frac{dZ}{dt}(\tau' - T) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2 Z}{dt^2}(\tau' - T)^2,$$

etc.,

wo t der dem Mittel der Zeiten entsprechende Stundenwinkel ist, oder da $\tau - T + \tau' - T + \tau'' - T + \ldots = 0$ ist:

$$Z = \frac{z + z' + z'' + \ldots}{n} - \frac{1}{2} \frac{d^2 Z}{dt^2} \frac{(\tau - T)^2 + (\tau' - T)^2 + \ldots}{n}$$

$$= \frac{z + z' + z'' + \ldots}{n} - \frac{d^2 Z}{dt^2} \frac{\Sigma 2 \sin \frac{1}{2} (\tau - T)^2}{n}.$$

Substituirt man hier für $\frac{d^2 z}{dt^2}$ den in No. 25 des ersten Abschnitts gefundenen Ausdruck, so erhält man endlich:

$$Z = \frac{z + z' + z'' + \ldots}{n} - \frac{\cos \delta \cos \varphi}{\sin Z} \cos A \cos p \frac{\Sigma 2 \sin \frac{1}{2} (\tau - T)^2}{n}.$$

Mit diesem verbesserten arithmetischen Mittel der Zenithdistanzen hätte man dann den Stundenwinkel und daraus die Zeit zu berechnen, um aus der Vergleichung dieser Zeit mit T den Stand der Uhr zu erhalten. Berechnet man aber den Stundenwinkel mit dem unverbesserten arithmetischen Mittel aus allen Zenithdistanzen, so hat man an den gefundenen Stundenwinkel die Correction anzubringen:

$$-\frac{dt}{dz} \frac{\cos \delta \cos \varphi}{\sin Z} \cos A \cos p \frac{\Sigma 2 \sin \frac{1}{2} (\tau - T)^2}{n},$$

und wenn man für $\frac{dt}{dz}$ seinen Werth nach No. 25 des ersten Abschnitts substituirt, so wird diese Correction, in Zeitsecunden ausgedrückt:

$$-\frac{\cos p \cos A}{15 \sin t} \frac{\Sigma 2 \sin \frac{1}{2} (\tau - T)^2}{n}, \qquad (a)$$

wo dann zur Berechnung von A und p die Formeln dienen:

$$\sin A = \frac{\sin t}{\sin Z} \cos \delta$$

$$\text{und} \quad \sin p = \frac{\sin t}{\sin Z} \cos \varphi.$$

Diese lassen freilich das Zeichen von $\cos A$ und $\cos p$ unbestimmt; durch die folgende Betrachtung kann man aber leicht über das Zeichen der Correction (a) entscheiden.

Zählt man die Stundenwinkel nicht auf die gewöhnliche Weise, sondern zu beiden Seiten des Meridians von 0^0 bis 180^0, so hat man die Correction immer an den absoluten Werth von t anzubringen, und das Zeichen derselben hängt dann allein von dem Zeichen des Products $\cos p \cos A$ ab, welches positiv oder negativ ist, je nachdem $\cos p$ und $\cos A$ gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

Nun ist:

$$\cos p = \frac{\sin\varphi\left(1 - \cos z\,\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}\right)}{\sin z\,\cos\delta} = \frac{\sin\delta\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\delta} - \cos z\right)}{\sin z\,\cos\delta},$$

$$\cos A = \frac{\sin\varphi\left(\cos z - \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}\right)}{\sin z\,\cos\varphi} = \frac{\sin\delta\left(\frac{\cos z\,\sin\varphi}{\sin\delta} - 1\right)}{\sin z\,\cos\varphi}.$$

Wenn daher $\delta < \varphi$, so ist $\cos p$ immer positiv,

und $\cos A$ positiv, wenn $\cos z > \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$,

negativ, wenn $\cos z < \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$,

und wenn $\delta > \varphi$, so ist $\cos A$ immer negativ,

und $\cos p$ negativ, wenn $\cos z > \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$,

positiv, wenn $\cos z < \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$.

Sucht man daher den Bruch

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}, \text{ wenn } \varphi > \delta$$

$$\text{und } \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}, \text{ wenn } \varphi < \delta,$$

so haben die Cosinus gleiche Zeichen oder die Correction (a) ist negativ, wenn $\cos z$ gröſser als dieser Bruch ist; dagegen haben dieselben verschiedene Zeichen oder die Correction (a) ist positiv, wenn $\cos z$ kleiner als dieser Bruch ist. Für Sterne mit südlicher Declination ist $\cos A$ und $\cos p$ immer positiv, also das Zeichen der Correction immer negativ *).

Dr. Westphal hatte am 29. October nicht blos eine Zenithdistanz der Sonne genommen, sondern deren acht, nämlich:

Uhrzeit.	Wahre Zenithdistanz des Mittelpunkts der ⊙	$\tau - T$	$2\sin\frac{1}{2}(\tau-T)^2$
$20^h\ 16^m 20^s$	$56^0\ 2'\ 52''.1$	$3^m 32^s$	$24''.51$
17 21	55 52 51 .5	2 31	12 .43
18 21	42 51 .0	1 31	4 .52
19 21	32 50 .5	0 31	0 .52
20 21	22 50 .0	0 29	0 .46
21 23	12 49 .4	1 31	4 .52
22 23	2 48 .9	2 31	12 .43
23 25	54 52 48 .4	3 33	24 .74
$20^h\ 19^m 51^s.9$	$55^0\ 27'\ 50''.2$		$10''.52.$

*) Warnstorff's Hülfstafeln pag. 122.

Berechnet man nun mit dem arithmetischen Mittel der Zenithdistanzen:

$$55^0\ 27'\ 50''.2$$

und der Declination der Sonne:

$$-13^0\ 38'\ 14''.7$$

den Stundenwinkel, so erhält man:

$$2^h\ 35^m\ 13^s.18.$$

Hieran hat man nun die Correction anzubringen. Es ist aber:

$$\sin p = 9.83079 \quad \sin A = 9.86881,$$

mithin die Correction, da die Declination südlich ist:

$$-8''.32 \text{ im Bogen oder } -0^s.55 \text{ in Zeit.}$$

Mit dem verbesserten Stundenwinkel

$$-2^h\ 35^m\ 12^s.63$$

erhält man dann die mittlere Zeit:

$$21^h\ 8^m\ 38^s.70,$$

also den Stand der Uhr gleich:

$$+48^m\ 46^s.8.$$

6. Hat man die Höhe eines Sterns beobachtet und ist die Zeit bekannt, so kann man daraus die Polhöhe des Beobachtungsortes berechnen. Man hat nämlich wieder die Gleichung:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t.$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= M \sin N, \\ \cos \delta \cos t &= M \cos N, \end{aligned} \qquad (A)$$

so erhält man:

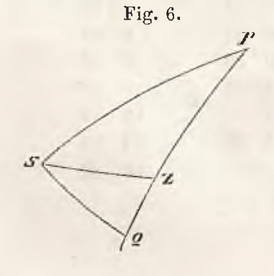
$$\sin h = M \cos (\varphi - N),$$

also:

$$\cos (\varphi - N) = \frac{\sin h}{M} = \frac{\sin N}{\sin \delta} \sin h. \qquad (B)$$

Hier findet nun ein zweideutiger Fall statt, indem man für $\varphi - N$ den zu $\cos (\varphi - N)$ gehörigen positiven oder negativen Werth nehmen kann. Man kann indessen hierüber immer leicht durch eine geometrische Betrachtung entscheiden. Fällt man nämlich Fig. 6 vom Orte S des Sterns ein Perpendikel SQ auf den Meridian, so sieht man leicht, daſs $N = 90 - PQ$, also gleich dem Abstande von Q vom Aequator

Fig. 6.



(oder $ZQ = \varphi - N$), während M der Cosinus des Perpendikels SQ ist. Solange also SQ südlich vom Zenith den Meridian trifft, hat man $\varphi - N$ zu nehmen, dagegen $N - \varphi$, wenn der Fufspunkt des Perpendikels nördlich vom Zenith liegt. Ist $t > 90^0$, so fällt das Perpendikel nördlich vom Pol, also wird der Abstand des Fufspunktes desselben vom Aequator $> 90^0$ und der Abstand vom Zenith gleich $N - \varphi$. Man hat also auch dann für den durch den Cosinus gegebenen Winkel den Werth $N - \varphi$ zu nehmen.

Ist die Höhe im Meridiane selbst beobachtet, so erhält man φ einfach aus der Gleichung:

$$\varphi = \delta \pm z,$$

je nachdem der Stern südlich oder nördlich vom Zenith culminirt. Ist dagegen der Stern in der unteren Culmination beobachtet, so ist:

$$\varphi = 180^0 - \delta - z.$$

Dr. Westphal hat am 19. October 1822 zu Benisuef in Aegypten um $23^h\, 1^m\, 10^s$ mittlere Zeit die Höhe des Mittelpunkts der Sonne gleich $49^0\, 17'\, 22''.8$ beobachtet. Die Declination der Sonne war $-10^0\, 12'\, 16''.1$, die Zeitgleichung:

$$= -15^m\, 0^s.0,$$

also der Stundenwinkel der Sonne:

$$23^h\, 16^m\, 10^s = -10^0\, 57'\, 30''.0.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\text{tang}\,\delta &= 9.2552942_n \\
\cos t &= 9.9920078 \\
N &= -10^0\, 23'\, 23''.67 \\
\sin N &= 9.2561063_n \\
\sin \delta &= 9.2483695_n \\
&\ 0.0077368 \\
\sin h &\ 9.8796788 \\
\varphi - N &= 39^0\, 29'\, 54''.51 \\
\text{also } \varphi &= 29\quad 6\quad 30.84.
\end{aligned}$$

Um den Einflufs zu schätzen, welchen Fehler in der Bestimmung von h und t auf die Polhöhe haben, differenzire man wieder die Gleichung für $\sin h$, wodurch man nach I. No. 8 erhält:

$$d\varphi = -\sec A\, dh - \cos\varphi\, \text{tang}\, A\,.\, dt.$$

Hier werden nun die Coefficienten am kleinsten, wenn $A = 0$ oder $= 180^0$ ist. Dann erreicht nämlich die Secante von A ihr Minimum ± 1. Die Fehler in der Höhe werden

also dann nicht weiter vergrößert auf die Polhöhe einwirken, und da dann die Tangente von A gleich Null wird, so werden Fehler in der Zeit gar keinen Einfluß auf die Bestimmung der Polhöhe haben. Um daher die Polhöhe durch Höhenbeobachtungen möglichst sicher zu finden, wird es immer erforderlich sein, dieselben im Meridian oder demselben so nahe als möglich zu nehmen.

Da für das angeführte Beispiel $A = -16^0 40'.1$ ist, so erhält man:

$$d\varphi = -1.044\,dh + 0.2616\,dt,$$

oder, wenn man dt in Zeitsecunden ausdrückt:

$$d\varphi = -1.044\,dh + 3.924\,dt.$$

Sind mehrere Höhen beobachtet, so erhält man nach No. 5 die zu dem Mittel der Zeiten gehörige Höhe durch die Formel:

$$H = \frac{h + h' + h'' + \ldots}{n} + \frac{\cos\delta\cos\varphi}{\cos H}\cos A\cos p\,\frac{\Sigma\, 2\sin\frac{1}{2}(\tau - T)^2}{n}.$$

7. Hat man die Beobachtung der Höhe sehr nahe am Meridian angestellt, wie es zur Bestimmung der Polhöhe zweckmäßig ist, so gelangt man auf einem anderen Wege bequemer zum Ziele als durch die Auflösung des Dreiecks. Da nämlich die Höhen der Sterne im Meridiane ein Maximum erreichen, dieselben sich also in der Nähe desselben nur langsam ändern, so hat man, um aus einer nahe am Meridian beobachteten Höhe die Meridianhöhe zu erhalten, nur eine kleine Correction hinzuzufügen, die man mit Logarithmen von wenig Decimalen scharf berechnen kann. Aus der Meridianhöhe und der Declination des Sterns findet man aber sogleich die Polhöhe.

Diese Methode, die Polhöhe zu bestimmen, nennt man die der Circummeridianhöhen.

Aus

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t,$$

folgt nämlich:

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

und hieraus nach der Formel (19) in No. 11 der Einleitung:

$$z = \varphi - \delta + \frac{2\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}\sin\tfrac{1}{2}t^2 - \frac{2\cos\varphi^2\cos\delta^2}{\sin(\varphi - \delta)^2}\operatorname{cotang}(\varphi - \delta)\sin\tfrac{1}{2}t^4$$

oder wenn man $\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}$ mit b bezeichnet:

$$\varphi = z + \delta - b\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}t^2 + b^2\,.\operatorname{cotang}(\varphi - \delta)\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}t^4. \qquad (A)$$

Berechnet man also $\varphi - \delta$ und b mit einem genäherten Werthe von φ und hat man Tafeln, die aufser der Gröfse $2 \sin \frac{1}{2} t^2$ auch die Werthe von $2 \sin \frac{1}{2} t^4$ mit dem Argumente t geben, so wird die Berechnung der Polhöhe sehr einfach. Solche Tafeln findet man ebenfalls in Warnstorff's Hülfstafeln, wo zu gröfserer Bequemlichkeit auch gleich die Logarithmen dieser Gröfsen gegeben sind. Weicht der gefundene Werth von φ stark von dem angenommenen Werthe ab, so mufs man die Rechnung mit dem neuen Werthe wiederholen, was indessen fast immer nur für das erste Glied nöthig sein wird. Sterne, die in der Nähe des Zeniths culminiren, mufs man bei dieser Methode vermeiden, weil für solche Sterne die Correction wegen des kleinen Divisors $\varphi - \delta$ sehr vergröfsert wird, also ein Fehler in der Zeit grofsen Einflufs haben kann.

Westphal hat zu Cairo am 3. October 1822 um $0^h 2^m 2^s.7$ mittlere Zeit die Zenithdistanz des Mittelpunkts der Sonne beobachtet gleich $34^0\, 1'\, 34''.2$. Die Declination der Sonne war gleich $-3^0\, 48'\, 51''.2$, die Zeitgleichung $-10^m\, 48^s.6$, also der Stundenwinkel der Sonne gleich $+12^m\, 51^s.3$. Damit erhält man aus den Tafeln

$$\log 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 = 2.51105 \qquad \log 2 \sin \tfrac{1}{2} t^4 = 9.4060.$$

Nimmt man ferner $\varphi = 30^0\, 4'$, so wird $\log b = 0.19006$ und damit das erste Glied der Correction gleich $-8'22''.47$, das zweite gleich $+0''.91$, mithin die ganze Correction:

$$\begin{aligned} & - 8'\, 21''.56 \\ z + \delta = {} & 30^0\, 12'\, 43''.00 \\ \varphi = {} & 30^0\, 4'\, 21''.44. \end{aligned}$$

Eine Aenderung von $+1'$ im angenommenen Werthe von φ giebt in diesem Falle erst eine Aenderung von $+0''.30$ in der berechneten Polhöhe, sodafs der wahre Werth, den man durch Wiederholung der Rechnung erhält, wird:

$$\varphi = 30^0\, 4'\, 21''.54.$$

Die Formel (A) gilt, wenn der Stern auf der Südseite des Zeniths culminirt. Ist aber die Declination des Sterns gröfser als die Polhöhe, sodafs der Stern zwischen Zenith und Pol culminirt, so ist in diesem Falle $\delta - \varphi$ statt $\varphi - \delta$ zu nehmen, und man erhält:

$$\varphi = \delta - z + \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\delta - \varphi)}\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 - \frac{\cos \varphi^2 \cos \delta^2}{\sin(\delta - \varphi)^2} \operatorname{cotang}(\delta - \varphi)\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^4.$$

Ist endlich der Stern in der Nähe der unteren Culmination, so hat man, wenn man t von dieser Culmination ab rechnet:

$$\cos z = \cos(180^0 - \varphi - \delta) + 2\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

und daraus:

$$\varphi = 180^0 - \delta - z - \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi+\delta)}\,2\sin\tfrac{1}{2}t^2 + \frac{\cos\varphi^2\cos\delta^2}{\sin(\varphi+\delta)^2}\,\text{cotang}(\varphi+\delta)\,2\sin\tfrac{1}{2}t^4.$$

Wenn man auf diese Weise die Polhöhe eines Ortes bestimmen will, so wird man sich in der Regel nicht damit begnügen, nur eine Zenithdistanz in der Nähe des Meridians zu beobachten, sondern man wird eine Anzahl nach einander beobachten, um im Mittel aus den einzelnen Beobachtungen ein genaueres Resultat zu erzielen. Man sucht dann für jeden einzelnen Werth von t die Gröſsen $2\sin\frac{1}{2}t^2$ und $2\sin\frac{1}{2}t^4$, nimmt aus allen die Mittel und multiplicirt diese mit den constanten Factoren. Die so gefundene Correction legt man dann zu dem Mittel der beobachteten Zenithdistanzen, um die Meridianzenithdistanz zu erhalten *).

Man kann die Reduction auf den Meridian noch auf eine andere Art machen.

Aus der Gleichung:

$$\cos z - \cos(\varphi - \delta) = -2\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

folgt:

$$\sin\frac{\varphi - \delta + z}{2}\sin\frac{\varphi - \delta - z}{2} = -\cos\varphi\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}t^2.$$

Setzt man also die Reduction auf den Meridian:

$$\varphi - \delta - z = -x,$$

so wird:

$$\frac{\varphi - \delta + z}{2} = \varphi - \delta + \tfrac{1}{2}x;$$

mithin:

$$\sin\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta + \frac{1}{2}x)}\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

eine Gleichung, die sich so schreiben läſst:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\,.\,x = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}\,2\sin\tfrac{1}{2}t^2\,\frac{\sin(\varphi - \delta}{\sin(\varphi - \delta + \frac{1}{2}x)}.$$

*) Bei der Sonne ist noch auf die Aenderung der Declination Rücksicht zu nehmen, wovon in der folgenden Nummer die Rede sein wird.

In No. 10 der Einleitung war aber gezeigt, dafs $\frac{\sin a}{a}$ bis auf die dritte Potenz genau gleich $\sqrt[3]{\cos a}$ ist. Wendet man dies hierauf an und nimmt als einen ersten Näherungswerth von x den Werth ξ aus der Gleichung:

$$\xi = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\, 2\sin\tfrac{1}{2}t^2 \qquad (B),$$

so erhält man:

$$x\sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}x} = \xi\,\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta+\frac{1}{2}x)},$$

oder wenn man die Gleichung nach x auflöst, rechts überall ξ statt x schreibt und den neuen Näherungswerth mit ξ' bezeichnet:

$$\xi' = \xi\,\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta+\frac{1}{2}\xi)}\sec\tfrac{1}{2}\xi^{\frac{1}{3}}.$$

Diese zweite Näherung ist in den meisten bei Circummeridianhöhen vorkommenden Fällen schon hinreichend genau. Ist dies aber noch nicht der Fall, so berechnet man mit ξ' einen Werth von φ, damit ξ aus (B), und erhält dann den verbesserten Werth:

$$\xi'' = \xi\,\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi-\delta+\frac{1}{2}\xi')}\sec\tfrac{1}{2}\xi'^{\frac{1}{3}}.$$

Für das vorher gegebene Beispiel wird:

$$\xi = 8'\,22''.47$$

und damit wird:

$$\begin{aligned}\log\xi &= 2.70111\\ \sin(\varphi-\delta) &= 9.74620\\ \operatorname{cosec}(\varphi-\delta+\tfrac{1}{2}\xi) &= 0.25293\\ \hline \log\xi' &= 2.70024,\end{aligned}$$

mithin $\xi' = 8'\,22''.47$ und $\varphi = 30^0\,4'\,21''.53$,

8. Nimmt man Circummeridianhöhen der Sonne, so ist hier noch der Umstand zu berücksichtigen, dafs diese ihre Declination ändert, dafs also die Rechnung für jeden Stundenwinkel mit einer andern Declination geführt werden mufs. Um nun in diesem Falle die Rechnung bequemer auszuführen, verfährt man auf folgende Weise.

Es war:

$$\varphi = z + \delta - \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\, 2\sin\tfrac{1}{2}t^2.$$

Ist nun D die Declination der Sonne, welche im Mittage statt findet, so kann man die zu jedem Stundenwinkel t gehörige Declination ausdrücken durch $D+\beta t$, wo β die

stündliche Aenderung der Declination bezeichnet und t in Stunden ausgedrückt ist. Dann hat man also:

$$\varphi = z + D + \beta t - \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} 2\sin\tfrac{1}{2}t^2. \qquad (a)$$

Setzt man nun:

$$\beta t - \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} 2\sin\tfrac{1}{2}t^2 = -\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} 2\sin\tfrac{1}{2}(t+y)^2, \qquad (b)$$

so hat man zur Bestimmung von y die Gleichung:

$$2\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}[\sin\tfrac{1}{2}(t+y)^2 - \sin\tfrac{1}{2}t^2] = -\beta t$$

oder da:

$$\sin a^2 - \sin b^2 = \sin(a+b)\sin(a-b)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}y = -\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}\,\frac{t}{\sin(t+\frac{1}{2}y)}$$

also:

$$y = -\beta\cdot\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}\cdot\frac{206265}{3600\times 15},$$

wo der Zahlenfactor der rechten Seite daher kommt, daſs $\sin(t+\frac{1}{2}y) = t$ gesetzt ist, t aber zur Einheit die Stunde hat, während bei $\sin t$ der Radius als Einheit zum Grunde lag. Nennt man nun die 48 stündige Aenderung der Declination der Sonne in Bogensecunden μ, so wird $\beta = \frac{\mu}{48}$, oder, wenn man y in Zeitsecunden haben will, $\beta = \frac{\mu}{720}$. Damit erhält man dann:

$$y = -\frac{\mu}{188.5}[\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta] \qquad (A)$$

und nach den Gleichungen (a) und (b) die Polhöhe aus jeder einzelnen Beobachtung durch die Formel:

$$\varphi = z + D - \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)} 2\sin\tfrac{1}{2}(t+y)^2 \;{}^{*}). \qquad (B)$$

Die Gröſse y ist nichts Anderes als der Stundenwinkel der gröſsten Höhe, aber negativ genommen.

In I. No. 24 war nämlich hierfür der Ausdruck gefunden:

$$t = \frac{d\delta}{dt}[\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta]\frac{206265}{15}$$

wo $\frac{d\delta}{dt}$ die Aenderung der Declination in einer Zeitsecunde bedeutet und t in Zeitsecunden ausgedrückt ist. Da aber

---

*) Hierzu ist auch noch das zweite von $2\sin\frac{1}{2}t^4$ abhängige Glied zu addiren.

die Aenderung der Declination in einer Zeitsecunde gleich $\frac{\mu}{48} \cdot \frac{1}{3600}$ ist, so erhält man für den Stundenwinkel der gröfsten Höhe, in Zeitsecunden ausgedrückt:

$$t_0 = \frac{\mu}{720} [\text{tang}\, \varphi - \text{tang}\, \delta] \frac{206265}{3600 \times 15}$$

$$= \frac{\mu}{188.5} [\text{tang}\, \varphi - \text{tang}\, \delta],$$

also bis auf das Zeichen dieselbe Formel wie für y. Die Gröfse $t + y$ ist daher der Stundenwinkel des Sterns, welcher nicht von der Culmination sondern von der Zeit der gröfsten Höhe an gerechnet ist.

Wenn man daher Circummeridianhöhen eines Gestirns beobachtet hat, dessen Declination veränderlich ist, so hat man nicht nöthig, zur Reduction auf den Meridian die einem jeden Stundenwinkel entsprechende Declination anzuwenden, sondern kann für alle die Declination nehmen, welche bei der Culmination statt findet, mufs aber dann die Stundenwinkel nicht von der Zeit der Culmination, sondern von der Zeit der gröfsten Höhe ab rechnen. Dadurch ist dann die Berechnung ebenso bequem, wie im ersteren Falle, wo die Declination des beobachteten Gestirns als unveränderlich angenommen wurde.

Für die in No. 7 berechnete Beobachtung zu Cairo ist:

$$\log \mu = 3.4458_n \text{ und } D = -3^{\circ}\, 48'\, 38''.57.$$

Damit erhält man:

$$y = +9^s.6, \text{ also } t + y = 13^m\, 0^s.9$$

und hiermit das erste Glied der Reduction auf den Meridian:

$$= -8'\, 35''.00.$$

Wegen des zweiten von $\sin \frac{1}{2} t^4$ abhängigen Gliedes der Reduction hat man hierzu noch $+0''.91$ zu addiren, sodafs man erhält $\varphi = 30^{0}\, 4'\, 21''.54$.

Ist nur eine einzelne Höhe beobachtet, so ist es natürlich bequemer, die Declination der Sonne für die Zeit der Beobachtung zu interpoliren; sind indessen mehrere Höhen genommen, so bedient man sich mit mehr Vortheil der eben gegebenen Methode.

9. Da die Poldistanz des Polarsterns klein ist, so wird derselbe, in welchem Stundenwinkel er sich auch befinden mag, immer nur ein kleines Azimut haben, also für die Be-

stimmung der Polhöhe in jedem Augenblicke mit Vortheil angewandt werden können. Für diesen Fall wird aber die in No. 7 gegebene Methode zur Berechnung der Reduction auf den Meridian nicht mehr brauchbar sein, weil die dort gefundene Reihe nur für kleine Werthe des Stundenwinkels convergirt. Man muſs daher jetzt einen andern Weg verfolgen, und zwar wird es wegen der Kleinheit der Poldistanz zweckmäſsig sein, die an die beobachtete Höhe anzubringende Correction nach Potenzen dieser Gröſse zu entwickeln.

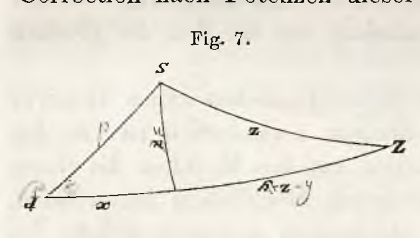


Fig. 7.

Fällt man (Fig. 7) von dem Orte des Sterns einen Bogen eines gröſsten Kreises senkrecht auf den Meridian und bezeichnet den Bogen des Meridians zwischen dem Pole und dem Fuſspunkt des Perpendikels mit x, den Bogen vom Zenith bis zum Fuſspunkte mit $z - y$, wo y eine kleine Gröſse ist, so wird:

$$90^0 - \varphi = z - y + x,$$
$$\text{oder} \quad \varphi = 90^0 - z + y - x,$$

und aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} p \cos t \\ \cos(z - y) = \dfrac{\cos z}{\cos u}\,.\end{array}\right\} \quad (a)$$

Aus der ersten Gleichung folgt sogleich:

$$x = \operatorname{tang} p \cos t - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} p^3 \cos t^3,$$

wenn man die fünften und höheren Potenzen von tang p vernachlässigt, oder mit Vernachlässigung von Gliedern derselben Ordnung:

$$x = p \cos t + \tfrac{1}{3} p^3 \cos t \sin t^2. \qquad (b)$$

Die zweite der Gleichungen (a) giebt entwickelt:

$$\sin y = \operatorname{cotang} z \, \frac{1 - \cos u}{\cos u} + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} y \,.\, \operatorname{cotang} z,$$

oder mit Vernachlässigung der fünften Potenzen von u:

$$\sin y = \operatorname{cotang} z \left(\tfrac{1}{2} u^2 + \tfrac{5}{24} u^4\right) + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} y \operatorname{cotang} z.$$

Man erhält aber aus der Gleichung:

$$\sin u = \sin p \sin t,$$
$$u = p \sin t - \tfrac{1}{6} p^3 \sin t \cos t,$$

mithin, wenn man diesen Werth in die obige Gleichung für

sin y substituirt, wieder bis auf die Glieder vierter Ordnung genau:

$$y = \frac{1}{2} p^2 \sin t^2 \operatorname{cotg} z - \frac{1}{24} p^1 \sin t^2 (4 \cos t^2 - 5 \sin t^2) \operatorname{cotg} z + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} z . y^2. \quad (c)$$

Diese Gleichung enthält zwar noch y auf der rechten Seite, aber wegen der Kleinheit des Gliedes $\frac{1}{2}$ cotang $z . y^2$ ist es genügend, den Werth von y aus dem ersten Gliede zu berechnen und darin zu substituiren. Man erhält mithin:

$$\begin{aligned} \varphi = 90^0 - z - p \cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \sin t^2 \operatorname{cotang} z - \tfrac{1}{3} p^3 \cos t \sin t^2 \\ + \tfrac{1}{24} p^4 \sin t^2 (5 \sin t^2 - 4 \cos t^2) \operatorname{cotang} z \\ + \tfrac{1}{8} p^4 \sin t^4 \operatorname{cotang} z^3. \quad (A) \end{aligned}$$

Da die Berechnung dieser Formel für jeden einzelnen Fall sehr unbequem sein würde, so hat man Tafeln construirt, welche diese Berechnung sehr erleichtern. Diese sind zweierlei Art.

Im Berliner Jahrbuch und im Nautical Almanac werden jährlich Tafeln gegeben für die gröſsten Glieder des obigen Ausdrucks, die immer hinreichen, wenn nicht die äuſserste Genauigkeit verlangt wird. Vernachlässigt man die Glieder, welche die dritte und vierte Potenz von p enthalten, so hat man einfach: *)

$$\varphi = 90^0 - z - p \cos t + \tfrac{1}{2} p^2 \sin t^2 \operatorname{cotang} z.$$

Bezeichnet man nun einen bestimmten Werth der Rectascension und Poldistanz mit α_0 und p_0, sodaſs die scheinbaren Werthe dieser Gröſsen für die Zeit der Beobachtung

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \qquad p = p_0 + \Delta p$$

sind, so wird, wenn man die Werthe substituirt:

$$\begin{aligned} \varphi = 90^0 - z - p_0 \cos t_0 + \tfrac{1}{2} p_0{}^2 \operatorname{cotang} z \sin t_0{}^2 \\ - \Delta p \cos t_0 - p \sin t_0 \, \Delta\alpha, \end{aligned}$$

wo $t_0 = \Theta - \alpha_0$ ist.

In den angeführten Jahrbüchern findet man nun drei Tafeln. Die erste giebt den Werth $-p_0 \cos t_0$ mit dem Argumente Θ, welches allein veränderlich ist. Die zweite Tafel giebt das Glied $\frac{1}{2} p_0{}^2$ cotang z sin $t_0{}^2$, und da dieser Ausdruck von z und Θ abhängt, so hat die Tafel diese beiden Argu-

*) Der Maximumwerth des in p^3 multiplicirten Gliedes, der für $t = 54^0\,44'$ stattfindet, ist für $p = 1^0\,40'$ nur $0''.65$ und die in p^4 multiplicirten sind noch bedeutend kleiner, wenn nicht z klein ist. Man könnte die Glieder aber auch leicht bei den Tafeln mitnehmen, indem das erstere sich mit $p \cos t$, die andern mit $\frac{1}{2} p^2 \sin t^2$ cotang z in eine Tafel bringen lassen.

mente. Die dritte Tafel giebt endlich das von Θ, $\Delta\alpha$ und Δp abhängige dritte Glied

$$-\Delta p \cos t_0 - p \sin t_0 \,\Delta\alpha,$$

und hat als Argumente die Sternzeit und die Tage des Jahres.

Die anderen, sämmtliche Glieder umfassenden Tafeln sind von Petersen in Warnstorff's Hülfstafeln pag. 73 u. ffg. gegeben und so eingerichtet, daſs sie für den Zeitraum, in welchem die Poldistanz des Polarsterns zwischen den Grenzen $1^0\,20'$ und $1^0\,40'$ liegt, gebraucht werden können. Petersen geht wieder von einem bestimmten Werthe von p, nämlich:

$$p_0 = 1^0\;30'$$

aus. Man kann dann die Formel (A) leicht so umschreiben:

$$\varphi = 90^0 - z - \frac{p}{p_0}\left[p_0 \cos t + \tfrac{1}{3} p_0{}^3 \cos t \sin t^2\right] - \tfrac{1}{3}\frac{p}{p_0}\left(\frac{p^2}{p_0{}^2} - 1\right) p_0{}^3 \cos t \sin t^2$$
$$+ \frac{p^2}{p_0{}^2} \operatorname{cotang} z \left[\tfrac{1}{2} p_0{}^2 \sin t^2 + \tfrac{1}{24} p_0{}^4 \sin t^2 (5 \sin t^2 - 4 \cos t^2)\right]$$
$$+ \tfrac{1}{8}\frac{p^4}{p_0{}^4} p_0{}^4 \sin t^4 \operatorname{cotang} z^3.$$

Führt man daher die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\frac{p}{p_0} = A$$
$$p_0 \cos t + \tfrac{1}{3} p_0{}^3 \cos t \sin t^2 = \alpha,$$
$$\tfrac{1}{3} A (A^2 - 1) p_0{}^3 \cos t \sin t^2 = \gamma,$$
$$\tfrac{1}{2} p_0{}^2 \sin t^2 + \tfrac{1}{24} p_0{}^4 \sin t^2 (5 \sin t^2 - 4 \cos t^2) = \beta,$$
$$\tfrac{1}{8} A^4 p_0{}^4 \sin t^4 \operatorname{cotang} z^3 = \tfrac{1}{2} A^4 \beta^2 . \operatorname{cotang} z^3 = \mu,$$

so wird:

$$\varphi = 90^0 - z - A\alpha - \gamma + A^2 \beta \operatorname{cotang} z + \mu.$$

Der Tafeln sind dann vier, von denen die erste und zweite mit dem Argumente t die Gröſse α und β, die dritte mit den Argumenten p und t die kleine Gröſse γ, und die vierte mit den Argumenten $A^2\beta \operatorname{cotg} z = y$ und $90^0 - z$ die ebenfalls kleine Gröſse μ giebt. Die Tafeln sind nur von $t = 0^h$ bis $t = 6^h$ berechnet. Ist daher $t > 90^0$, so muſs man den Stundenwinkel von der unteren Culmination rechnen und hat dann:

$$\varphi = 90^0 - z + A\alpha + \gamma + A^2 \beta \operatorname{cotang} z + \mu.$$

Beispiel. Am 12. October 1847 wurde auf der Sternwarte des verstorbenen Dr. Hülsmann zu Düsseldorf um $18^h\,22^m\,48^s.8$ Sternzeit die Höhe des Polarsterns mit einem kleinen Höhen- und Azimutalinstrument beobachtet und dafür nach Abzug der Refraction gefunden $50^0\,55'\,30''.8$.

Nach dem Berliner Jahrbuche hat man für diesen Tag den Ort des Polarsterns:

$$\alpha = 1^h\, 5^m\, 31^s.7, \qquad \delta = 88^0\, 29'\, 52''.4.$$

Es ist also:

$$p = 1^0\, 30'\, 7''.6, \quad t = 17^h\, 17^m\, 17^s.1 = 259^0\, 19'\, 16''.5,$$

mithin wird:

$$\log A = 0.0006108$$

und man erhält nach den Tafeln oder den obigen Formeln:

$$\alpha = 1000''.85, \; \beta = 68''.28, \; \gamma = 0''.00, \; \mu = 0''.02,$$

also:

$$\begin{aligned} A\alpha &= +16'\, 42''.26 \\ A^2\beta \operatorname{cotang} z &= +1\; 24\;.33 \\ \mu &= +\;0\;.02 \\ \hline \text{Summa} &= +18'\;\; 6''.61 \\ \text{mithin:}\quad \varphi &= 51^0\, 13'\, 37''.41. \end{aligned}$$

10. Gaufs hat ebenfalls eine Methode gegeben, um die Polhöhe aus dem Mittel mehrerer von der Culmination entfernten Zenithdistanzen eines Sterns zu finden, welche besonders für den Polarstern bequem ist.

Kennt man einen genäherten Werth φ_0 der Polhöhe φ und ist θ die Sternzeit, zu welcher man eine Zenithdistanz z_1 gemessen hat, so kann man aus θ und φ_0 eine Zenithdistanz ζ berechnen nach den Formeln:

$$\operatorname{tang} x = \cos t \operatorname{cotang} \delta$$

$$\cos \zeta = \frac{\sin \delta}{\cos x} \sin (\varphi_0 + x)$$

und erhält dann:

$$d\varphi \,.\, \frac{d\zeta}{d\varphi} = z_1 - \zeta,$$

also:

$$d\varphi = \frac{\zeta - z_1}{\frac{\sin \delta}{\cos x} \cdot \frac{\cos (\varphi_0 + x)}{\sin \zeta}};$$

x ist hier wieder der Bogen des Meridians, welcher zwischen dem Pole und dem Fufspunkte des von dem Sterne auf den Meridian gefällten Perpendikels enthalten ist, und da dieser Bogen immer zwischen den Grenzen $\pm 90 - \delta$ liegt, so kann man für den Polarstern sowohl $\frac{\sin \delta}{\cos x}$ als auch $\frac{\cos (\varphi + x)}{\sin \zeta}$ gleich Eins setzen, sobald nur die Polhöhe bis auf einige Secunden bekannt, also $d\varphi$ nur eine kleine Gröfse ist.

Hat man eine zweite Zenithdistanz zur Sternzeit θ' gemessen, so ist:

$$\operatorname{tang} x' = \cos t' \operatorname{tang} \delta$$

$$\cos \zeta' = \frac{\sin \delta}{\cos x'} \sin (\varphi_0 + x')$$

und:

$$d\varphi = \frac{z_1' - \zeta'}{\frac{d\zeta'}{d\varphi}},$$

oder, wenn Z das arithmetische Mittel der beiden gemessenen Zenithdistanzen gleich $\frac{1}{2}(z_1 + z_1')$ bedeutet:

$$d\varphi = \frac{Z - \frac{1}{2}(\zeta' + \zeta)}{\frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{d\varphi} + \frac{d\zeta'}{d\varphi}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\zeta' + \zeta) - Z}{\frac{1}{2}(A + B)}, \qquad (a)$$

wo:

$$A = \frac{\sin \delta}{\cos x} \cdot \frac{\cos (\varphi_0 + x)}{\sin \zeta}$$

$$B = \frac{\sin \delta}{\cos x'} \cdot \frac{\cos (\varphi_0 + x')}{\sin \zeta'}, \qquad (b)$$

oder auch:

$$A = \operatorname{cotang} \zeta \,.\, \operatorname{cotang} (\varphi_0 + x)$$
$$B = \operatorname{cotang} \zeta' \,.\, \operatorname{cotang} (\varphi_0 + x'), \qquad (c)$$

oder endlich, wenn man $\frac{d\zeta}{d\varphi}$ aus der urspünglichen Gleichung:

$$\cos \zeta = \sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \cos t$$

sucht:

$$\frac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \varphi \sin \delta}{\sin Z} - \frac{\sin \varphi \cos \delta}{\sin Z} \cos \frac{1}{2}(t' + t). \qquad (d)$$

Für den Polarstern erhält man einfach:

$$d\varphi = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta') - Z. \qquad (e)$$

Hätte man nun mehrere Zenithdistanzen beobachtet, so müfste man eigentlich für jede einzelne Sternzeit die Zenithdistanz ζ berechnen, und erhielte dann:

$$d\varphi = -\frac{\frac{1}{n}[\zeta + \zeta' + \zeta'' + \ldots + \zeta_{n-1}] - Z}{\frac{1}{n}\left(\frac{d\varphi}{d\zeta} + \frac{d\varphi}{d\zeta'} + \ldots\ldots\ldots\right)}, \qquad (f)$$

wo Z wieder das arithmetische Mittel aus allen gemessenen Zenithdistanzen bezeichnet. Statt dessen verfährt man aber auf folgende Weise:

Bezeichnet man mit Θ_0 das arithmetische Mittel aus allen Sternzeiten und setzt:

$$\theta - \Theta_0 = \tau, \quad \theta' - \Theta_0 = \tau' \text{ etc.}$$

so erhält man, wenn ζ_0 die zu der Sternzeit Θ_0 gehörige Zenithdistanz bedeutet, wie in No. 5 dieses Abschnitts:

$$\frac{\zeta + \zeta' + \zeta'' + \ldots}{n} = \zeta_0 + \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} \cdot \frac{\Sigma\, 2 \sin \frac{1}{2} (\theta - \Theta_0)^2}{n}.$$

Bezeichnet nun T einen Winkel, sodaſs:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} T^2 = \frac{\Sigma\, 2 \sin \frac{1}{2} (\theta - \Theta_0)^2}{n},$$

so sind die zu der Sternzeit $\Theta_0 - T$ und $\Theta_0 + T$ gehörigen Zenithdistanzen z und z':

$$z = \zeta_0 - \frac{d\zeta_0}{dt} T + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} T^2$$

$$z' = \zeta_0 + \frac{d\zeta_0}{dt} T + \tfrac{1}{2} \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} T^2$$

oder:

$$\frac{z + z'}{2} = \zeta_0 + \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2}\, 2 \sin \tfrac{1}{2} T^2 = \frac{\zeta + \zeta' + \zeta'' + \ldots}{n},$$

und man erhält dann nach Formel (f) einfach:

$$d\varphi = \frac{\frac{1}{2}(z' + z) - Z}{\frac{1}{2}(A' + B')},$$

wenn man die zu z und z' gehörigen Werthe von A und B mit A' und B' bezeichnet.

Hat man also mehrere Zenithdistanzen eines Sterns gemessen, so nimmt man das Mittel der beobachteten Uhrzeiten und zieht ohne Rücksicht auf das Zeichen jede einzelne Uhrzeit davon ab. Diese Unterschiede in Sternzeit verwandelt geben die Gröſsen τ, für welche man aus den Tafeln die einzelnen Gröſsen $2 \sin \frac{1}{2} \tau^2$ nimmt. Dann sucht man aus denselben Tafeln das zum arithmetischen Mittel aller dieser Gröſsen gehörige Argument T, berechnet die Stundenwinkel:

$$\Theta_0 - (\alpha + T) = t$$

$$\Theta_0 - (\alpha - T) = t'$$

und dann z und z' nach den Formeln:

$$\operatorname{tang} x = \cos t \operatorname{cotang} \delta$$

$$\cos z = \frac{\sin \delta}{\cos x} \sin (\varphi_0 + x)$$

und:

$$\operatorname{tang} x' = \cos t' \operatorname{cotang} \delta$$

$$\cos z' = \frac{\sin \delta}{\cos x'} \sin (\varphi_0 + x').$$

Hat man dann den Polarstern beobachtet, so ist unmittelbar:

$$d\varphi = \tfrac{1}{2}(z + z') - Z,$$

wo Z das arithmetische Mittel aus allen gemessenen Zenithdistanzen ist. Für andre Sterne hat man aber die vollständige Formel für $d\varphi$ zu berechnen, nämlich:

$$d\varphi = \frac{\tfrac{1}{2}(z + z') - Z}{\tfrac{1}{2}(A + B)},$$

wo die Gröfsen A und B durch die Formeln (b), (c) oder (d) gefunden werden, wenn man darin $\zeta = z$ und $\zeta' = z'$ nimmt *).

Beispiel. Am 12. October 1847 wurden auf der Sternwarte des Herrn Dr. Hülsmann folgende zehn Zenithdistanzen des Polarsterns beobachtet:

Sternzeit.	Zenithdistanz.	τ	$2 \sin \frac{1}{2}\tau^2$
$17^h 56^m 21^s.4$	$39^\circ 13' 42''.1$	$13^m 19^s.75$	348.75
59 54.5	12 17.6	9 46.65	187.69
18 3 29.7	11 6.8	6 11.45	75.24
6 2.9	10 3.6	3 38.25	25.98
8 35.0	9 0.6	1 6.15	2.39
11 5.1	8 2.8	1 23.95	3.85
13 32.0	7 7.6	3 50.85	29.06
16 34.0	6 4.8	6 52.85	92.95
18 28.1	5 15.3	8 46.95	151.43
22 48.8	3 42.7	13 7.65	338.28
$\Theta_0 = 18^h 9^m 41^s.15$	$39^\circ 8' 38''.39$		125.56
	Refr. $46''.50$		$T = 7^m 59^s.83$
	$Z = 39^\circ 9' 24''.89$		

$$\Theta_0 - (\alpha + T) = 16^h 56^m 9^s.62 \quad \Theta_0 - (\alpha - T) = 17^h 12^m 9^s.28$$
$$= 254^\circ 2' 24''.3 \qquad\qquad = 258^\circ 2' 19''.2.$$

Nimmt man nun:

$$\varphi_0 = 51^\circ 13' 30''.0,$$

so erhält man:

$$z = 39^\circ 12' 37''.56 \qquad z' = 39^\circ 6' 34''.54$$
$$\tfrac{1}{2}(z + z') = 39^\circ 9' 36''.05$$
$$\tfrac{1}{2}(z + z') - Z = \quad + 11''.16,$$

mithin:

$$\varphi = 51^\circ 13' 41''.16.$$

*) Warnstorff's Hülfstafeln pag. 127.

III. Bestimmung der Zeit und der Polhöhe durch die Combination mehrerer Höhen.

11. Nimmt man zwei Höhen von Sternen, so hat man zwei Gleichungen:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$
$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos t'.$$

In diesen Gleichungen ist δ und δ' bekannt, da die Oerter der Sterne als bekannt angenommen werden, ferner ist:

$$t' = t + (t' - t) = t + (\Theta' - \Theta) - (\alpha' - \alpha).$$

Da nun $\alpha' - \alpha$ und $\Theta' - \Theta$, die Zwischenzeit der Beobachtungen, ebenfalls bekannt sind, so enthalten die beiden Gleichungen die beiden Unbekannten Θ und φ, die man durch Auflösung derselben bestimmen kann. Durch die Beobachtung zweier Sternhöhen kann man also immer Zeit und Polhöhe zugleich finden; die Verbindung zweier Höhenbeobachtungen giebt aber auch in besonderen Fällen sehr bequeme Methoden, die Polhöhe oder die Zeit allein zu bestimmen.

Es ist schon früher gezeigt worden, daſs wenn die beiden Höhen einem Sterne angehören und im Meridian zur Zeit der oberen und unteren Culmination genommen sind, das arithmetische Mittel aus beiden Höhen gleich der Polhöhe des Beobachtungsortes ist, die also dann unabhängig von der Declination des Sterns gefunden wird. Diese ist gleich dem Complement der halben Differenz der beobachteten Höhen.

Ebenso erhält man die Polhöhe durch bloſse Unterschiede der Zenithdistanzen zweier Sterne, von denen der eine im südlichen, der andre im nördlichen Quadranten des Meridians culminirt. Ist nämlich δ die Abweichung des gegen Süden culminirenden Sterns, so ist seine Meridianzenithdistanz:

$$z = \varphi - \delta.$$

Ist dagegen δ' die Declination des gegen Norden culminirenden Sterns, so ist dessen Zenithdistanz:

$$z' = \delta' - \varphi,$$

und man erhält daher:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(z - z').$$

12. Nimmt man an, dafs zwei Höhen eines und desselben Sternes beobachtet sind und aufserdem, dafs beide Höhen einander gleich sind, so hat man:

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t, \\ \sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t', \end{aligned} \qquad (a)$$

woraus $t = -t'$ folgt. Die Höhen sind dann also auf beiden Seiten des Meridians in gleichen Stundenwinkeln genommen. Ist nun u die Uhrzeit der ersteren Höhe, u' die der zweiten, so wird $\frac{1}{2}(u' + u)$ die Zeit sein, zu welcher der Stern im Meridiane war, und da diese gleich der bekannten Rectascension α des Sterns sein mufs, so erhält man daraus den Stand der Uhr gleich:

$$\alpha - \tfrac{1}{2}(u' + u).$$

Diese Methode der correspondirenden Höhen ist die sicherste, um die Zeit durch Höhenbeobachtungen zu bestimmen, und da man weder die Polhöhe des Beobachtungsortes noch die Declination des Gestirns, also auch nicht den Meridianunterschied von dem Orte, für welchen die Ephemeride gilt, zu kennen braucht, so eignet sich dieselbe besonders zur Zeitbestimmung an solchen Orten, deren geographische Lage nicht genau bekannt ist. Man hat ebenso wenig nöthig, die Höhe selbst zu kennen, sodafs man also durch diese Methode selbst mit schlechten Instrumenten, welche absolute Höhen mit Genauigkeit nicht messen lassen, scharfe Resultate erhalten kann. Das Einzige, welches diese Methode erfordert ist eine gute Uhr, auf deren gleichförmigen Gang in der Zwischenzeit man sich verlassen kann und dann ein Höheninstrument, welches aber nicht einmal eine genaue Theilung zu haben braucht.

Hierbei ist aber vorausgesetzt, dafs das Gestirn seine Declination in der Zwischenzeit der Beobachtungen nicht ändert. Nimmt man nun aber Höhen der Sonne, deren Declination sich im Laufe mehrerer Stunden sehr merklich ändert, so wird das arithmetische Mittel aus den beiden Beobachtungszeiten nicht mehr die Zeit geben, zu welcher die Sonne im Meridiane war, sondern wenn ihre Declination zunimmt, (d. h. wenn sie sich dem Nordpole nähert) so wird zu derselben Höhe Nachmittags ein gröfserer Stundenwinkel gehören als Vormittags, also wird das Mittel der Zeiten nach

Mittag fallen. Umgekehrt wird das Mittel der Zeiten vor Mittag fallen, wenn die Sonne sich dem Südpole nähert oder ihre Declination abnimmt. Man mufs daher in diesem Falle zu dem Mittel der Zeiten noch eine Correction hinzufügen, welche von der Aenderung der Declination abhängt. Diese Correction heifst die Mittagsverbesserung.

Ist δ die Declination der Sonne im Mittage und $\Delta\delta$ die Aenderung der Declination vom Mittage bis zu der Zeit, wo jede Höhe genommen wurde, so hat man die beiden Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta - \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta - \Delta\delta)\cos t$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta + \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta + \Delta\delta)\cos t'.$$

Die Uhrzeit der Beobachtung am Vormittage sei wieder u, die andre u', so ist $\frac{1}{2}(u' + u) = U$ die Zeit, zu welcher die Sonne im Meridiane gewesen wäre, wenn die Declination derselben sich nicht geändert hätte. Diese Zeit U nennt man den unverbesserten Mittag.

Bezeichnet man dann die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen $\frac{1}{2}(u' - u)$ durch τ, die Mittagsverbesserung durch x, so wird der Augenblick des wahren Mittags $U + x$ und:

$$t = \tfrac{1}{2}(u' - u) + x = \tau + x,$$
$$t' = \tfrac{1}{2}(u' - u) - x = \tau - x,$$

es wird also auch:

$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta - \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta - \Delta\delta)\cos(\tau + x)$$

und:

$$\sin h = \sin\varphi \sin(\delta + \Delta\delta) + \cos\varphi \cos(\delta + \Delta\delta)\cos(\tau - x).$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke von $\sin h$ einander gleich, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$0 = \sin\varphi\cos\delta\sin\Delta\delta - \cos\varphi\sin\delta\sin\Delta\delta\cos\tau\cos x + \cos\varphi\cos\Delta\delta\cos\delta\sin\tau\sin x.$$

Bei der Sonne ist nun x immer eine so kleine Gröfse, dafs es erlaubt ist, den Cosinus gleich Eins zu setzen und den Sinus mit dem Bogen zu vertauschen. Dadurch wird, wenn man auch $\Delta\delta$ statt $\operatorname{tang}\Delta\delta$ setzt:

$$x = -\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sin\tau} - \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\tau}\right)\Delta\delta^{*}).$$

---

*) Man hätte dies auch einfach erhalten, wenn man die ursprüngliche Gleichung für $\sin h$ so differenzirt hätte, dafs t und δ als veränderlich genommen werden, da $x = -\frac{dt}{d\delta}\Delta\delta$.

Bezeichnet man nun mit μ die Aenderung der Declination der Sonne in 48 Stunden, so wird, da man diese Aenderung hier als der Zeit proportional betrachten kann:

$$\Delta\delta = \frac{\mu}{48}\tau\text{*)}.$$

also:

$$x = \frac{\mu}{48}\left(-\frac{\tau}{\sin\tau}\operatorname{tang}\varphi + \frac{\tau}{\operatorname{tang}\tau}\operatorname{tang}\delta\right)$$

oder, wenn man x in Zeitsecunden finden will:

$$x = \frac{\mu}{720}\left(-\frac{\tau}{\sin\tau}\operatorname{tang}\varphi + \frac{\tau}{\operatorname{tang}\tau}\operatorname{tang}\delta\right).$$

Zur leichteren Berechnung dieses Ausdrucks hat man nun Tafeln, die zuerst von Gaufs in der monatlichen Correspondenz Band XXIII gegeben sind, und die man auch in Warnstorffs Hülfstafeln findet. Diese Tafeln geben mit dem Argumente τ oder der halben Zwischenzeit der Beobachtungen die Gröfsen:

$$\frac{1}{720}\cdot\frac{\tau}{\sin\tau} = A$$

und:

$$\frac{1}{720}\cdot\frac{\tau}{\operatorname{tang}\tau} = B$$

und die Formel für die Mittagsverbesserung wird dann ganz einfach:

$$x = -A\mu\operatorname{tang}\varphi + B\mu\operatorname{tang}\delta. \qquad (A)$$

Differenzirt man die beiden Formeln (a), indem man δ als constant ansieht, so erhält man:

$$dh = -\cos A\,d\varphi - \cos\varphi\sin A\,dt$$
$$dh' = -\cos A'\,d\varphi - \cos\varphi\sin A'\,dt.$$

Hier ist in beiden Gleichungen dt als gleich angenommen, weil man den Fehler, welchen man in der Zeitbestimmung begangen hat, immer auf den Fehler in der Beobachtung der Höhe übertragen kann. Da nun auch das Azimut in beiden Beobachtungen gleich grofs, aber entgegengesetzt im Zeichen ist, sodafs $A = -A'$, so hat man:

$$dh = -\cos A'\,d\varphi + \cos\varphi\sin A'\,dt,$$
$$dh' = -\cos A'\,d\varphi - \cos\varphi\sin A'\,dt,$$

---

*) Da man die Aenderung der Declination für den Augenblick des Mittags braucht, so müfste man das Mittel der Aenderung vom vorigen und der Aenderung bis zum folgenden Mittage nehmen. Statt dessen ist aber in den Ephemeriden die Gröfse μ aufgeführt.

also:

$$dt = \frac{\frac{1}{2}(dh - dh')}{\cos\varphi \sin A'}.$$

Man sieht also daraus, daſs man auch zur Bestimmung der Zeit aus correspondirenden Höhen Sterne wählen muſs, deren Azimut nahe $\pm 90^0$ ist.

1822 October 8. wurden von Westphal zu Cairo die folgenden correspondirenden Sonnenhöhen genommen*):

Doppelte Höhe der ☉ (Unterer Rand)	Uhrzeit. Vormittags	Uhrzeit. Nachmittags	Mittel
73° 0′	21h 7m 27s	2h 33m 59s	23h 50m 43s.0
20	8 24	33 3	43 .5
40	9 23	32 5	44 .0
74 0	10 18	31 9	43 .5
20	11 16	30 12	44 .0
40	12 11	29 14	42 .5
75 0	13 11	28 13	42 .0
20	14 9	27 15	42 .0
40	15 10	26 15	42 .5
76 0	16 6	25 20	43 .0

Daraus ergiebt sich für den unverbesserten Mittag im Mittel:

$$23^h\, 50^m\, 43^s.00.$$

Nun ist die halbe Zwischenzeit zwischen den ersten Beobachtungen $2^h\, 43^m\, 16^s$, zwischen den letzten $2^h\, 34^m\, 37^s$, also im Mittel:

$$\tau = 2^h\, 38^m\, 56^s.5 = 2^h.649.$$

Berechnet man damit die Gröſsen A und B, so erhält man:

$\log\tau$	0.42308		0.42308
$\operatorname{cosec}\tau$	0.19435	$\operatorname{cotang}\tau$	0.08028
Compl. log 720	7.14267		7.14267
$\log A$	7.7601	$\log B$	7.6460,

und da:

$$\delta = -6^0\, 7',\ \varphi = 30^0\, 4'$$

und:

$$\log\mu = 3.4391_n,$$

so wird:

$$x = +10^s.46.$$

*) Diese Beobachtungen werden immer so angestellt, daſs man das Höheninstrument Vor- und Nachmittags auf eine runde Zahl einstellt und dann die Zeit beobachtet, wann derselbe Sonnenrand diese Höhe erreicht.

Die Sonne war daher im Meridiane oder es war 0^h wahre Zeit, als die Uhr zeigte $23^h 50^m 53^s.46$. Da nun die Zeitgleichung $-12^m 33^s.18$ war, so ging die Sonne an dem Tage um $23^h 47^m 26^s.82$ mittlere Zeit durch den Meridian und es war daher der Stand der Uhr gegen mittlere Zeit:

$$-3^m 26^s.64.$$

Berechnet man noch die Differentialgleichung, so erhält man, wenn man dt in Zeitsecunden ausdrückt:

$$dt = -0^s.048\,(dh' - dh),$$

woraus man sieht, daſs man bei nur zwei Höhen einen Fehler von $0^s.48$ in der Zeitbestimmung begeht, wenn man die eine Höhe um $10''$ gröſser oder kleiner beobachtet als die andre.

Diese Differentialformel kann man auch brauchen, um die kleine Correction zu berechnen, welche man zu dem Mittel der Zeiten hinzuzulegen hat, um die Zeit der Culmination zu erhalten, wenn man Vor- und Nachmittags nicht correspondirende, sondern nur nahe gleiche Höhen genommen hat. Ist dann nämlich h die Vormittags und h' die Nachmittags gemessene Höhe und $h' - h = dh'$, so sollte man an h' die Correction $-dh'$ anbringen, also an U die Correction:

$$dU = +\frac{dh'}{30 \cos\varphi \sin A'}$$

$$= +\frac{dh' \cos h'}{30 \cos\varphi \cos\delta \sin t'}.$$

Will man die äuſserste Genauigkeit erreichen, so wird man eine solche Correction sogar dann nöthig haben, wenn man gleiche Höhen beobachtet hat. Wiewohl nämlich für gleiche scheinbare Höhen die mittlere Refraction gleich ist, so wird dies doch nicht mit der wahren Refraction der Fall sein, wenn nicht zufällig der Stand der meteorologischen Instrumente Vor- und Nachmittags derselbe war. Ist nun aber die Refraction des Vormittags ϱ, Nachmittags $\varrho + d\varrho$, so hat man das Gestirn Nachmittags in einer wahren Höhe beobachtet, die um $d\varrho$ kleiner ist, als die am Vormittage gemessenen und hat daher dem Mittel der Zeiten die Correction hinzuzufügen:

$$dU = -\frac{d\varrho \cos h}{30 \cos\varphi \cos\delta \sin t}.$$

13. Häufig hindert die Witterung, des Vor- und Nachmittags correspondirende Sonnenhöhen zu nehmen. Man kann aber auch, wenn man Nachmittags und am folgenden Tage Vormittags correspondirende Höhen nimmt, daraus die Zeit der Mitternacht suchen. Die von der Aenderung der Declination abhängige Gröſse, die man in diesem Falle zu dem Mittel der Uhrzeiten oder der unverbesserten Mitternacht hinzuzulegen hat, um die wahre Mitternacht zu erhalten, nennt man die Mitternachtsverbesserung.

Ist T die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen so werden die Stundenwinkel:

$$\tau = 12^h - T$$

und:

$$-\tau = -12^h + T.$$

Der Fall ist dann ganz derselbe wie vorher, nur hat diesmal die Sonne in dem Stundenwinkel $-\tau$, wenn $\Delta\delta$ positiv ist, die gröſsere Declination, sodaſs man für die Mitternachtsverbesserung μ mit umgekehrten Zeichen anwenden muſs. Es wird daher jetzt:

$$x = \frac{\mu}{720}\left(\frac{T}{\sin\tau}\operatorname{tang}\varphi - \frac{T}{\operatorname{tang}\tau}\operatorname{tang}\delta\right)$$

$$= \frac{\mu}{720}\left(\frac{12^h - \tau}{\sin\tau}\operatorname{tang}\varphi - \frac{12^h - \tau}{\operatorname{tang}\tau}\operatorname{tang}\delta\right).$$

Schreibt man dafür:

$$x = \frac{\mu}{720}\cdot\frac{12^h - \tau}{\tau}\left(\frac{\tau}{\sin\tau}\operatorname{tang}\varphi - \frac{\tau}{\operatorname{tang}\tau}\operatorname{tang}\delta\right),$$

so kann man die Tafeln für die Mittagsverbesserung auch für die Berechnung der Mitternachtsverbesserung anwenden. Die Gröſse $\frac{12^h - \tau}{\tau}$ kann man dann auch noch mit dem Argumente T oder der halben Zwischenzeit in Tafeln bringen. In Warnstorffs Hülfstafeln ist diese Gröſse mit f bezeichnet, sodaſs dann also die Mitternachtsverbesserung wird:

$$x = f\mu\,[A\operatorname{tang}\varphi - B\operatorname{tang}\delta].$$

v. Zach hat am 17. und 18. September 1810 zu Marseille correspondirende Sonnenhöhen genommen. Die halbe Zwischenzeit T war:

$$10^h\,55^m,\quad \delta = +2^\circ\,14'\,16'',\quad \varphi = 43^\circ\,17'\,50''$$

und:

$$\log\mu = 3.4453_n.$$

Damit erhält man:

$$\log A = 7.7305 \quad \log B = 7.7128,$$
$$\log f = 1.0033,$$
$$\mu f A \operatorname{tang} \varphi = -142^s.33$$
$$-\mu f B \operatorname{tang} \delta = + \quad 5\ .67,$$

also für die Mitternachtsverbesserung:

$$x = -136^s.66.$$

Anm. 1. Die Mitternachtsverbesserung findet man ebenso wie die Mittagsverbesserung in wahrer Sonnenzeit. Hat man nun an einer Uhr beobachtet, die nach mittlerer Zeit geht, so kann man ohne Weiteres auch die Verbesserung als in mittlerer Zeit ausgedrückt annehmen. Geht aber die Uhr nach Sternzeit, so reicht es hin, die Verbesserung mit $\frac{366}{365}$ zu multipliciren, wovon der Logarithmus 0.0012 ist.

Anm. 2. Ist der Stundenwinkel τ so klein, dafs man statt des Sinus und der Tangente den Bogen setzen kann, so wird die Mittagsverbesserung:

$$x = -\frac{\mu}{720}[\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta].$$

Da nun aber τ im Zähler und Nenner nicht in einerlei Einheit ausgedrückt war, indem im Zähler die Stunde, im Nenner der Radius als Einheit zum Grunde liegt, so mufs man die rechte Seite dieser Gleichung noch mit 206265 multipliciren und mit 15×3600 dividiren, und erhält dann:

$$x = -\frac{\mu}{188.5}[\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta],$$

wo also x die Mittagsverbesserung in Zeitsecunden für $\tau = 0$ ist. Wenn aber der Stundenwinkel gleich Null ist, so fallen die correspondirenden Höhen in eine einzige zusammen, nämlich in die gröfste Höhe. x ist dann also diejenige Gröfse, welche man zu der Zeit, wo man die gröfste Höhe beobachtet hat, hinzulegen mufs, um die Culminationszeit zu erhalten.

Derselbe Ausdruck war schon in No. 8 bei der Reduction der Circummeridianhöhen gefunden.

14. Aus zwei beobachteten Höhen zweier Gestirne und der Zwischenzeit der Beobachtungen kann man immer Zeit und Polhöhe zugleich finden. Man hat in diesem Falle wieder die beiden Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t,$$
$$\sin h' = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos t'.$$

Ist nun u die Uhrzeit der ersten Beobachtung, u' die der zweiten, Δu der Stand der Uhr gegen Sternzeit, so ist: *)

---

*) Beobachtet man die Sonne und braucht man eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr, so ist, wenn w und w' die Zeitgleichung zu beiden Zeiten bezeichnet:

$$t = u + \Delta u - w,$$
$$t' = u' + \Delta u - w',$$
$$\text{also: } \lambda = u' - u - (w' - w).$$

$$t = u + \Delta u - \alpha$$
$$t' = u' + \Delta u - \alpha',$$

wo Δu für beide Beobachtungen als gleich angenommen ist, da der Gang der Uhr bekannt sein mufs, mithin eine der beobachteten Zeiten wegen dieses corrigirt angenommen werden kann. Dann ist also

$$u' - u - (\alpha' - \alpha) = \lambda$$

eine bekannte Gröfse und $t' = t + \lambda$. In den beiden Gleichungen sind also nur die beiden Unbekannten φ und t enthalten, die sich daraus werden bestimmen lassen. Zu dem Ende drückt man die drei Gröfsen

$$\sin\varphi, \ \cos\varphi \sin t \ \text{und} \ \cos\varphi\cos t$$

durch den parallactischen Winkel aus, indem man in dem Dreiecke zwischen Pol, Zenith und Stern hat:

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin h \sin\delta + \cos h \cos\delta \cos p, \\ \cos\varphi \sin t &= \cos h \sin p, \qquad\qquad (a) \\ \cos\varphi\cos t &= \sin h \cos\delta - \cos h \sin\delta \cos p. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichung für $\sin h'$, so wird:

$$\begin{aligned} \sin h' = {} & [\sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\lambda] \sin h \\ & + [\cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\lambda]\cos h\cos p \\ & - \cos\delta'\sin\lambda \,.\, \cos h \sin p. \end{aligned}$$

Betrachtet man aber das Dreieck zwischen den beiden Sternen und dem Pole und bezeichnet die Distanz der beiden Sterne mit D, die Winkel an den beiden Sternen mit s und s', so findet man:

$$\begin{aligned} \cos D &= \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\lambda \\ \sin D\cos s &= \cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\lambda \qquad (b) \\ \sin D \sin s &= \cos\delta'\sin\lambda, \end{aligned}$$

mithin, wenn man diese Ausdrücke in die Gleichung für $\sin h'$ setzt:

$$\sin h' = \cos D \sin h + \sin D \cos h \cos(s + p),$$

$$\text{also} \quad \cos(s + p) = \frac{\sin h' - \cos D \sin h}{\sin D \cos h}. \qquad (c)$$

Substituirt man aber in

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(t' - \lambda)$$

die Ausdrücke für $\sin\varphi$, $\cos\varphi \sin t'$ und $\cos\varphi \cos t'$ aus dem Dreiecke zwischen dem Zenith, Pol und zweiten Stern, so erhält man leicht:

$$\cos(s' - p') = \frac{\sin h - \cos D \sin h'}{\sin D \cos h'}. \qquad (d)$$

Hat man so aus den Gleichungen (b) und (c) oder (d) den Winkel p oder p' gefunden, so geben die Gleichungen (a), oder die entsprechenden Gleichungen für $\sin\varphi$, $\cos\varphi \sin t'$ und $\cos\varphi \cos t'$ die gesuchten Gröſsen φ und t oder φ und t'.

Die Gleichungen (b) geben für D und s, ebenso die Gleichungen (a) für φ und t den Sinus und Cosinus, folglich kann kein Zweifel darüber bleiben, in welchem Quadranten diese Winkel genommen werden müssen. Die Gleichungen (c) und (d) geben dagegen nur den Cosinus von $s+p$ und $s'-p'$; da aber das Dreieck zwischen dem Zenith und den beiden Sternen giebt:

$$\sin D \sin(s+p) = \cos h' \sin(A'-A)$$
$$\text{und } \sin D \sin(s'-p') = \cos h \sin(A'-A),$$

so sieht man, daſs $\sin(s+p)$ und $\sin(s'-p')$ immer dasselbe Zeichen wie $\sin(A'-A)$ haben und man wird daher immer leicht darüber entscheiden können.

Die Formeln (a) und (b) kann man noch durch die Einführung von Hülfswinkeln auf die gewöhnliche Weise für die Rechnung bequemer machen, während man die Formel für $\cos(s+p)$, wie in No. 4 dieses Abschnitts, in einen bequemen Ausdruck für $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(s+p)^2$ verwandeln kann. Man erhält dann das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin\delta' &= \sin f \sin F \\ \cos\delta' \cos\lambda &= \sin f \cos F \\ \cos\delta' \sin\lambda &= \cos f, \end{aligned} \qquad (e)$$

$$\begin{aligned} \cos D &= \sin f \cos(F-\delta) \\ \sin D \cos s &= \sin f \sin(F-\delta) \\ \sin D \sin s &= \cos f, \end{aligned} \qquad (f)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s+p)^2 = \frac{\cos S \,.\, \sin(S-h')}{\cos(S-D)\sin(S-h)}, \qquad (g)$$
$$\text{wo } S = \tfrac{1}{2}(D+h+h'),$$

$$\begin{aligned} \sin g \sin G &= \sin h \\ \sin g \cos G &= \cos h \cos p \\ \cos g &= \cos h \sin p, \end{aligned} \qquad (h)$$

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin g \cos(G-\delta) \\ \cos\varphi \sin t &= \cos g \\ \cos\varphi \cos t &= \sin g \sin(G-\delta). \end{aligned} \qquad (i)$$

Man kann sich auch bequem der Gauſs'schen Gleichungen bedienen, indem zuerst das Dreieck zwischen dem Pol und den beiden Sternen, dessen Seiten D, $90^0-\delta$, $90^0-\delta'$ und die gegenüberstehenden Winkel λ, s' und s sind, giebt:

$$\begin{aligned}
\sin \tfrac{1}{2} D \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(s' - s) &= \sin \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos \tfrac{1}{2}\lambda \\
\sin \tfrac{1}{2} D \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(s' - s) &= \cos \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \sin \tfrac{1}{2}\lambda \\
\cos \tfrac{1}{2} D \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(s' + s) &= \cos \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos \tfrac{1}{2}\lambda \\
\cos \tfrac{1}{2} D \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(s' + s) &= \sin \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \sin \tfrac{1}{2}\lambda.
\end{aligned} \qquad (A)$$

Dann hat man wie vorher:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(s + p)^2 &= \frac{\cos S \,.\, \sin(S - h')}{\cos(S - D) \sin(S - h)}, \\
\text{oder} \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(s' - p')^2 &= \frac{\cos S \,.\, \sin(S - h)}{\cos(S - D) \sin(S - h')}.
\end{aligned} \qquad (B)$$

Endlich giebt das Dreieck zwischen dem Zenith, Pol und Stern:

$$\begin{aligned}
\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) \sin \tfrac{1}{2}(A + t) &= \sin \tfrac{1}{2} p \cos \tfrac{1}{2}(h + \delta) \\
\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) \cos \tfrac{1}{2}(A + t) &= \cos \tfrac{1}{2} p \sin \tfrac{1}{2}(h - \delta) \\
\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) \sin \tfrac{1}{2}(A - t) &= \sin \tfrac{1}{2} p \sin \tfrac{1}{2}(h + \delta) \\
\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) \cos \tfrac{1}{2}(A - t) &= \cos \tfrac{1}{2} p \cos \tfrac{1}{2}(h - \delta),
\end{aligned} \qquad (C)$$

und, wenn man das andre Dreieck benutzt, so erhält man entsprechende Gleichungen, in denen nur A', t', p', h' und δ' statt A, t, p, h und δ vorkommt.

Dabei hat man noch den Vortheil, dafs, wenn man die Beobachtungen mit einem Höhen- und Azimutalkreise gemacht und bei der Beobachtung der Höhe auch den Azimutalkreis abgelesen hat, die Vergleichung dieser Ablesung mit dem berechneten Werthe A des Azimuts nebenbei die Richtung des Meridians auf dem Kreise giebt.

Beispiel. Westphal hat am 29. October 1822 zu Benisuef in Aegypten die folgenden Höhen des Mittelpunkts der Sonne beobachtet:

$$\begin{aligned}
u &= 20^{h} 48^{m} 48^{s} & h &= 37^0\ 56'\ 59''.6 \\
u' &= 23\ \ 7\ \ 17 & h' &= 50\ \ 40\ \ 55\ .3,
\end{aligned}$$

wo u' wegen des Ganges der Uhr verbessert ist, und h und h' wahre Höhen sind. Der Unterschied der Zeiten in wahre Zeit verwandelt giebt: $\lambda = 2^h 18^m 28^s.66 = 34^0\ 37'\ 9''.90$, und die Declination der Sonne war zu beiden Zeiten:

$$\delta = -\,10^0\ 10'\ 50''.1 \text{ und } \delta' = -\,10^0\ 12'\ 57''.8.$$

Damit erhält man nach den Gaussischen Formeln:

$$\begin{aligned}
D &= \quad 34^0\ \ 3'\ 20''.27 \\
s &= \quad 93\ \ 12\ \ 58\ .26 \\
s' &= \quad 93\ \ \ 6\ \ \ 1\ .93. \\
\text{Ferner:}\ s + p &= \quad 53\ \ 15\ \ 41\ .26 \\
\text{mithin:}\ p &= -\,39\ \ 57\ \ 17\ .00 \\
\text{und damit:}\ \varphi &= \quad 29\ \ \ 5\ \ 39\ .80 \\
t &= -\,35\ \ 24\ \ 59\ .23 \\
A &= -\,46\ \ 19\ \ 52\ .17.
\end{aligned}$$

Berechnet man auch φ und t' aus dem andern Dreieck, so hat man noch die Prüfung, daſs man für φ denselben Werth finden, und daſs $t' - t = \lambda$ sein muſs.

Um nun zu sehen, wie man die Sterne auswählen muſs, wenn man durch diese Methode die sichersten Resultate erzielen will, muſs man die beiden Differentialgleichungen:

$$dh = -\cos A\, d\varphi - \cos\varphi \sin A\, dt$$
$$dh' = -\cos A' d\varphi - \cos\varphi \sin A' dt$$

betrachten, wo in beiden Gleichungen derselbe Fehler in der Zeit angenommen ist, weil man den Unterschied immer mit auf den Fehler in der Höhe übertragen kann. Durch die Combination beider Gleichungen findet man nun, je nachdem man $d\varphi$ oder dt eliminirt:

$$\cos\varphi\, dt = \frac{\cos A'}{\sin(A' - A)}\, dh - \frac{\cos A}{\sin(A' - A)}\, dh'$$

$$d\varphi = -\frac{\sin A'}{\sin(A' - A)}\, dh + \frac{\sin A}{\sin(A' - A)}\, dh'.$$

Daraus sieht man also, daſs, wenn die Fehler in h und h' keinen groſsen Einfluſs auf das Resultat haben sollen, die Sterne so auszuwählen sind, daſs $A' - A$ möglichst nahe $\pm 90^0$ wird, da, wenn diese Bedingung genau erfüllt ist:

$$\cos\varphi\, dt = \quad \cos A' dh - \cos A\, dh'$$
$$d\varphi = -\sin A' dh + \sin A\, dh'.$$

Ist dann A' nahe bei $\pm 90^0$, also A nahe bei 0^0 oder 180^0, so wird in der ersten Gleichung der Coefficient von dh ein Minimum, der von dh' dagegen ein Maximum, also hängt die Genauigkeit der Zeitbestimmung hauptsächlich von der Höhe ab, welche nahe am ersten Verticale genommen ist. Ebenso sieht man aus der zweiten Gleichung, daſs die Genauigkeit der Breitenbestimmung hauptsächlich von der Genauigkeit der Höhe abhängt, welche nahe am Meridiane gemessen ist. Für das obige Beispiel wird, da $A' = -1^0\, 15'$ ist:

$$d\varphi = +0.0308\, dh - 1.0215\, dh'$$
$$dt = +0.1077\, dh - 0.0744\, dh'.$$

15. In einigen besonderen Fällen wird die Auflösung der Aufgabe einfacher. Beobachtet man z. B. denselben Stern zwei Mal, so ist die Declination für beide Beobachtungen dieselbe, und die Formeln (A) der vorigen Nummer gehen dann, da $s' = s$ wird, über in:

$$dA = -\sin A \operatorname{tang} h\, d\varphi + \frac{\cos\delta\cos p}{\cos h}\, d\frac{t'+t}{2} - \frac{\cos\delta\cos p}{\cos h}\, d\frac{t'-t}{2}$$

$$dA' = -\sin A' \operatorname{tang} h'\, d\varphi + \frac{\cos\delta'\cos p'}{\cos h'}\, d\frac{t'+t}{2} + \frac{\cos\delta'\cos p'}{\cos h'}\, d\frac{t'-t}{2},$$

wo nur in den ursprünglichen Gleichungen $\frac{t'+t}{2}+\frac{t'-t}{2}$ statt t' und $\frac{t'+t}{2}-\frac{t'-t}{2}$ statt t gesetzt ist.

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten, die dritte Gleichung von der vierten ab, so erhält man leicht durch Elimination zuerst von $d\frac{t'+t}{2}$ dann von $d\varphi$, wenn man berücksichtigt, dafs

$$\cos\delta\sin p = \cos\varphi\sin A$$
$$\frac{\cos\delta\cos p}{\cos h} = \sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tang} h \cos A$$

ist:

$$M\,d\varphi = [\operatorname{tang} h\cos A - \operatorname{tang} h'\cos A']\, d(h'-h) + [\sin A - \sin A']\, d(A'-A)$$
$$+ \left[\frac{\cos\delta}{\cos h}\cos p\sin A' - \frac{\cos\delta'}{\cos h'}\cos p'\sin A\right] d(t'-t),$$

$$M\cos\varphi\, d\frac{t'+t}{2} = [\operatorname{tang} h\sin A - \operatorname{tang} h'\sin A']\, d(h'-h) - [\cos A - \cos A']\, d(A'-A)$$
$$+ [\cos\varphi(\operatorname{tg} h - \operatorname{tg} h')\sin^2\tfrac{1}{2}(A'+A) + \sin\varphi(\cos A - \cos A')]\, d(t'-t),$$

$$\text{wo } M = 2\,[\operatorname{tg} h + \operatorname{tg} h')\sin^2\tfrac{1}{2}(A'-A).$$

Man sieht daraus, dafs man, um den Einflufs der Beobachtungsfehler möglichst zu verringern, Sterne auswählen mufs, deren Höhe und Azimutalunterschied grofs ist, damit M möglichst grofs ist. Ist $\frac{1}{2}(A'-A) = 90^0$, so wird selbst der Coefficient von $d(h'-h)$ immer kleiner als $\frac{1}{2}$.

Herr von Camphausen hat vorgeschlagen, die Sterne dann zu beobachten, wenn die Höhe derselben gleich ihrer Declination ist, da dann das Dreieck zwischen dem Sterne, dem Zenith und Pol ein gleichschenkliges wird, also $t = 180^0 - A$ wird und man einfach hat:

$$\operatorname{cotg}\delta\cos t = \operatorname{cotg}\delta'\cos t' = \operatorname{tg}(45 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$-\operatorname{cotg}\delta\cos A = -\operatorname{cotg}\delta'\cos A' = \operatorname{tg}(45 - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

woraus man erhält:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(t'+t) = \frac{\sin(\delta-\delta')}{\sin(\delta+\delta')}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(t'-t)$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A'+A) = \frac{\sin(\delta-\delta')}{\sin(\delta+\delta')}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(A'-A),$$

aus welchen Gleichungen man $t'+t$ oder $A'+A$ und φ

$$\sin \tfrac{1}{2} D = \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} \lambda$$
$$\cos \tfrac{1}{2} D \sin s = \cos \tfrac{1}{2} \lambda$$
$$\cos \tfrac{1}{2} D \cos s = \sin \delta \sin \tfrac{1}{2} \lambda.$$

Damit findet man aus der ersten Gleichung (B) und den Gleichungen (C) φ und t, und, wenn man will, A.

Man kann die Aufgabe in dem Falle auch so auflösen: Aus den Gleichungen

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$
$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t + \lambda)$$

findet man sogleich durch Addition und Subtraction:

$$\begin{aligned} \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}\lambda \,.\, \cos\varphi \sin(t + \tfrac{1}{2}\lambda) &= \cos\tfrac{1}{2}(h + h')\sin\tfrac{1}{2}(h - h') \\ \sin\varphi\sin\delta + \cos\delta\cos\tfrac{1}{2}\lambda \,.\, \cos\varphi\cos(t + \tfrac{1}{2}\lambda) &= \sin\tfrac{1}{2}(h + h')\cos\tfrac{1}{2}(h - h'). \end{aligned} \qquad (a)$$

Setzt man daher:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos b \cos B \\ \cos \delta \cos \tfrac{1}{2} \lambda &= \cos b \sin B \\ \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} \lambda &= \sin b, \end{aligned} \qquad (A)$$

so geht die zweite der Gleichungen (a) über in:

$$\sin \varphi \cos B + \cos \varphi \cos (t + \tfrac{1}{2} \lambda) \sin B = \frac{\sin \frac{1}{2} (h + h') \cos \frac{1}{2} (h - h')}{\cos b},$$

und wenn man endlich annimmt:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \cos F \cos G \\ \cos \varphi \sin (t + \tfrac{1}{2} \lambda) &= \sin G \\ \cos \varphi \cos (t + \tfrac{1}{2} \lambda) &= \sin F \cos G, \end{aligned} \qquad (B)$$

so ist:

$$\begin{aligned} \sin G &= \frac{\cos \frac{1}{2} (h + h') \sin \frac{1}{2} (h - h')}{\sin b} \\ \cos G . \cos (B - F) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (h + h') \cos \frac{1}{2} (h - h')}{\cos b}. \end{aligned} \qquad (C)$$

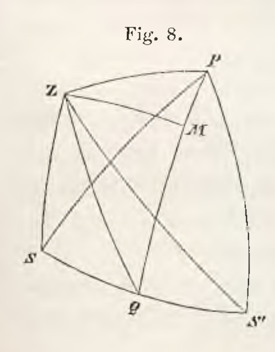


Fig. 8.

Berechnet man also zuerst die Gleichungen (A), so findet man dann G und F nach den Gleichungen (C) und damit φ und t nach (B). Die geometrische Bedeutung der Hülfswinkel ersieht man leicht aus Fig. 8, wo PQ senkrecht auf den beide Sterne verbindenden gröfsten Kreis gezogen ist, ZM dagegen senkrecht auf PQ. Man sieht dann, dafs $b = QS = \frac{1}{2} D$, $B = PQ$, $F = PM$ und $G = ZM$ ist.

Berechnet man als ein Beispiel das vorige, indem man die Aenderung der Declination unberücksichtigt läfst und $\delta = -10^0\ 12'\ 57''.8$ nimmt, so findet man:

$B = 100^\circ\ 41'\ 23''.1 \quad \sin b = 9.466600 \quad \cos b = 9.980534$
$\sin G = 9.432863_n \quad \cos G = 9.983445 \quad F = 41^\circ\ 1'\ 53''.3$
und damit $t = -35^\circ\ 22'\ 21''.0 \quad \varphi = 29^\circ\ 5'\ 42''.7.$

Sind die beiden Höhen gleich, so bleiben die Formeln (A) oder (e) und (f) in No. 14 dieselben, aber die Formeln (B) gehen über in:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (s + p)^2 = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (s' - p')^2 = \frac{\cos (h + \frac{1}{2} D)}{\cos (h - \frac{1}{2} D)},$$

womit man φ und t nach den Formeln (h) und (i) oder φ, t und A nach den Formeln (C) finden kann.

16. Eine hiermit verwandte Aufgabe, obwohl sie nicht zu der Classe der reinen Höhenaufgaben gehört, ist die: Aus den beobachteten Differenzen der Höhen und Azimute zweier Sterne, sowie der Zwischenzeit der Beobachtungen der beiden Sterne Zeit und Polhöhe und zugleich die Höhen und Azimute der Sterne selbst zu bestimmen.

In diesem Falle hat man wie vorher die Gleichungen (A) in No. 14 zu berechnen.

In dem Dreiecke zwischen dem Zenith und den beiden Sternen hat man aber, wenn die Winkel an den Sternen mit q und q' bezeichnet werden, da der dritte Winkel $A' - A$ und die gegenüberstehenden Seiten $90^\circ - h'$, $90^\circ - h$ und D sind:

$$\sin \tfrac{1}{2} (q' + q) = \frac{\cos \frac{1}{2} (h' - h) \cos \frac{1}{2} (A' - A)}{\cos \frac{1}{2} D}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (q' - q) = \frac{\sin \frac{1}{2} (h' - h) \cos \frac{1}{2} (A' - A)}{\sin \frac{1}{2} D} \qquad (B)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (h' + h) = \frac{\cos \frac{1}{2} (q' + q)}{\cos \frac{1}{2} (q' - q)} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} D.$$

Aus diesen Gleichungen findet man $\frac{1}{2} (h + h')$, mithin h und h' und die Winkel q und q'. Da aber nach No. 14 $q = s + p$, $q' = s' - p'$ ist, so sind damit p und p' gegeben und man kann daher nach den Gleichungen (C) in No. 14 φ, t und A und, wenn man will, zur Prüfung aus den entsprechenden Gleichungen für den anderen Stern φ, t' und A' finden.

Für diesen Fall hat man die Differentialgleichungen nach No. 8 des ersten Abschnitts:

$$dh = -\cos A\, d\varphi - \cos \delta \sin p \,.\, d \frac{t' + t}{2} + \cos \delta \sin p\, d \frac{t' - t}{2}$$

$$dh' = -\cos A'\, d\varphi - \cos \delta' \sin p' \,.\, d \frac{t' + t}{2} - \cos \delta' \sin p'\, d \frac{t' - t}{2}$$

berechnen kann. Da man aber nie die Höhe genau in dem Augenblicke nehmen wird, wo dieselbe gleich der Declination des Sterns ist, so müssen die beobachteten Gröfsen $t' - t$ und $A' - A$ auf diese Zeit reducirt werden. (Vergl. Encke über die Erweiterung des Douwes'schen Problems im Berliner Jahrbuche für 1859.)

Beispiel. Am 30. März 1856 wurden zu Cöln die folgenden Unterschiede der Höhen und Azimute von η Ursae majoris und α Aurigae beobachtet.

$$h' - h = -4^0\ 10'\ 46''.0$$
$$A' - A = 226^0\ 28'\ 9''.9$$

Der Unterschied der Zeiten $\Theta' - \Theta = 0^h 18^m 8^s.70$ Sternzeit.

An dem Tage waren die scheinbaren Oerter der Sterne:

η Ursae majoris	$\alpha = 13^h 41^m 54^s.53$	$\delta = +50^0\ 1'\ 45''.9$
α Aurigae	$\alpha' = 5\ \ 6\ \ 1.69$	$\delta' = +45\ 51\ \ 1.7.$

Damit wird $\lambda = 133^0\ 30'\ 23''.1$ und man findet zuerst nach den Formeln (A) in No. 14:

$$s = +31^0\ 22'\ 33''.18$$
$$s' = +28^0\ 41'\ 50''.20 \qquad D = 76^0\ 0'\ 14''.79.$$

Dann wird nach den obigen Formeln (B) $q' = -28^0 40' 53''.44$, $q = -31^0 21' 32''.80$, und da $q' = s' - p'$, $q = s + p$, so wird $p = -62^0\ 44'\ 5''.98$, $p' = +57^0\ 22'\ 43''.64$. Da man auch findet $\frac{1}{2}(h' + h) = 47^0\ 56'\ 40''.61$, also $h = 50^0\ 2'\ 3''.61$, so erhält man nach den Gleichungen (C) in No. 14: $\varphi = 50^0 55' 55''.57$, $t = 295^0\ 2'\ 56''.70$, $A = 244^0\ 57'\ 48''.50$.

Berechnet man die oben gegebenen Differentialgleichungen, so findet man für diesen Fall, wenn man alle Fehler in Bogensecunden ausgedrückt annimmt:

$$d\varphi = -0.0342\, d(h' - h) - 0.4892\, d(A' - A) + 0.2438\, d(t' - t)$$
$$d\frac{t' + t}{2} = -0.8621\, d(h' - h) + 0.0244\, d(A' - A) - 0.0188\, d(t' - t).$$

17. Die Methode, die Polhöhe und die Zeit aus zwei Höhenbeobachtungen zu bestimmen, wird sehr häufig zur See angewandt. Die Seefahrer gebrauchen aber nicht die eben gegebenen directen Auflösungen der Aufgabe, weil die Rechnung nach denselben zu weitläuftig ist, sondern bedienen sich immer einer indirecten Methode, welche von Douwes, einem holländischen Seefahrer, zu diesem Zwecke vorgeschlagen ist. Da ihnen nämlich die Breite durch die gewöhnliche Schiffsrechnung nach Compafs und Log annähernd bekannt ist, so

finden sie mit dieser genäherten oder, wie man in der Schiffersprache sagt, gegiſsten Breite, aus der vom Meridiane entfernten Höhe, der Zwischenzeit und der Declination eine freilich nur annähernd genaue Zeitbestimmung, mit welcher sie aus der dem Meridiane nahen Höhe die Polhöhe berechnen. Mit diesem neuen Werthe der Polhöhe wird dann die Rechnung für die Zeitbestimmung wiederholt.

Nimmt man wieder an, daſs dasselbe Gestirn zwei Mal beobachtet ist, so hat man:

$$\sin h - \sin h' = \cos \varphi \cos \delta \,[\cos t - \cos (t + \lambda)]$$
$$= 2 \cos \varphi \cos \delta \sin (t + \tfrac{1}{2} \lambda) \sin \tfrac{1}{2} \lambda,$$

also:

$$2 \sin (t + \tfrac{1}{2} \lambda) = \sec \varphi \sec \delta \,\mathrm{cosec}\, \tfrac{1}{2} \lambda \,[\sin h - \sin h']$$

oder, wenn man die Formel logarithmisch schreibt:

$$\log . 2 \sin (t + \tfrac{1}{2} \lambda) = \log \sec \varphi + \log \sec \delta + \log [\sin h - \sin h'] + \log \mathrm{cosec}\, \tfrac{1}{2} \lambda. \quad (A)$$

Da nun φ annähernd bekannt ist, so kann man aus dieser Gleichung $t + \frac{1}{2} \lambda$, also auch t finden und erhält dann aus der am Meridiane gelegenen Höhe h' eine genauere Polhöhe durch die Formel:

$$\cos (\varphi - \delta) = \sin h' + \cos \varphi \cos \delta \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} (t + \lambda)^2. \quad (B)$$

Stimmt das hierdurch gefundene Resultat mit der gegiſsten Breite nur entfernt überein, so muſs man die Formeln (A) und (B) mit dem jetzigen Werthe von φ von Neuem berechnen.

Zur Erleichterung der Rechnung sind nun von Douwes Tafeln gegeben, die sich in den „Tables requisite to be used with the nautical ephemeris for finding the latitude and longitude at sea" und in den Handbüchern der Schifffahrtskunde finden. Diese Tafeln geben die Werthe von log cosec $\frac{1}{2} \lambda$ für die Stundenwinkel in Zeit unter der Aufschrift log. half elapsed time (Logarithmus der halben verflossenen Zeit) und von log 2 sin $(t + \frac{1}{2} \lambda)$ unter der Aufschrift log. middle time (Logarithmus Mittelzeit) und endlich von log 2 sin $\frac{1}{2} t^2$ unter der Aufschrift log. rising time (Logarithmus Steigezeit). Die Gröſse log. sec φ sec δ heiſst daselbst log. ratio und man hat also nach Gleichung (A):

$$\text{Log Mittelzeit} = \text{Log ratio} + \text{Log}\,[\sin h - \sin h']$$
$$+ \text{Log halbe verflossene Zeit.}$$

Sucht man diesen Logarithmus in den Tafeln für Mittelzeit auf, so erhält man unmittelbar t. Nun sucht man für

den Stundenwinkel $t + \lambda$ den Log. Steigezeit, zieht davon Log. ratio ab und addirt die dazu gehörige Zahl zu dem Sinus der gröfsten Höhe. Dadurch erhält man dann den Sinus der Meridianhöhe also auch die Polhöhe.

Will man statt der Douwes'schen Tafeln die gewöhnliche sphärische Rechnung anwenden, so hat man die Formeln zu berechnen:

$$\sin\left[t + \tfrac{1}{2}\lambda\right] = \frac{\cos\frac{1}{2}(h + h')\sin\frac{1}{2}(h - h')}{\cos\varphi\cos\delta\sin\frac{1}{2}\lambda}$$

und:

$$\cos(\varphi - N) = \frac{\sin h'}{M},$$

wo:

$$\sin\delta = M\sin N$$
$$\cos\delta\cos t = M\cos N.$$

Berechnet man das Beispiel in No. 14 nach Douwes Methode und nimmt

$$\varphi = 29^{0}\ 0'$$

an, so wird:

log ratio	0 . 06512
log (sin h — sin h')	9 . 20049$_n$
log half elapsed time	0 . 52645
log middle time	9 . 79206$_n$
$t =$	— 2^h 21^m . 4
also $t' =$	— 0^h 2^m . 9
log rising time	5 . 90340
log ratio	0 . 06512
	+ 0 . 00007
sin h'	+ 0 . 77364
cos ($\varphi - \delta$) =	9 . 88858
$\varphi - \delta$ =	39^0 18'. 7
φ =	29 5 . 7.

Wenn man die Beobachtungen zur See anstellt, so werden die beiden Höhen in der Regel an verschiedenen Orten der Erde genommen, weil das Schiff sich in der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen fortbewegt. Da aber die Geschwindigkeit des Schiffs durch das Log und die Richtung des Laufs durch den Compafs bekannt ist, so kann man immer die beiden Höhen auf einen Beobachtungsort reduciren.

Das Schiff sei bei der ersten Beobachtung in A Fig. 9, bei der zweiten in B. Denkt man sich nun vom Mittelpunkte der Erde nach dem Sterne S eine gerade Linie gezogen,

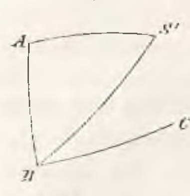


Fig. 9.

welche die Oberfläche in S' schneidet, so wird in dem Dreiecke ABS' die Seite BS' die an dem Orte B gemessene Zenithdistanz sein und man wird, da BA bekannt ist, hieraus die Seite AS', d. h. die Zenithdistanz des Sterns, welche man an dem Orte A gemessen hätte, berechnen können, wenn man den Winkel $S'BA$ kennt. Der Schiffer muſs daher, wenn er die zweite zu reducirende Höhe miſst, auch das Azimut des Sterns nehmen, d. h. den Winkel $S'BC$, und da er den Winkel CBA, welchen die Richtung des Schiffes mit dem Meridiane macht, kennt, so ist dadurch auch der Winkel $S'BA$ bekannt. Bezeichnet man denselben durch α und die Entfernung der beiden Orte A und B mit Δ, so hat man:

$$\sin h_0 = \sin h \cos \Delta + \sin \Delta \cos h \cos \alpha,$$

wo h_0 die reducirte Höhe ist. Schreibt man dafür:

$$\sin h_0 = \sin h + \sin \Delta \cos h \cos \alpha - 2 \sin \tfrac{1}{2} \Delta^2 \sin h,$$

so erhält man, wenn man Δ statt $\sin \Delta$ setzt, nach der Formel 20 der Einleitung:

$$h_0 = h + \Delta \cos \alpha - \tfrac{1}{2} \Delta^2 \operatorname{tang} h,$$

wo man gewöhnlich das letzte Glied vernachlässigen kann.

18. Hat man drei Höhen eines und desselben Sterns beobachtet, so hat man die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\
\sin h' &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t + \lambda) \\
\sin h'' &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (t + \lambda'),
\end{aligned}$$

aus denen man drei Gröſsen, also φ, t und δ bestimmen kann. Führt man nämlich die folgenden drei Hülfsgröſsen ein:

$$\begin{aligned}
x &= \cos \varphi \cos \delta \cos t \\
y &= \cos \varphi \cos \delta \sin t \\
z &= \sin \varphi \sin \delta,
\end{aligned}$$

so werden die drei Gleichungen jetzt:

$$\begin{aligned}
\sin h &= z + x \\
\sin h' &= z + x \cos \lambda - y \sin \lambda \\
\sin h'' &= z + x \cos \lambda' - y \sin \lambda',
\end{aligned}$$

aus denen man die drei Unbekannten z, y und x durch eine einfache Elimination findet. Kennt man diese aber, so erhält man daraus die Gröſsen φ, t und δ durch die Gleichungen:

$$\text{tang}\, t = \frac{y}{x}$$
$$\sin\varphi \sin\delta = z$$
$$\cos\varphi \cos\delta = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Diese Aufgabe wäre nun eine der bequemsten und nützlichsten, weil man zur Berechnung der Beobachtungen durchaus keine fremden Data zu entnehmen hätte *). Sie ist aber practisch nicht anwendbar, weil die Fehler in den Höhen einen sehr grofsen Einflufs auf die zu findenden Gröfsen ausüben. Nimmt man indessen δ nicht mehr als constant an sondern beobachtet drei verschiedene Sterne, deren Declination man als gegeben ansieht, so erhält man, wenn man überdies die drei Höhen als gleich annimmt, eine sehr nützliche und elegante Aufgabe.

19. In diesem Falle werden nämlich die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin h &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \\
\sin h &= \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos(t + \lambda) \qquad (a) \\
\sin h &= \sin\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta'' \cos(t + \lambda'),
\end{aligned}$$
$$\text{wo } \lambda = (u' - u) - (\alpha' - \alpha)$$
$$\text{und } \lambda' = (u'' - u) - (\alpha'' - \alpha).$$

Betrachtet man zunächst nur die beiden ersten Gleichungen, so erhält man, wenn man darin:

$$\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \text{ statt } \delta \text{ und } \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')$$

statt δ' setzt und die zweite Gleichung von der ersteren abzieht:

$$\begin{aligned}
0 = {} & 2\sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \cos\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \cos\varphi \cos t\, [\cos\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \cos\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \\
& - \sin\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')] \\
& - \cos\varphi \cos(t + \lambda)\, [\cos\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \cos\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') + \sin\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')]
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
0 = {} & \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \cos\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \\
& + \cos\varphi \cos\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \cos\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \sin\tfrac{1}{2}\lambda \sin(t + \tfrac{1}{2}\lambda) \\
& - \cos\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \cos\tfrac{1}{2}\lambda \cos(t + \tfrac{1}{2}\lambda).
\end{aligned}$$

Daraus findet man:

$$\begin{aligned}
\text{tang}\,\varphi = {} & - \sin\tfrac{1}{2}\lambda \,.\, \sin(t + \tfrac{1}{2}\lambda)\, \text{cotang}\,\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') \\
& + \cos\tfrac{1}{2}\lambda \,.\, \cos(t + \tfrac{1}{2}\lambda)\, \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\delta + \delta').
\end{aligned}$$

Führt man also die folgenden Hülfsgröfsen ein:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\lambda \,.\, \text{cotang}\,\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') &= A' \sin B' \\
\cos\tfrac{1}{2}\lambda \,.\, \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') &= A' \cos B' \qquad (A) \\
B' + \tfrac{1}{2}\lambda &= C',
\end{aligned}$$

*) Denn da drei Höhen eines und desselben Sterns beobachtet sind, so kommt auch die Rectascension in λ und λ' nicht vor.

so wird:

$$\operatorname{tang} \varphi = A' \cos (t + C'). \qquad (B)$$

Verbindet man auf gleiche Weise die erste und dritte der Gleichungen (a), so erhält man ganz ähnliche Formeln, in denen nur λ und δ andere Accente haben, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} \lambda' \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} (\delta - \delta'') &= A'' \sin B'' \\ \cos \tfrac{1}{2} \lambda' \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta + \delta'') &= A'' \cos B'' \\ B'' + \tfrac{1}{2} \lambda' \qquad &= C'', \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

$$\operatorname{tang} \varphi = A'' \cos (t + C''). \qquad (D)$$

Aus der Vergleichung der beiden Formeln (B) und (D) erhält man ferner:

$$A' \cos (t + C') = A'' \cos (t + C'').$$

Um nun aus dieser Gleichung t zu bestimmen, schreibe man dafür:

$$A' \cos [t + H + C' - H] = A'' \cos [t + H + C'' - H],$$

wo H ein willkührlicher Winkel ist, sodafs man, wenn man die Cosinus auflöst, erhält:

$$\operatorname{tang} (t + H) = \frac{A' \cos (C' - H) - A'' \cos (C'' - H)}{A' \sin (C' - H) - A'' \sin (C'' - H)}.$$

Für H kann man nun einen solchen Werth setzen, der die Formel am bequemsten macht, also Null oder C' oder C''. Die eleganteste Form erhält man aber, wenn man:

$$H = \tfrac{1}{2} (C' + C'')$$

setzt. Dann wird nämlich:

$$\operatorname{tang} [t + \tfrac{1}{2} (C' + C'')] = \frac{A' - A''}{A' + A''} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} (C' - C'').$$

Führt man dann den Hülfswinkel ζ ein, gegeben durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{A''}{A'}, \qquad (E)$$

so wird:

$$\frac{A' - A''}{A' + A''} = \frac{1 - \operatorname{tang} \zeta}{1 + \operatorname{tang} \zeta} = \operatorname{tang} (45^\circ - \zeta),$$

also:

$$\operatorname{tang} [t + \tfrac{1}{2} (C' + C'')] = \operatorname{tang} (45^\circ - \zeta) \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} (C' - C''). \qquad (F)$$

Die Gleichungen (A) bis (F) enthalten die Auflösung der Aufgabe. Man sucht zuerst aus den Gleichungen (A) und (C) die Werthe von A', B', C' und A'', B'', C'', findet dann t durch die Gleichungen (E) und (F) und zuletzt φ aus einer der Gleichungen (B) oder (D). Die Höhe selbst braucht man also zur Berechnung von φ und t nicht zu ken-

nen. Substituirt man aber die gefundenen Werthe in die ursprünglichen Gleichungen (a), so erhält man h und kann daher, wenn man die Höhe auch am Instrumente abgelesen hat, aus der Vergleichung der Rechnung mit der Beobachtung den Fehler des Instruments bestimmen.

Um nun zu sehen, wie die drei Sterne am Himmel vertheilt sein müssen, damit man durch die Beobachtung derselben die sichersten Resultate erhält, betrachtet man wieder die Differentialgleichungen. Da die drei Höhen gleich sein sollen, so kann man auch dh in allen drei Differentialgleichungen als gleich annehmen und die Fehler, welche etwa bei der Beobachtung der Höhen gemacht sind, mit auf die Zeit werfen. Ist dann:

$$t = u + \Delta u - \alpha,$$

so wird also dt aus zwei Fehlern zusammengesetzt sein, nämlich erstens aus dem Fehler im Stande der Uhr $d(\Delta u)$, welcher bei allen drei Beobachtungen derselbe ist, weil der Gang der Uhr als bekannt angenommen wird, zweitens aber aus dem Fehler in der Zeit der Beobachtung, welcher letzterer für jede derselben ein andrer sein wird.

Die drei Differentialgleichungen werden somit:

$$dh = -\cos A\ d\varphi - \cos\varphi \sin A\ du - \cos\varphi \sin A\ d(\Delta u)$$
$$dh = -\cos A'\ d\varphi - \cos\varphi \sin A'\ du' - \cos\varphi \sin A'\ d(\Delta u)$$
$$dh = -\cos A''\ d\varphi - \cos\varphi \sin A''\ du'' - \cos\varphi \sin A''\ d(\Delta u).$$

Zieht man die beiden ersteren Gleichungen von einander ab und verwandelt die Differenzen der Sinus und Cosinus in Producte der Sinus oder Cosinus der halben Summen und Differenzen der Winkel, so erhält man:

$$0 = 2 \sin\frac{A + A'}{2}\, d\varphi - 2\cos\frac{A + A'}{2} \cos\varphi\, d(\Delta u) - \frac{\cos\varphi\ \sin A}{\sin\frac{A - A'}{2}}\, du$$
$$+ \frac{\cos\varphi\ \sin A'}{\sin\frac{A - A'}{2}}\, du',$$

und ebenso durch die Verbindung der ersten und dritten Gleichung:

$$0 = 2 \sin\frac{A + A''}{2}\, d\varphi - 2\cos\frac{A + A''}{2} \cos\varphi\, d(\Delta u) - \frac{\cos\varphi\ \sin A}{\sin\frac{A - A''}{2}}\, du$$
$$+ \frac{\cos\varphi\ \sin A''}{\sin\frac{A - A''}{2}}\, du''.$$

Aus beiden Gleichungen findet man dann, je nachdem man $d(\Delta u)$ oder $d\varphi$ eliminirt:

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi \sin A \,.\, \cos\frac{A'+A''}{2}}{2\sin\frac{A-A'}{2}\sin\frac{A-A''}{2}}\,du + \frac{\cos\varphi \sin A' \cos\frac{A+A''}{2}}{2\sin\frac{A'-A}{2}\sin\frac{A'-A''}{2}}\,du'$$
$$+ \frac{\cos\varphi \sin A'' \cos\frac{A+A'}{2}}{2\sin\frac{A''-A}{2}\sin\frac{A''-A'}{2}}\,du''$$

und:

$$d(\Delta u) = \frac{\sin A \,.\, \sin\frac{A'+A''}{2}}{2\sin\frac{A-A'}{2}\sin\frac{A-A''}{2}}\,du + \frac{\sin A' \sin\frac{A+A''}{2}}{2\sin\frac{A'-A}{2}\sin\frac{A'-A''}{2}}\,du'$$
$$+ \frac{\sin A'' \sin\frac{A+A'}{2}}{2\sin\frac{A''-A}{2}\sin\frac{A''-A'}{2}}\,du''.$$

Man sieht daraus, daſs man die Sterne so auszuwählen hat, daſs die Differenzen der Azimute je zweier auf einander folgenden Sterne möglichst groſs werden, weil dann die Nenner der Differentialquotienten ebenfalls ein Maximum erreichen, man muſs daher darauf sehen, daſs die Differenzen der Azimute nahe gleich 120° werden *).

Beispiel. Dr. Westphal hat am 5ten October 1822 zu Cairo folgende drei gleiche Sternhöhen beobachtet.

α Ursae minoris	um $8^h\ 28^m$	17^s	
α Herculis	31	21	im Westen
α Arietis	47	30	im Osten

Die Oerter der drei Sterne waren an diesem Tage:

	α	δ
α Ursae minoris	$0^h\ 58^m\ 14^s.10$	$+88°\ 21'\ 54''.3$
α Herculis	17 6 34 .26	14 36 2 .0
α Arietis	1 57 14 .00	22 37 22 .7.

Nun ist:

$$u'-u = +3^m\ 4^s.0 \qquad u''-u = +\ 19^m\ 13^s.0$$

oder in Sternzeit:

$u'-u = +$	$0^h\ 3^m\ 4^s.50$		$+\ 0^h\ 19^m\ 16^s.16$
$\alpha'-\alpha = -$	$7\ 51\ 39\ .84$	$\alpha''-\alpha =$	$+\ 0\ 58\ 59\ .90$
$\lambda\ =$	$7^h\ 54^m\ 44^s.34$	λ'	$=-\ 0^h\ 39^m\ 43^s.74$
$=$	$118°\ 41'\ 5''.10$		$=-\ 9°\ 55'\ 56''.10$

*) Die hier gegebene Auflösung dieser Aufgabe ist von Gauſs. Monatliche Correspondenz Band XVIII pag. 277 und folgende.

Ferner ist:

$$\tfrac{1}{2}(\delta-\delta') = 36^\circ\, 52'\, 56''.15$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') = 51\;\; 28\;\; 58\,.15$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta-\delta'') = 32\;\; 52\;\; 15\,.80$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta+\delta'') = 55\;\; 29\;\; 38\,.50.$$

Damit erhält man dann:

$$\log A' = 0.1183684 \qquad \log A'' = 0.1629829$$
$$B' = 60^\circ\, 48'\, 11''.92 \qquad B'' = -\;5^\circ\, 16'\, 52''.22$$
$$C' = 120\;\; 8\;\; 44\,.47 \qquad C'' = -\;10\;\; 14\;\; 50\,.27$$

$$\tfrac{1}{2}(C'+C'') = 54^\circ\, 56'\, 57''.10$$
$$\tfrac{1}{2}(C'-C'') = 65\;\; 11\;\; 47\,.37$$
$$\zeta = 47\;\; 56\;\; 16\,.08$$
$$t = -\,56^\circ\, 18'\, 28''.09$$
$$= -\;3^h\, 45^m\, 13^s.87$$
$$t+C' = 63^\circ\, 50'\, 16''.38$$
$$t+C'' = -\,66\;\; 33\;\; 18\,.36$$

und hieraus nach den Formeln (B) und (D) übereinstimmend:

$$\varphi = 30^\circ\, 4'\, 23''.72.$$

Aus t erhält man die Sternzeit:

$$\Theta = 21^h\, 13^m\, 0^s.23,$$

und da die Sternzeit im Mittage $12^h\, 54^m\, 2^s.04$ war, so war die mittlere Zeit gleich $8^h\, 17^m\, 36^s.44$, also der Stand der Uhr gegen mittlere Zeit:

$$\Delta u = -\,10^m\, 40^s.56.$$

Berechnet man auch die Höhe aus einer der drei Gleichungen (a) so erhält man:

$$h = 30^\circ\, 58'\, 14''.44.$$

Aus A findet man die beiden andern Stundenwinkel:

$$t' = 62^\circ\, 22'\, 37''.01$$
$$t'' = -\,66\;\; 14\;\; 24\,.19,$$

und damit die drei Azimute:

$$A = 181^\circ\, 35'.2$$
$$A' = 89\;\; 33\,.2$$
$$A'' = 279\;\; 50\,.4\,;$$

endlich für die Differentialgleichungen:

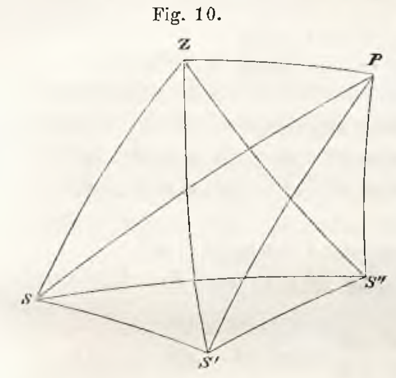
$$d\varphi = -\;0.329\,du - 5.739\,du' - 6.068\,du'',$$
$$d(\Delta u) = -\,0.0018\,du + 0.468\,du' - 0.396\,du'',$$

wo $d\varphi$ in Bogen, $d(\Delta u)$ dagegen sowie du, du' und du'' in Zeitsecunden ausgedrückt sind.

20. Cagnoli giebt in seiner Trigonometrie eine sehr elegante Auflösung grade nicht des hier betrachteten Problems, aber doch eines ganz ähnlichen, sodafs sich seine For-

meln unmittelbar auf diesen Fall anwenden lassen. Verlangt man aufser der Zeit und der Polhöhe auch die Kenntnifs der Höhe selbst, so ist die Rechnung nach diesen Formeln von Cagnoli noch etwas bequemer als nach den eben gegebenen.

Fig. 10.



Es seien S, S' und S'' Fig. 10 die drei beobachteten Sterne. Betrachtet man nun das Dreieck zwischen dem Zenith Z, dem Pole P und dem ersten Sterne, so hat man nach den Gaufsischen oder Napierschen Formeln, wenn p den parallactischen Winkel bezeichnet:

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi + h) = \frac{\cos \frac{1}{2}(t+p)}{\cos \frac{1}{2}(t-p)} \operatorname{cotang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta)$$
$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(t+p)}{\cos \frac{1}{2}(t-p)} \operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\delta)$$

und: (A)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi - h) = \frac{\sin \frac{1}{2}(t-p)}{\sin \frac{1}{2}(t+p)} \operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\delta)$$
$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(t-p)}{\sin \frac{1}{2}(t+p)} \operatorname{cotang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\delta).$$

Betrachtet man nun die Dreiecke PSS', $PS'S''$ und PSS'', so hat man ebenfalls nach den Napierschen Formeln, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$A = \tfrac{1}{2}[PS''S' - PS'S'']$$
$$A' = \tfrac{1}{2}[PS''S - PSS'']$$
$$A'' = \tfrac{1}{2}[PS'S - PSS'],$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} A &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta'' - \delta')}{\cos \frac{1}{2}(\delta'' + \delta')} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \\ \operatorname{tang} A' &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta'' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta'' + \delta)} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\lambda' \\ \operatorname{tang} A'' &= \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta)} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\lambda, \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

wo λ und λ' ganz dieselbe Bedeutung wie vorher haben. Da nun:

$$p + PSS' = PS'S - p'$$
$$p' + PS'S'' = PS''S' - p''$$
$$p + PSS'' = PS''S - p'',$$

so findet man leicht, daſs:

$$\begin{aligned} p &= A' + A'' - A \\ p' &= A + A'' - A' \qquad (C) \\ p'' &= A + A' - A''. \end{aligned}$$

Es ist aber auch:

$$\sin t : \sin p = \cos h : \cos \varphi$$
$$\sin (t + \lambda) : \sin p' = \cos h : \cos \varphi,$$

also:

$$\sin t : \sin (t + \lambda) = \sin p : \sin p'$$

oder: $$\frac{\sin t + \sin (t + \lambda)}{\sin t - \sin (t + \lambda)} = \frac{\sin [A' + A'' - A] + \sin [A + A'' - A']}{\sin [A' + A'' - A] - \sin [A + A'' - A']}.$$

Daraus folgt:

$$\tang [t + \tfrac{1}{2}\lambda] \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\lambda = \tang A'' \operatorname{cotang} (A - A')$$

oder, wenn man für $\tang A''$ den Werth aus den Gleichungen (*B*) substituirt:

$$\tang [t + \tfrac{1}{2}\lambda] = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta)} \operatorname{cotang} (A - A'). \qquad (D)$$

Man hat also zuerst aus den Gleichungen (*B*) die Werthe *A*, *A'* und *A''* zu berechnen, dann findet man durch die Gleichungen (*C*) und (*D*) p, p', p'' und t und nachher durch die Gleichungen (*A*) φ und h. Eine Unbequemlichkeit bei diesen Formeln ist die, daſs man in Ungewiſsheit bleibt, in welchen Quadranten man die verschiedenen Winkel zu nehmen hat, da alle durch die Tangenten gefunden werden. Man kann indessen dabei willkührlich verfahren, muſs aber dann $180^0 + t$ statt t nehmen, wenn man für φ und h solche Werthe findet, daſs $\cos \varphi$ und $\sin h$ entgegengesetzte Zeichen haben. Ebenso muſs man, wenn man für φ und h Werthe findet, die gröſser als 90^0 sind, ihren Unterschied von dem zunächst liegenden Vielfachen von 180^0 nehmen. Je nachdem $\sin \varphi$ und $\sin h$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen erhalten, ist die Polhöhe nördlich oder südlich *).

Nach diesen Formeln ist nun die Berechnung des in No. 19 gegebenen Beispiels die folgende. Es war:

$$\tfrac{1}{2}\lambda = \quad 59^0\ 20'\ 32''.55$$
$$\tfrac{1}{2}\lambda' = -\ 4\ \ 57\ \ 58\ .05$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta') = 4^0\ 0'\ 40''.35 \qquad \tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta) = -32^0\ 52'\ 15''.80$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = -36^0\ 52'\ 56''.15$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta'' + \delta') = 18\ 36\ 42\ .35 \qquad \tfrac{1}{2}(\delta'' + \delta) = \quad 55\ \ 29\ \ 38\ .50$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = \quad 51\ \ 28\ \ 58\ .15.$$

*) Monatliche Correspondenz Band XIX pag. 89.

Damit erhält man:

$$A = -2^0\,2'\,1''.33,\quad A' = 84^0\,49'\,4''.07,\quad A'' = -29^0\,44'\,16''.52$$

$$A - A' = -86^0\,51'\,5''.40$$

$$t + \tfrac{1}{2}\lambda = \quad 3 \quad 2 \quad 4\,.47$$

$$t = -56 \quad 18 \quad 28\,.08.$$

Um nun φ und h zu finden, müfste man die Formeln (A) berechnen, die aus dem Dreiecke zwischen Pol, Zenith und erstem Sterne hergeleitet sind. Da in demselben aber zu kleine Winkel vorkommen, so ist es vortheilhafter, das vom zweiten Sterne, dem Pole und dem Zenith gebildete Dreieck aufzulösen, mithin die folgenden Formeln zu berechnen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi + h) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(t' + p')}{\cos\tfrac{1}{2}(t' - p')}\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\delta')$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi - h) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(t' - p')}{\sin\tfrac{1}{2}(t' + p')}\operatorname{cotang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\delta').$$

Nun ist:

$$t' = t + \lambda = 62^0\,22'\,37''.02$$

$$p' = A + A'' - A' = 243^0\,24'\,38''.08,$$

und hiermit erhält man:

$$\varphi = \quad 30^0\,4'\,23''.73$$

$$h = 149 \quad 1 \quad 45\,.58$$

oder, wenn man für h das Complement zu 180^0 nimmt:

$$h = \quad 30\;58\;14\,.42,$$

fast genau dieselben Werthe, wie sie die vorige Rechnung ergab.

21. Man kann die Cagnolischen Formeln auch leicht auf analytischem Wege ableiten, indem man von den drei Gleichungen ausgeht, die man für jeden Stern nach den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie erhält:

$$\left.\begin{aligned}\sin h &= \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t\\ \cos h\,\sin p &= \cos\varphi\sin t\\ \cos h\,\cos p &= \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t\end{aligned}\right\}(a)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin h &= \sin\varphi\sin\delta' + \cos\varphi\cos\delta'\cos(t+\lambda)\\ \cos h\sin p' &= \cos\varphi\sin(t+\lambda)\\ \cos h\cos p' &= \sin\varphi\cos\delta' - \cos\varphi\sin\delta'\cos(t+\lambda)\end{aligned}\right\}(b)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin h &= \sin\varphi\sin\delta'' + \cos\varphi\cos\delta''\cos(t+\lambda')\\ \cos h\sin p'' &= \cos\varphi\sin(t+\lambda')\\ \cos h\cos p'' &= \sin\varphi\cos\delta'' - \cos\varphi\sin\delta''\cos(t+\lambda')\end{aligned}\right\}(c)$$

Zieht man die erste der Gleichungen (b) von der ersten der Gleichungen (a) ab und führt $\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) + \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')$ statt δ und $\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) - \tfrac{1}{2}(\delta - \delta')$ statt δ' ein, so erhält man die

vorher in No. 18 gefundene Gleichung (α). Behandelt man auf dieselbe Weise die dritten der Gleichungen (a) und (b), so findet man:

$$\cos h \sin \tfrac{1}{2}(p'+p) \sin \tfrac{1}{2}(p'-p) = \sin \varphi \sin \tfrac{1}{2}(\delta'+\delta) \sin \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$$
$$- \cos \varphi \sin \tfrac{1}{2}(\delta'+\delta) \cos \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) \sin (t+\tfrac{1}{2}\lambda) \sin \tfrac{1}{2}\lambda$$
$$+ \cos \varphi \cos \tfrac{1}{2}(\delta'+\delta) \sin \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) \cos (t+\tfrac{1}{2}\lambda) \cos \tfrac{1}{2}\lambda,$$

und wenn man aus dieser und der Gleichung (α) $\sin \varphi$ eliminirt, indem man die erstere mit $\cos \frac{1}{2}(\delta'+\delta)$, die Gleichung ($\alpha$) mit $\sin \frac{1}{2}(\delta'+\delta)$ multiplicirt:

$$\cos h \cos \tfrac{1}{2}(\delta'+\delta) \sin \tfrac{1}{2}(p'+p) \sin \tfrac{1}{2}(p'-p) = \cos \varphi \sin \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) \cos (t+\tfrac{1}{2}\lambda) \cos \tfrac{1}{2}\lambda. \quad (d)$$

Subtrahirt man nun die zweiten der Gleichungen (a) und (b), so wird:

$$\cos h \cos \tfrac{1}{2}(p'+p) \sin \tfrac{1}{2}(p'-p) = \cos \varphi \cos (t+\tfrac{1}{2}\lambda) \sin \tfrac{1}{2}\lambda,$$

mithin erhält man einfach:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p'+p) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta'+\delta)} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\lambda = \operatorname{tang} A''.$$

Aehnliche Formeln erhält man aus den Verbindungen der entsprechenden Gleichungen aus (a) und (c) und (b) und (c), die man wegen der Symmetrie der Formeln gleich hinschreiben kann, nämlich:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p''+p) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta''-\delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta''+\delta)} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\lambda' = \operatorname{tang} A'$$

$$\text{und} \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p''+p') = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta''-\delta')}{\cos \frac{1}{2}(\delta''+\delta')} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = \operatorname{tang} A.$$

Addirt man endlich die zweiten der Gleichungen (a) und (b), so wird:

$$\cos h \sin \tfrac{1}{2}(p'+p) \cos \tfrac{1}{2}(p'-p) = \cos \varphi \sin (t+\tfrac{1}{2}\lambda) \cos \tfrac{1}{2}\lambda,$$

woraus man in Verbindung mit (d) erhält:

$$\operatorname{tang}(t+\tfrac{1}{2}\lambda) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta'+\delta)} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}(p'-p),$$

$$\text{wo } \tfrac{1}{2}(p'-p) = A - A' \text{ ist.}$$

Nachdem aber für einen Stern δ, t und p bekannt ist, so findet man nach den Napier'schen Analogien für die Berechnung von φ und h die folgenden Formeln:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi+h) = \frac{\cos \frac{1}{2}(t+p)}{\cos \frac{1}{2}(t-p)} \operatorname{cotang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varphi-h) = \frac{\sin \frac{1}{2}(t-p)}{\sin \frac{1}{2}(t+p)} \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta).$$

IV. Bestimmung der Zeit und der Polhöhe durch die Beobachtung der Azimute der Sterne.

22. Beobachtet man die Uhrzeit, zu welcher ein bekannter Stern ein bestimmtes Azimut hat, so läſst sich daraus, wenn man die Polhöhe kennt, der Stand der Uhr finden, weil man aus der Polhöhe, dem Azimut und der Declination des Sterns den Stundenwinkel berechnen kann. Macht man die Beobachtung im Meridian, so bedarf man weder der Kenntniſs der Polhöhe noch der der Declination, zugleich ist die Beobachtung dann am vortheilhaftesten, weil die Aenderung des Azimuts am gröſsten ist.

Differenzirt man aber die Gleichung:

$$\cot A \sin t = -\cos\varphi \tan\delta + \sin\varphi \cos t,$$

so erhält man oder auch nach der dritten der Formeln (11) in No. 9 der Einleitung:

$$\cos h\, dA = -\sin A \sin h\, d\varphi + \cos\delta \cos p \,.\, dt,$$

oder da für Beobachtungen im Meridiane:

$$\sin A = 0, \ \cos p = 1$$

und:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta$$

ist, wenigstens für Sterne, welche südlich vom Zenith culminiren:

$$dt = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}\, dA.$$

Daraus sieht man also, daſs man, um die Zeit durch Beobachtung der Sterne im Meridiane zu bestimmen, solche Sterne auswählen muſs, welche nahe durch das Zenith gehen, weil im Zenith der Fehler des Azimuts keinen Einfluſs auf die Zeitbestimmung hat.

Ist dann α die Rectascension des Sterns und u die Uhrzeit der Beobachtung, so ist, wenn die Uhr nach Sternzeit geht, $\alpha - u$ unmittelbar gleich dem Stande der Uhr gegen Sternzeit. Geht aber die Uhr nach mittlerer Zeit, so muſs man die Sternzeit der Culmination oder die Rectascension des Sterns erst in die mittlere Zeit m der Culmination verwandeln und erhält dann den Stand der Uhr gegen mittlere Zeit gleich $m - u$.

Für Sterne, welche nicht durch das Zenith gehen, hängt nun die Genauigkeit der Zeitbestimmung von der Genauigkeit der angenommenen Richtung des Meridians ab. Wenn aber der Fehler in der Richtung des Meridians nur klein ist, so kann man denselben leicht durch die Beobachtung zweier Sterne, von denen der eine nahe am Zenith, der andre nahe am Horizonte culminirt, bestimmen und den Uhrstand von diesem Fehler befreien. Ist nämlich ΔA das nahe mit der Richtung des Meridians zusammenfallende Azimut, in welchem man die Sterne beobachtet hat, so werden auch die dazu gehörenden Stundenwinkel $\Theta - \alpha$ und $\Theta' - \alpha'$ kleine Gröſsen und zwar nach dem Vorigen gleich:

$$\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}\,\Delta A$$

und:

$$\frac{\sin(\varphi - \delta')}{\cos\delta'}\,\Delta A.$$

Man hat daher für die beiden Sterne, da $\Theta = u + \Delta u$ ist, die folgenden Gleichungen:

$$\alpha = u + \Delta u - \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta}\,\Delta A$$

und:

$$\alpha' = u' + \Delta u - \frac{\sin(\varphi - \delta')}{\cos\delta'}\,\Delta A,$$

aus denen man sowohl ΔA als auch Δu bestimmen kann. Ist das Instrument so eingerichtet, daſs man nicht nur in dem Azimut ΔA, sondern auch in dem Azimut $180^0 + \Delta A$ beobachten kann, so erhält man ΔA noch genauer, wenn man zwei Sterne auswählt, von denen der eine dem Aequator, der andre dem Pole nahe steht, weil in der Gleichung für den letzteren der Coefficient von ΔA sehr groſs wird und zugleich das entgegengesetzte Zeichen erhält *).

Beispiel. An dem Mittagsfernrohre der Bilker Sternwarte wurden die folgenden Durchgänge durch den mittleren

---

*) Hierbei ist vorausgesetzt, daſs das Instrument so berichtigt ist, daſs die Collimationslinie des Fernrohrs wirklich einen Verticalkreis beschreibt. Der Fall, wo dies nicht stattfindet, ist in No. 22 des siebenten Abschnitts behandelt.

Faden beobachtet, ehe dasselbe genau in den Meridian gebracht war:

$$\alpha \text{ Aurigae} \quad 5^h 6^m 27^s.72$$
$$\beta \text{ Orionis} \quad 5\ 8\ 12\ .71.$$

Da die Rectascensionen und Declinationen beider Sterne die folgenden waren:

$$\alpha \text{ Aurigae} \quad 5^h 5^m 33^s.25 \quad +45^0\ 50'.3$$
$$\beta \text{ Orionis} \quad 5\ 7\ 17\ .33 \quad -\ 8\ 23.1$$

und die Polhöhe gleich $51^0\ 12'.5$ ist, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$-54^s.47 = \Delta u - 0.13433\,\Delta A$$
$$-55\ .38 = \Delta u - 0.87178\,\Delta A,$$

durch deren Auflösung man findet:

$$\Delta u = -54^s.30$$

und:

$$\Delta A = +1^s.23.$$

23. Zeitbestimmungen durch Beobachtungen in einem bestimmten Azimute kann man nach Olbers's Vorschlag einfach durch Beobachtung des Verschwindens der Fixsterne hinter senkrechten terrestrischen Gegenständen erhalten. Ein solcher Gegenstand mufs natürlich hoch und beträchtlich vom Beobachter entfernt sein, damit man das Bild desselben im Fernrohr zugleich mit dem des Sterns scharf sieht und das Verschwinden plötzlich erfolgt. Ferner mufs das Fernrohr, dessen man sich zu diesen Beobachtungen bedient, nur eine schwache Vergröfserung haben und sich immer genau in derselben Lage befinden.

Kennt man nun für irgend einen Tag durch andre Methoden die Sternzeit des Verschwindens des Sterns hinter dem senkrechten Objecte, so findet man durch die Beobachtung an einer nach Sternzeit gehenden Uhr an anderen Tagen immer unmittelbar den Stand derselben, weil der Stern, solange er seinen Ort am Himmel nicht ändert, auch alle folgenden Tage zu eben derselben Sternzeit verschwindet. Gebraucht man aber bei diesen Beobachtungen eine nach mittlerer Zeit regulirte Uhr, so mufs man noch auf das Voreilen der Sternzeit gegen mittlere Zeit oder auf die sogenannte Acceleration der Fixsterne Rücksicht nehmen, indem der Stern vermöge derselben an jedem Tage um $0^h\ 3^m\ 55^s.909$ früher verschwindet.

Aendert sich die Rectascension des Sterns, so wird dadurch die Sternzeit des Verschwindens um eben so viel geändert, weil man den Stern immer in demselben Azimute, also auch in derselben Höhe und demselben Stundenwinkel beobachtet. Wenn sich dagegen die Declination ändert, so wird dadurch der Stundenwinkel, welchen der Stern in dem bestimmten Azimute hat, ein anderer, und man hat nach den Differentialformeln in No. 8 des ersten Abschnitts, da dA und $d\varphi$ für diesen Fall gleich Null sind:

$$d\delta = \cos p\, dh$$
$$\cos\delta\, dt = -\sin p\, dh,$$

mithin auch:

$$dt = -\frac{d\delta\,.\,\mathrm{tang}\, p}{\cos\delta},$$

wo p den parallactischen Winkel bezeichnet.

Aendert sich also die Rectascension und Declination des Sterns um $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, so ist die neue Sternzeit des Verschwindens gleich der früheren:

$$+\frac{\Delta\alpha}{15} - \frac{\Delta\delta}{15}\frac{\mathrm{tang}\, p}{\cos\delta}.$$

So hatte Olbers gefunden, dafs am 6. September 1800 der Stern δ Coronae hinter einer Thurmmauer, deren Azimut $64^0\,56'\,21''.4$ war, nach mittlerer Zeit um $11^h\,23^m\,18^s.3$, oder um $22^h\,26^m\,21^s,78$ Sternzeit verschwand. Am 12. September beobachtete er das Verschwinden um $10^h\,49^m\,21^s.0$. Da nun $6\times 3^m\,55^s.909$ gleich $23^m\,35^s.4$ ist, so hätte der Stern um $10^h\,59^m\,42^s.9$ verschwinden sollen, es war mithin der Stand der Uhr gegen mittlere Zeit gleich $+10^m\,21^s.9$.

Den 6. September 1801 war:

$$\Delta\alpha = +42''.0$$

und:

$$\Delta\delta = -13''.2,$$

und da:

$$p = 37^0\,31'$$

und:

$$\delta = +26^0\,41',$$

so war:

$$\Delta\delta\frac{\mathrm{tang}\, p}{\cos\delta} = -11''.35$$

mithin die ganze Correction $+53''.35$ oder $3^s.56$. Der Stern

δ Coronae mufste also den 6. Septbr. 1801 um $22^h\,26^m\,25^s.34$ Sternzeit verschwinden *).

24. Kennt man die Zeit, so kann man durch die Beobachtung eines bekannten Sterns in einem bestimmten Azimute die Polhöhe bestimmen, da man die Gleichung hat:

$$\operatorname{cotang} A \sin t = -\cos\varphi \operatorname{tang}\delta + \sin\varphi\cos t.$$

Durch Differenziren derselben erhält man:

$$\sin A\, d\varphi = -\operatorname{cotang} h\, dA + \frac{\cos\delta\cos p}{\sin h}\, dt + \frac{\sin p}{\sin h}\, d\delta.$$

Um also die Polhöhe durch Azimutalbeobachtungen möglichst genau zu bestimmen, mufs man die Sterne immer nahe im ersten Verticale beobachten, weil für diesen Fall $\sin A$ ein Maximum ist. Zugleich mufs man einen solchen Stern auswählen, der nahe durch das Zenith des Beobachtungsortes geht, indem dann die Coefficienten von dA und von dt sehr klein werden, da:

$$\cos\delta\cos p = \sin\varphi\cos h + \cos\varphi\sin h\cos A.$$

Fehler im Azimut und in der Zeit haben also im Zenith keinen Einflufs; da aber $\sin p = 1$ ist, so wird ein Fehler in der zum Grunde gelegten Declination des Sterns genau denselben Fehler in der Polhöhe hervorbringen.

Beobachtet man nun blos einen Stern in einem bestimmten Azimute, so mufs man dies Azimut selbst kennen. Nimmt man aber an, dafs man zwei Sterne beobachtet hat, so hat man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{cotang} A \sin t &= -\cos\varphi \operatorname{tang}\delta + \sin\varphi\cos t\\ \operatorname{cotang} A' \sin t' &= -\cos\varphi \operatorname{tang}\delta' + \sin\varphi\cos t'.\end{aligned} \qquad (a)$$

Multiplicirt man hier die obere Gleichung mit $\sin t'$, die untere mit $\sin t$, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sin t \sin t' \frac{\sin(A'-A)}{\sin A \sin A'} &= \cos\varphi\,[\operatorname{tang}\delta' \sin t - \operatorname{tang}\delta \sin t']\\ &\quad + \sin\varphi\sin(t'-t),\end{aligned}$$

oder da:

$$\cos\delta\sin t = \cos h\sin A,$$

auch:

$$\begin{aligned}\cos h\cos h'\sin(A'-A) &= \cos\varphi\,[\cos\delta\sin\delta'\sin t - \sin\delta\cos\delta'\sin t']\\ &\quad + \sin\varphi\sin(t'-t)\cos\delta\cos\delta'.\end{aligned} \qquad (b)$$

Man führe nun die folgenden Hülfsgröfsen ein:

$$\begin{aligned}\sin(\delta'+\delta)\sin\tfrac{1}{2}(t'-t) &= m\sin M\\ \sin(\delta'-\delta)\cos\tfrac{1}{2}(t'-t) &= m\cos M.\end{aligned} \qquad (A)$$

*) Zach, monatliche Correspondenz, Band III. pag. 124 sqq.

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit $\cos \frac{1}{2}(t'+t)$, die andere mit $\sin \frac{1}{2}(t'+t)$, so findet man, wenn man die zweite von der ersteren abzieht:

$$m \sin [\tfrac{1}{2}(t'+t) - M] = \sin \delta' \cos \delta \sin t - \cos \delta' \sin \delta \sin t'.$$

Multiplicirt man dagegen die obere Gleichung mit $\cos \frac{1}{2}(t'-t)$, die untere mit $\sin \frac{1}{2}(t'-t)$ und zieht die erstere von der zweiten ab, so erhält man:

$$m \sin [\tfrac{1}{2}(t'-t) - M] = -\sin \delta \cos \delta' \sin (t'-t).$$

Es wird daher aus der Gleichung (b) die folgende:

$$\cos h \cos h' \sin (A'-A) = m \cos \varphi \sin [\tfrac{1}{2}(t'+t) - M]$$
$$- m \sin \varphi \sin [\tfrac{1}{2}(t'-t) - M] \operatorname{cotang} \delta.$$

Nimmt man nun an, dafs die beiden Sterne in demselben Azimute oder in zwei um 180° verschiedenen Azimuten beobachtet sind, so wird in beiden Fällen $\sin (A'-A) = 0$, mithin:

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \delta \frac{\sin [\frac{1}{2}(t'+t) - M]}{\sin [\frac{1}{2}(t'-t) - M]}. \qquad (B)$$

In diesem Falle braucht man also das Azimut selbst, in welchem man beobachtet hat, nicht zu kennen, indem man allein aus den Beobachtungszeiten und den Declinationen beider Sterne nach den Formeln (A) und (B) die Polhöhe berechnen kann.

Hat man beide Male denselben Stern beobachtet, so werden die Formeln noch einfacher. Denn da für diesen Fall aus der zweiten der Formeln (A) $M = 90^0$ folgt, so wird:

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \delta \, . \frac{\cos \frac{1}{2}(t'+t)}{\cos \frac{1}{2}(t'-t)}. \qquad (C)$$

Für den allgemeinen Fall, wo angenommen ist, dafs man zwei Sterne in zwei verschiedenen Azimuten beobachtet hat, sind die beiden Differentialgleichungen die folgenden:

$$\cos h \, dA = \sin p \, d\delta + \cos \delta \cos p \, dt - \sin h \sin A \, d\varphi$$
$$\cos h' \, dA' = \sin p' \, d\delta' + \cos \delta' \cos p' \, dt' - \sin h' \sin A' \, d\varphi.$$

Führt man auch hier den Unterschied der Azimute ein und multiplicirt defshalb die obere Gleichung mit $\cos h'$, die untere mit $\cos h$ und zieht dieselben von einander ab, so erhält man:

$$\cos h \cos h' \, d(A'-A) = -\cos h' \cos \delta \cos p \, dt + \cos h \cos \delta' \cos p' \, dt'$$
$$- [\sin h' \cos h \sin A' - \sin h \cos h' \sin A] \, d\varphi$$
$$+ \cos h \sin p' \, d\delta' - \cos h' \sin p \, d\delta.$$

Da nun $dt = du + d(\Delta u)$ und $dt' = du' + d(\Delta u)$, wo du der bei der Beobachtung der Durchgangszeit begangene

Fehler und $d(\Delta u)$ der Fehler des Standes der Uhr ist, so erhält man, wenn man diese Werthe für dt und dt' substituirt und zugleich $A' = 180^0 + A$ setzt *):

$$\sin A\, d\varphi - \cos\varphi \cos A\, d(\Delta u) = \frac{\cos h \cos h'}{\sin(h'+h)} [d(A'-A) - \sin\varphi\, d(u'-u)]$$
$$+ \frac{\cos\varphi \cos A \sin h \cos h'}{\sin(h'+h)} du + \frac{\cos\varphi \cos A \sin h' \cos h}{\sin(h'+h)} du'$$
$$- \frac{\sin p' \cos h}{\sin(h'+h)} d\delta' + \frac{\sin p \cos h'}{\sin(h'+h)} d\delta.$$

Daraus sieht man also wieder, dafs man am Vortheilhaftesten Sterne im ersten Verticale beobachtet. Dann wird nämlich der Coefficient von $d\varphi$ ein Maximum und die Fehler des Standes der Uhr und der beobachteten Durchgangszeiten werden Null, sodafs im Resultate nur der Unterschied der Fehler der beobachteten Uhrzeiten sowie die Gröfse, um welche der Unterschied der beiden Azimute gröfser oder kleiner als 180^0 war und endlich der Fehler der Declination bleiben. Da nun für den Fall, dafs man denselben Stern im ersten Verticale im Osten und Westen beobachtet hat, $h = h'$ und ebenfalls $\sin p' = - \sin p$ ist, so erhält man:

$$d\varphi = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotang} h\, [d(A'-A) - \sin\varphi\, d(u'-u)] + \frac{\sin p}{\sin h} d\delta,$$

oder auch, weil für den ersten Vertical nach No. 26 des ersten Abschnitts

$$\sin h = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi} \quad \text{und} \quad \sin p = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}$$

ist:

$$d\varphi = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotang} h\, [d(A'-A) - \sin\varphi\, d(u'-u)] + \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta} d\delta.$$

Aus dieser Gleichung sieht man wieder, dafs es am Vortheilhaftesten ist, wenn man Sterne beobachtet, welche dem Zenith so nahe als möglich vorbeigehen, weil dann cotang h sehr klein wird, also Fehler in $A' - A$ und $u' - u$ nur einen sehr geringen Einflufs auf die Polhöhe haben. Der Coefficient von $d\delta$ wird aber in diesem Falle nahe gleich Eins, da

---

*) Wenn man nämlich für $\cos\delta \cos p$ und $\cos\delta' \cos p'$ die Werthe aus den folgenden Gleichungen substituirt:

$$\cos\delta \cos p = \sin\varphi \cos h + \cos\varphi \sin h \cos A$$
$$\cos\delta' \cos p' = \sin\varphi \cos h' - \cos\varphi \sin h' \cos A.$$

die Declination derjenigen Sterne, welche durch das Zenith gehen, gleich φ ist. Der Fehler der Declination bleibt also in diesem Falle vollständig im Resultate. Handelt es sich aber blos darum, den Breitenunterschied zweier Orte zu bestimmen, welche einander so nahe liegen, dafs man denselben Stern an jedem der beiden Orte mit Vortheil beobachten kann, so erhält man denselben durch den Unterschied der beiden nach dieser Methode bestimmten Polhöhen gänzlich frei von dem Fehler der Declination *).

Beispiel. Der Stern β Draconis geht sehr nahe durch das Zenith von Berlin. Dieser Stern wurde nun am mittleren Faden eines auf der Sternwarte im ersten Verticale aufgestellten Passageninstruments beobachtet. Die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen betrug $17^m\, 21^s.75$, es war also:

$$\tfrac{1}{2}(t'-t) = 4^0\, 20'\, 26''.25$$

ferner:

$$\delta = 52^0\, 25'\, 26''.77.$$

Da nun für den Fall, dafs man im ersten Verticale beobachtet, $\frac{1}{2}(t'+t) = 0$ ist, so erhält man aus (C) die einfache Formel zur Berechnung der Polhöhe:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos\frac{1}{2}(t'-t)} \;{}^{**}),$$

wonach man hier findet:

$$\varphi = 52^0\, 30'\, 13''.04.$$

Die Differentialformel wird endlich:

$$d\varphi = +0.02310\,[d(A'-A) - 0.7934\, d(u'-u)] + 0.99925\, d\delta.$$

25. Beobachtet man zwei Sterne in demselben Verticalkreise, so kann man, wenn man die Polhöhe des Beobachtungsortes kennt, dadurch die Zeit finden, indem man die Gleichung hat:

$$\sin\left[\tfrac{1}{2}(t'+t) - M\right] = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\delta}\sin\left[\tfrac{1}{2}(t'-t) - M\right], \qquad (A)$$

---

*) Hier ist wieder vorausgesetzt, dafs das Passageninstrument soweit berichtigt ist, dafs die Collimationslinie des Fernrohrs einen Verticalkreis beschreibt. Für den Fall, dafs dies nicht stattfindet, vergleiche No. 26 des siebenten Abschnitts.

**) Diese Formel für Beobachtungen im ersten Vertical erhält man auch ganz einfach durch die Betrachtung des in diesem Falle rechtwinkligen Dreiecks zwischen dem Pole, dem Zenith und dem Sterne.

wo:

$$t = u + \Delta u - \alpha$$
$$t' = u' + \Delta u - \alpha'$$

und:

$$m \sin M = \sin(\delta' + \delta) \sin \tfrac{1}{2}(t' - t)$$
$$m \cos M = \sin(\delta' - \delta) \cos \tfrac{1}{2}(t' - t).$$

Da man $t' - t$, d. h. die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen, in Sternzeit ausgedrückt kennt, so findet man daraus $t' + t$, mithin t und t'.

Die in No. 22 gegebene Differentialgleichung zeigt, daſs, wenn man die Zeit durch Azimutalbeobachtungen bestimmen will, man die Sterne in der Nähe des Meridians beobachten muſs, weil dann der Coefficient von $d\varphi$ ein Minimum, der von dt dagegen ein Maximum wird. Das Azimut selbst läſst sich ebenfalls durch diese Beobachtungen bestimmen. Es ist nämlich:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\cos\delta \sin t}{-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t},$$

woraus in Verbindung mit der Gleichung

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\delta \frac{\sin[\frac{1}{2}(t' + t) - M]}{\sin[\frac{1}{2}(t' - t) - M]}$$

folgt:

$$\sin\varphi \operatorname{tang} A = \frac{\sin t \,.\, \sin[\frac{1}{2}(t' + t) - M]}{-\sin[\frac{1}{2}(t' - t) - M] + \cos t \sin[\frac{1}{2}(t' + t) - M]}.$$

Setzt man hier endlich:

$$\tfrac{1}{2}(t' + t) - M - t \text{ statt } \tfrac{1}{2}(t' - t) - M,$$

so erhält man leicht:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang}[\frac{1}{2}(t' + t) - M]}{\sin\varphi}. \qquad (B)$$

Nimmt man die Zeit in beiden Beobachtungen als gleich an, sodaſs:

$$t' - t = \alpha - \alpha',$$

so erhält man durch die Formel (A) die Zeit, wann sich zwei Sterne in einem und demselben Verticalkreise befinden.

Die Oerter von α Lyrae und α Aquilae für den Anfang von 1849 sind z. B.

$$\alpha \text{ Lyrae} \quad \alpha = 18^h 31^m 47^s .75 \quad \delta = +38^0\, 38'52''.2$$
$$\alpha \text{ Aquilae} \quad \alpha' = 19 \;\; 43 \;\; 23 \;.43 \quad \delta' = +\;8 \;\; 28 \;30 \;.5.$$

Es ist also:

$$t' - t = -1^h 11^m 35^s.68 = -17^0\, 53'\, 55''.2.$$

Nimmt man daher für die Polhöhe 52° 30′ 16″ an, so erhält man:

$$M = 192^\circ\, 55'\, 53''.0$$
$$\tfrac{1}{2}(t' - t) - M = 158 \quad 7 \quad 9\;.4$$

und findet damit:

$$\tfrac{1}{2}(t' + t) - M = 142^\circ\, 35'\, 38''.6,$$

also:

$$\tfrac{1}{2}(t' + t) = -24^\circ\, 28'\, 28''.4$$
$$= -1^h\, 37^m\, 53^s.9$$

und:

$$t = -1^h\, 2^m\, 6^s.1, \quad t' = -2^h\, 13^m\, 41^s.7.$$

Die Sternzeit, zu welcher sich beide Sterne unter der Polhöhe von 52° 30′ 16″ in einem Verticalkreise befinden, ist also:

$$\Theta = 17^h\, 29^m\, 42^s.$$

Bemerkt man nun den Augenblick, wo irgend zwei Sterne in einem Verticalkreise stehen, wozu man nur die Bedeckung der beiden Sterne durch einen senkrecht herabhängenden Faden zu beobachten braucht, so kann man also immer eine wenigstens beiläufige Zeitbestimmung machen, wenn man die Zeit nach dem Vorigen aus den bekannten Oertern der Sterne und der Polhöhe berechnet. Bequem für die Beobachtung ist es, als einen der Sterne den Polarstern zu wählen, weil dieser seinen Ort langsam ändert.

V. Bestimmung des Winkels zwischen den Meridianen zweier verschiedenen Orte auf der Erdoberfläche oder des Unterschiedes ihrer geographischen Längen.

26. Kennt man die Zeiten, welche Beobachter an verschiedenen Orten der Erdoberfläche in einem und demselben Augenblicke zählen, so ist dadurch an jedem Orte der Stundenwinkel des Frühlingspunkts gegeben. Der Unterschied dieser beiden Stundenwinkel oder der Unterschied der an beiden Orten in demselben Augenblicke beobachteten Zeiten ist aber gleich dem Bogen des Aequators, welcher zwischen den Meridianen beider Orte enthalten ist oder gleich dem Unterschiede ihrer geographischen Längen und da die täg-

liche Umdrehung der Himmelskugel von Osten nach Westen vor sich geht, so liegt ein Ort, dessen Zeit in einem bestimmten Augenblicke hinter der eines andern Ortes zurück ist, westlich von diesem Orte, östlich dagegen, wenn seine Zeit der des andern Ortes voraus ist. Als ersten Meridian, von welchem aus man die übrigen nach Osten und Westen zu rechnet, wählt man gewöhnlich den Meridian einer Sternwarte, z. B. den von Paris oder von Greenwich. In der Geographie zählt man dagegen die Längen vom Meridiane von Ferro ab, dessen westliche Länge von Paris $20^0\ 0'$ oder $1^h\ 20^m$ beträgt.

Zur Angabe eines und desselben Zeitmoments an verschiedenen Orten der Erde bedient man sich entweder künstlicher Signale, oder der Beobachtung solcher himmlischer Erscheinungen, welche für alle Orte der Erde in demselben Augenblicke eintreffen. Dergleichen Erscheinungen sind erstens die Mondfinsternisse. Denn da der Mond bei einer Verfinsterung in den Schattenkegel der Erde tritt, also das Sonnenlicht ihm wirklich entzogen wird, so werden Anfang und Ende einer solchen Finsternifs, sowie die Ein- und Austritte der einzelnen Flecken von allen Orten der Erde aus in demselben absoluten Augenblicke gesehen, weil die Zeit, welche das Licht braucht, um den Halbmesser der Erde zu durchlaufen, unmerklich ist. Dasselbe ist der Fall mit den Verfinsterungen der Jupiterssatelliten.

Diese Phänomene wären nun sehr bequem zur Bestimmung der Längenunterschiede, weil diese unmittelbar gleich den Unterschieden der Beobachtungszeiten an den verschiedenen Orten der Erde sind, wenn sich nur das Eintreffen derselben mit gröfserer Schärfe beobachten liefse. Da aber der Schatten der Erde auf der Mondoberfläche immer nur sehr schlecht begrenzt erscheint, sodafs die Beobachtungsfehler hier eine Zeitminute und mehr betragen, und ebenso die Ein- und Austritte der Jupiterssatelliten auch niemals plötzlich erscheinen, also auch nicht mit vollkommener Schärfe beobachtet werden können, so werden diese Phänomene in jetziger Zeit fast gar nicht mehr zur Längenbestimmung angewandt. Will man sich aber der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten zu diesem Zwecke bedienen, so ist es durchaus erforder-

lich, dafs die Beobachter an beiden Orten mit gleich starken Fernröhren versehen sind, und dafs sie eine gleich grofse Anzahl von Ein- und Austritten und zwar nur des ersten Trabanten, dessen Bewegung um den Jupiter am schnellsten ist, beobachten und aus den einzelnen erhaltenen Bestimmungen des Längenunterschiedes das arithmetische Mittel nehmen. Man wird indessen auch bei diesen Vorsichtsmaafsregeln nie auf ein sehr genaues Resultat hoffen können.

Benzenberg hat die Beobachtungen des Verschwindens der Sternschnuppen zur Bestimmung des Längenunterschiedes vorgeschlagen. Diese Phänomene lassen sich nun zwar mit grofser Genauigkeit beobachten, sie haben indessen wieder den Nachtheil, dafs man nicht vorher weifs, wann und in welcher Gegend des Himmels eine Sternschnuppe erscheint. Wenn man also auch an beiden Orten eine grofse Anzahl von Sternschnuppen beobachtet, wird man doch unter denselben nur wenige identische, zu deren Auffindung man überdies schon eine genäherte Kenntnifs des Längenunterschiedes nöthig hat, erhalten.

Sehr genaue Längenunterschiede findet man durch die Beobachtung von künstlichen Signalen, welche man durch die plötzliche Entzündung einer Quantität Pulver giebt. Wiewohl diese Methode nur auf Orte anwendbar ist, deren Entfernung von einander nicht mehr als etwa zehn Meilen beträgt, so kann man doch auch auf diese Weise durch die Verbindung mehrerer Signale Längenunterschiede von entfernteren Orten bestimmen. Es seien nämlich A und B die beiden Orte, deren Längenunterschied l man finden will, und A_1, A_2, A_3 etc. dazwischen liegende Orte, deren unbekannte Längenunterschiede respective l_1, l_2, l_3 etc. sein mögen *). Werden dann an den Orten A_1, A_3, A_5, etc. Signale zu den Ortszeiten t_1, t_3, t_5, etc. gegeben, so sieht der erste Ort A das Signal von A_1 zur Zeit $t_1 - l_1 = \Theta$, der Ort A_2 dagegen zu der Zeit $t_1 + l_2 = \Theta_1$. Ferner sieht der in A_2 befindliche Beobachter das in A_3 gegebene Signal zu der Zeit $t_3 - l_3 = \Theta_2$, der in A_4 stehende dagegen dasselbe Signal zu der Zeit $t_3 + l_4 = \Theta_3$, etc. Da aber die gesuchte Längen-

*) Sodafs $A_1 - A = l_1$, $A_2 - A_1 = l_2$ etc.

differenz l der beiden äufsersten Punkte gleich $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$ ist, wenn der letzte Signalort A_{n-1} ist, oder:

$$l = (\Theta_1 - \Theta) + (\Theta_3 - \Theta_2) + (\Theta_5 - \Theta_4) \text{ etc.},$$

so ist also:

$$l = \Theta_{n-1} - (\Theta_{n-2} - \Theta_{n-3}) - \ldots - (\Theta_2 - \Theta_1) - \Theta.$$

Man braucht daher auf den inneren Stationen, wo die Signale beobachtet werden, keine Zeitbestimmungen zu machen, sondern hat nur den Gang der Uhr zu kennen nöthig. Nur für die beiden äufsersten Orte, deren Längenunterschied bestimmt werden soll, ist eine genaue Zeitbestimmung erforderlich.

Statt der Pulverblitze bedient man sich noch besser des von Gaufs erfundenen Heliotrops, eines Instruments, vermittelst dessen man das Sonnenlicht nach einem entfernten Beobachter hin reflectiren kann. Hat man dann das Heliotrop auf den anderen Beobachter gerichtet, so giebt das plötzliche Verdecken desselben ein Signal ab.

Ist man im Besitze einer guten tragbaren Uhr, so kann man durch unmittelbare Uebertragung der Zeit von einem Orte zum andern den Längenunterschied erhalten, indem man zuerst an dem einen Orte den Stand und Gang der Uhr bestimmt, dann die Uhr nach dem andern Orte überträgt und daselbst wieder eine Zeitbestimmung macht. Hat man nämlich am ersteren Orte den Stand der Uhr gleich Δu beobachtet und bezeichnet man den täglichen Gang mit $\frac{d \cdot \Delta u}{dt}$ so wird der Stand der Uhr nach a Tagen gleich $\Delta u + a \frac{d \cdot \Delta u}{dt}$ sein. Findet man nun für die von der ersten Beobachtungszeit a Tage entfernte Zeit u' durch Beobachtungen an dem andern Orte den Stand der Uhr gleich $\Delta u'$, so hat man, wenn man mit l die östliche Länge des zweiten Beobachtungsortes vom ersten bezeichnet, die Gleichung:

$$u' - l + \Delta u + \frac{d \cdot \Delta u}{dt} a = u' + \Delta u',$$

also

$$l = \Delta u + \frac{d \cdot \Delta u}{dt} a - \Delta u'.$$

Dabei ist nun vorausgesetzt, dafs die Uhr in der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen genau denselben Gang beibehalten hat. Da dies aber in aller Strenge selten oder

nie der Fall sein wird, so mufs man, wenn man die Länge durch diese Methode genau bestimmen will, nicht blos eine Uhr von einem Orte zum andern übertragen, sondern deren so viele als möglich und nachher aus den durch jede Uhr gefundenen Längenunterschieden das Mittel nehmen. Auf diese Weise bestimmte man den Längenunterschied verschiedener Sternwarten z. B. der in Pulkowa und der in Greenwich. Ebenso findet man auf diese Weise die Länge zur See durch Chronometer, deren Gang und Stand gegen die Zeit eines Hafens man vor der Abreise feststellt.

27. Die bei Weitem genaueste Methode der Längenbestimmung ist die mittelst des electrischen Telegraphen, wenn man nämlich statt der vorher erwähnten künstlichen Signale von einer Station zur andern telegraphische Signale sendet. Da diese sich ebenso beobachten lassen wie die vorher erwähnten, so kommt diese Methode mit einigen der im Vorigen erwähnten überein und würde auch keinen weitern Vortheil als die leichte Anwendung haben. Aber in Verbindung mit dem Chronograph übertrifft die Methode alle übrigen bei Weitem an Genauigkeit. Dies ist ein Instrument, welches einem in der Regel um einen Cylinder gespannten Papiere durch die Umdrehung des Cylinders um die Axe mittelst eines Uhrwerks eine gleichförmige Bewegung giebt, und dabei zugleich einen Schreibapparat in einer zur Bewegung des Papiers senkrechten Richtung langsam darüber fortführt, sodafs die auf dem Papier aufliegende Schreibfeder bei jeder Umdrehung des Cylinders über eine andere Stelle des Papiers fortgeht. Ist die Bewegung des Schreibapparats ebenfalls gleichförmig, so beschreibt die Feder also eine Spirale, die, wenn das Papier von dem Cylinder entfernt wird, sich als ein System paralleler Linien zeigt. Der Schreibapparat ist nun mit einem Electromagneten in Verbindung und zwar so, dafs, wenn der Strom für einen Augenblick geöffnet und der Anker von dem Magneten durch eine zu dem Zwecke angebrachte Feder losgerissen wird, die Schreibfeder auf dem Papiere eine deutliche Marke macht. Ist nun der den Electromagneten umkreisende Strom auf solche Weise mit einer Uhr in Verbindung, dafs das Pendel durch irgend eine me-

chanische Vorrichtung den Strom bei jedem Schlage öffnet, so wird dadurch jede Secunde der Uhr auf dem Papiere bezeichnet werden, und wenn, wie dies immer der Fall ist, die Umdrehung des Cylinders in einer Minute vollendet wird, so würde man bei der Abnahme des Papiers eine Reihe von Linien finden, auf deren jeder sechzig Secundenmarken sind, so daſs die denselben Secunden entsprechenden Zeichen in den verschiedenen Minuten senkrecht unter einander liegen. Wenn man dann zuerst den Strom eine Zeitlang geöffnet hat und denselben bei einer gewissen Minute vor dem Schlage der Secunde 0 schlieſst, so würde die erste Secundenmarke auf dem Papier dieser Secunde der Uhr entsprechen, und man kann danach leicht die einem jeden Zeichen entsprechende Secunde der Uhr finden. Ist auſser der Uhr auch ein Schlüssel in der Nähe des Instruments in den Strom eingeschaltet, und giebt der Beobachter in dem Augenblicke, wo derselbe einen Stern am Faden des Instruments sieht, ein Signal durch augenblickliches Oeffnen des Schlüssels, so wird auch dadurch eine Marke auf dem Papier gemacht, und die Zeit der Beobachtung kann leicht durch die Messung der Entfernung dieser Marke von der nächsten Secundenmarke mit groſser Schärfe bestimmt werden.

Wenn nun der Strom auch nach einer andern Sternwarte, deren Länge man bestimmen will, geht und auch dort ein Schlüssel in der Nähe des Instruments in den Strom eingeschaltet ist, so würden auch die Signale des Beobachters auf dieser Station auf dem Chronograph markirt werden, und wenn diese Signale beim Durchgange desselben Sterns durch die Fäden beider im Meridian aufgestellten Instrumente gegeben werden, so würde der Unterschied der Zeiten der beiden Beobachtungen auf dem Papiere des Chronograph gemessen, und wegen der Abweichungen der Fäden der beiden Instrumente vom Meridian und wegen des Ganges der Uhr in der Zwischenzeit der Beobachtungen verbessert, gleich dem Längenunterschiede der beiden Orte sein.

Da der electrische Strom, wenn derselbe groſse Strecken durchläuft, nur schwach ist, so läſst man diesen Hauptstrom, in den die Schlüssel der beiden Beobachter eingeschaltet sind, nicht unmittelbar den Electromagneten des Chronograph um-

kreisen, sondern benutzt denselben auf jeder Station nur zum Oeffnen eines Uebertragers (Relee), durch welchen der auf den Electromagneten des Chronograph wirkende Localstrom geöffnet und geschlossen wird.

Ist dann auf jeder Sternwarte ein Chronograph und die Uhr der Sternwarte in dem Localstrom, so werden auf jeder Sternwarte die Signale der beiden Beobachter und die Secunden der Localuhr registrirt, und jeder Stern giebt also durch jeden der beiden Chronographen eine Längenbestimmung, wenn die abgelesenen Zeiten wegen des Ganges der Localuhr und wegen der Abweichungen der Instrumente vom Meridiane in jeder Beobachtung verbessert sind. Diese auf den beiden Stationen gefundenen Längenunterschiede sind aber nicht vollkommen gleich; da nämlich die Geschwindigkeit der Electricität nicht unendlich grofs ist, so wird, wenigstens wenn die Stationen weit entfernt sind, eine kleine, meſsbare Zeit verflieſsen, bis das am östlichen Orte *A* gegebene Signal am westlichen Orte *B* anlangt; die in *B* registrirte Zeit des Signals wird daher einer Zeit entsprechen, wo der Stern in dem Meridiane eines etwas westlich von *A* gelegenen Ortes war. Der in *B* registrirte Längenunterschied wird daher um die Zeit zu klein gefunden, in welcher die Electricität die Entfernung von *A* nach *B* durchläuft. Dieselbe Zeit wird aber bei dem von *B* nach *A* gegebenen Signale verflieſsen und die in *A* registrirte Zeit des Signals wird der Zeit entsprechen, wo der Stern in dem Meridiane eines etwas westlich von *B* gelegenen Ortes war; der in *A* registrirte Längenunterschied wird daher um die Fortpflanzungszeit des Stroms zu grofs gefunden. Das Mittel der an beiden Orten registrirten Längenunterschiede ist also von dieser Zeit frei, während die halbe Differenz der beiden (wenn man die in *B* gemachte Registrirung von der in *A* gemachten abzieht) gleich dieser Fortpflanzungszeit ist.

Ein einziger Stern, auf diese Weise beobachtet, giebt schon ein Resultat, welches genauer ist als eine einzelne, durch eine andre Methode erreichte Längenbestimmung, und da man die Anzahl der beobachteten Sterne beliebig vermehren kann, so kann man die Genauigkeit aufs Höchste treiben, wenn man nur darauf sieht, daſs die Fehler der Instrumente

mit gleicher Genauigkeit bestimmt sind. Da man dieselben Sterne an beiden Orten beobachtet, so ist der Längenunterschied von den Oertern der Sterne ganz unabhängig.

Wenn die Entfernung zwischen den beiden Stationen grofs ist, so kann man sich nicht immer auf den Strom verlassen, und da dann leicht eine grofse Anzahl von Beobachtungen verloren gehen können, so ist es besser, die Methode so abzuändern, dafs man für eine kurze Zeit, z. B. zu Anfang und beim Schlusse der Beobachtungen, die Uhren in den Hauptstrom einschaltet, sodafs die Secunden beider Uhren auf den Chronographen der beiden Stationen registrirt werden. Wird dann auf jeder Sternwarte der Strom bei einer runden Minute geschlossen, nachdem er wenige Secunden geöffnet war, sodafs man die Uhrzeiten kennt, welchen die verschiedenen Secundenzeichen auf dem Chronograph entsprechen, so giebt jede notirte Secunde eine Vergleichung der beiden Uhren, aus denen allen man das Mittel nimmt. Diese auf beiden Stationen erlangten Uhrvergleichungen sind wieder um die doppelte Fortpflanzungszeit des Stroms verschieden, die sich aus den Uhrvergleichungen mit noch gröfserer Sicherheit bestimmen lassen wird. Schon wenige solcher Vergleichungen der Uhren werden in der Regel genügend sein, da schon die Genauigkeit einer einzelnen Vergleichung gewöhnlich der Sicherheit der Uhrstände gleichkommen wird. Sicher werden wenige Minuten für diese Uhrsignale genügen, und der eigentlich telegraphische Theil der Operation wird somit auf wenige Minuten am Anfange und am Schlufs der Beobachtungen beschränkt sein. Nachdem die Uhrvergleichungen gemacht sind, wird die Uhr und der Beobachtungsschlüssel auf jeder Sternwarte in den Localstrom eingeschaltet und der Stand der Uhr von jedem Beobachter bestimmt. Werden die Uhrstände dann im gehörigen Sinne an die Uhrvergleichungen angebracht, so ergiebt sich der Längenunterschied. Bei der Bestimmung der Uhrstände ist es auch wieder zweckmäfsig, wenn die Beobachter dieselben Sterne benutzen, damit die Bestimmung der Länge von dem Fehler der Rectascensionen der Sterne unabhängig ist.

Aufser den Fehlern, die von einer unrichtigen Annahme der Fehler des Instruments in dem Längenunterschiede er-

zeugt werden, ist das gefundene Resultat auch noch abhängig von der relativen Schnelligkeit, mit welcher die Beobachter ein gegebenes Ereignifs auffassen, oder der persönlichen Gleichung der beiden Beobachter. Dieser Fehler ist aber nicht der Methode eigenthümlich, sondern wirkt auch bei den andern Methoden und zwar in noch gröfserem Maafse ein. Bei dieser Methode hängt der Fehler von der Zeit ab, welche bei jedem Beobachter verfliefst zwischen der Zeit, wenn die Netzhaut des Auges einen Eindruck erhält, und der Zeit, wo der Beobachter sich des Eindrucks bewufst wird und in Folge dessen den Schlüssel andrückt. Ist diese Zeit bei beiden Beobachtern dieselbe, so wird das Resultat der Längenbestimmung offenbar dadurch nicht geändert; ist dagegen die Zeit ungleich oder die persönliche Gleichung nicht Null, so wird auch die Längenbestimmung nach der vorigen Methode um den vollen Betrag dieser Gleichung unrichtig. Man kann indessen den hieraus entstehenden Fehler vollkommen eliminiren (wenigstens wenn man annimmt, dafs die persönliche Gleichung sich nicht ändert), wenn dieselben Beobachter eine andre Längenbestimmung machen, nachdem sie ihre Stationen vertauscht haben; der Unterschied der beiden Längenbestimmungen ist dann die doppelte persönliche Gleichung und das Mittel der beiden frei von derselben. Die Beobachter können aber auch die persönliche Gleichung bestimmen, wenn sie an einem Orte zusammenkommen und Durchgänge an demselben mit mehreren Fäden versehenen Instrumente beobachten, sodafs der eine Beobachter zuerst eine gewisse Anzahl von Fäden, der andre Beobachter die übrigen Fäden beobachtet. Reducirt man dann die beobachteten Zeiten auf den Mittelfaden des Instruments (Abschn. VII No. 20), so wird sich in den Resultaten der beiden Beobachter für verschiedene Sterne ein Unterschied zeigen, der gleich der persönlichen Gleichung ist. Man ändert dann die Beobachtungen noch so ab, dafs nun der zweite Beobachter zuerst die ersten Fäden, nachher der erste Beobachter die übrigen Fäden beobachtet, wo sich die Abweichung im entgegengesetzten Sinne zeigt. Nimmt man dann aus allen beobachteten Abweichungen das Mittel, so erhält man die persönliche Gleichung auch frei von etwaigen Fehlern in den zur Reduc-

tion auf den Mittelfaden angenommenen Fädendistanzen. Nachdem so die persönliche Gleichung bestimmt ist, bringt man dieselbe an den beobachteten Längenunterschied an. Beobachtet der östliche Beobachter um a später als der westliche, hat man daher die persönliche Gleichung $O - W = + a$, so ist die gefundene Längendifferenz um so viel zu klein, und man mufs daher a zur Längendifferenz addiren.

Beispiel. Am 29. Juni 1861 wurde eine Längenbestimmung zwischen den Sternwarten zu Ann Arbor im Staate Michigan und Clinton im Staate New York gemacht, und aus 126 auf beiden Chronographen registrirten Uhrvergleichungen gefunden:

in Ann Arbor $13^h 59^m 3^s.0$ Clinton Uhrzeit $= 19^h 58^m 29^s.56$ Ann Arbor Uhrzeit,
in Clinton $13\ 59\ 3\ .0$ „ „ $= 19\ 58\ 29\ .40$ „ „ „

Die Uhr in Clinton ging nach mittlerer Zeit und die Reduction auf Clintoner Sternzeit war für die gegebene Zeit $+ 6^h 33^m 46^s.07$, während der Stand der Uhr in Ann Arbor gegen Sternzeit $+ 1^m 1^s.87$ war. Damit folgt also nach dem Chronograph in Ann Arbor:

$20^h 32^m 49^s.07$ Clinton Sternzeit $= 19^h 59^m 31^s.43$ Ann Arbor Sternzeit,

und nach dem Chronograph in Clinton:

$20^h 32^m 49^s.07$ Clinton Sternzeit $= 19^h 59^m 31^s.27$.

Es wird mithin der Längenunterschied nach den Ablesungen zu Ann Arbor:

$33^m 17^s.64$,

und nach denen zu Clinton:

$33^m 17^s.80$,

oder im Mittel $33^m 17^s.72$.

Die persönliche Gleichung in diesem Falle war $P - B = + 0^s.04$, und da P der östliche Beobachter war*), so wird der verbesserte Längenunterschied $33^m 17^s.76$.

Anm. Die Beobachtungsmethode mittelst des Chronographen wird gewöhnlich die amerikanische genannt, da sie von Amerikanern erfunden ist. Die Idee dazu rührt von Sears C. Walker und William Bond her, die daher als die Erfinder angesehen werden müssen, obwohl Mitchel das erste Instrument zur Registrirung der Beobachtungen wirklich vollendete.

28. Aufser den Beobachtungen von natürlichen oder künstlichen Signalen, die an den Orten, deren Längenunter-

---

*) Dr. Peters beobachtete zu Clinton, der Verfasser zu Ann Arbor.

schied bestimmt werden soll, zu gleicher Zeit gesehen werden und der Zeitübertragung durch Uhren bedient man sich zur Längenbestimmung auch solcher Phänomene am Himmel, welche zwar nicht für alle Orte der Erde in demselben Zeitmomente eintreffen, die man aber auf ein und dasselbe Zeitmoment so reduciren kann, daſs durch diese Reduction weiter kein Fehler hervorgebracht wird. Die Bestimmung der Länge durch solche Phänomene ist besonders vortheilhaft, weil dieselben der Art sind, daſs sie sich mit groſser Schärfe beobachten lassen und weil sie zugleich für einen groſsen Theil der Erde sichtbar sind, sodaſs dadurch die Längenunterschiede von sehr entfernten Orten bestimmt werden können. Solche Phänomene sind nun die Bedeckungen der Himmelskörper unter einander, also Bedeckungen von Fixsternen und Planeten durch den Mond, Sonnenfinsternisse und Vorübergänge des Mercur und der Venus vor der Sonnenscheibe. Da alle diese Himmelskörper mit Ausnahme der Fixsterne eine Parallaxe haben, die namentlich beim Monde sehr beträchtlich ist, also Beobachtern an verschiedenen Orten der Erdoberfläche in demselben absoluten Zeitmomente an verschiedenen Orten der Himmelskugel erscheinen, so werden die Bedeckungen derselben oder die Berührungen ihrer Ränder für verschiedene Orte nicht gleichzeitig eintreffen. Es bedarf also in diesem Falle einer Correction der Beobachtungen wegen der Parallaxe, indem man die Zeit kennen muſs, zu welcher die Himmelskörper einander bedeckt hätten, wenn dieselben keine Parallaxe gehabt hätten oder vielmehr, wenn dieselben vom Mittelpunkte der Erde aus beobachtet wären.

Man hat also zuerst die Längen- und Breitenparallaxen sowie den scheinbaren Halbmesser der beiden Gestirne für die Zeit der beobachteten Ein- oder Austritte zu berechnen (oder auch die Parallaxe in Rectascension und Declination, wenn man lieber diese Coordinaten anwenden will). Dann erhält man in dem Dreiecke zwischen dem Pole der Ecliptic und den Mittelpunkten beider Gestirne, in welchem die drei Seiten (nämlich die scheinbaren Ecliptic-Poldistanzen beider Gestirne und die Summe oder Differenz ihrer Halbmesser) bekannt sind, den Winkel am Pole d. h. den Unterschied der scheinbaren Längen beider Gestirne zur Zeit der Beobach-

tung, woraus man durch Anbringung der Längenparallaxen den vom Mittelpunkte der Erde gesehenen Längenunterschied beider Gestirne für die Zeit der Beobachtung findet. Aus der Gröſse dieses Winkels und der bekannten relativen Geschwindigkeit beider Gestirne erhält man dann die Zeit der wahren Conjunction d. h. die Zeit, wann die beiden Gestirne vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen dieselbe Länge hatten und zwar ausgedrückt in Zeit des Beobachtungsortes. Hat man nun auch an einem andern Orte eine Bedeckung beider Gestirne oder eine Berührung ihrer Ränder beobachtet, so erhält man auf dieselbe Weise die Zeit der wahren Conjunction in Zeit dieses Ortes ausgedrückt. Der Unterschied beider Zeiten ist dann der Unterschied der geographischen Längen der beiden Orte.

Wenn nun die Zeiten der Berührungen an beiden Orten vollkommen genau beobachtet wären, so würde man auf diese Weise eine genaue Längenbestimmung erhalten, wenn die Data, welche man zur Reduction auf den Mittelpunkt der Erde anwendet, ganz genau waren. Da dieselben indessen immer kleinen Fehlern unterworfen sind, so muſs man noch den Einfluſs derselben auf das Resultat bestimmen und diese Fehler selbst durch die Combination der Beobachtungen zu eliminiren suchen.

Dies ist die ältere Methode, deren man sich früher immer bediente, um den Längenunterschied der Orte aus Beobachtungen von Verfinsterungen herzuleiten. Jetzt verfährt man auf etwas andre Weise. Indem man nämlich von der Gleichung ausgeht, welche die Bedingung der Berührung der Ränder der beiden Gestirne ausdrückt und nur geocentrische Gröſsen enthält, entwickelt man eine andre Gleichung, deren unbekannte Gröſse die Conjunctionszeit oder, da man diese selbst nicht zu kennen braucht, unmittelbar der Längenunterschied ist.

29. Man sieht die Ränder zweier Gestirne in Berührung, wenn das Auge sich in der beide Gestirne einhüllenden krummen Fläche befindet. Da nun die Himmelskörper so nahe kugelförmig sind, daſs man auf die kleine Abweichung von der Kugelgestalt hier keine Rücksicht zu nehmen hat,

so wird die einhüllende Fläche die Oberfläche eines geraden Kegels sein und zwar wird es immer zwei einhüllende Doppelkegel geben, indem die Spitze des einen zwischen beiden Gestirnen, die des andern, vom gröfseren Gestirne aus gerechnet, jenseits des kleineren liegt. Befindet sich das Auge in der Oberfläche des ersteren Kegels, so sieht man die äufsere Berührung der beiden Gestirne, im anderen Falle die innere.

Die Gleichung des geraden Kegels wird nun am einfachsten, wenn man dieselbe auf ein rechtwinkliges Axensystem bezieht, von welchem die eine Axe mit der Axe des Kegels selbst zusammenfällt. Ist dann der Kegel ein solcher, dessen Durchschnitte senkrecht auf die Axe Kreise sind, so ist die Gleichung der Oberfläche desselben bekanntlich:

$$x^2 + y^2 = (c - z)^2 \operatorname{tang} f^2,$$

wo c die Entfernung der Spitze des Kegels von der Grundfläche der Coordinaten bezeichnet und f der Winkel ist, welchen die Axe des Kegels mit einer Seitenlinie desselben macht.

Man mufs nun die Gleichung desjenigen Kegels suchen, welcher die beiden Gestirne einhüllt und zwar bezogen auf ein Axensystem, dessen eine Axe durch die Mittelpunkte der beiden Gestirne geht. Setzt man dann in dieser Gleichung statt der unbestimmten Coordinaten x, y, z die Coordinaten eines Erdorts, auf dasselbe Axensystem bezogen, so erhält man die Grundgleichung der Theorie der Finsternisse. Zu dem Ende mufs man zuerst die Lage der geraden Linie bestimmen, welche die Mittelpunkte der beiden Gestirne verbindet. Ist aber a und d die Rectascension und Declination desjenigen Punktes, in welchem der Mittelpunkt des entfernteren Gestirns vom Mittelpunkte des näheren aus gesehen wird, oder in welchem die durch die Mittelpunkte beider Gestirne gehende gerade Linie die scheinbare Himmelskugel trifft, G die Entfernung beider Gestirne, bezeichnen ferner α, δ und Δ die geocentrische Rectascension, Declination und Entfernung des näheren Gestirns, α', δ' und Δ' dasselbe für das entferntere, so hat man die Gleichungen:

$$G \cos d \cos a = \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' - \Delta \cos \delta \cos \alpha$$
$$G \cos d \sin a = \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' - \Delta \cos \delta \sin \alpha$$
$$G \sin d = \Delta' \sin \delta' - \Delta \sin \delta,$$

oder:

$$G\cos d\cos(a-\alpha') = \Delta'\cos\delta' - \Delta\cos\delta\cos(\alpha-\alpha')$$
$$G\cos d\sin(a-\alpha') = -\Delta\cos\delta\sin(\alpha-\alpha')$$
$$G\sin d = \Delta'\sin\delta' - \Delta\sin\delta.$$

Wählt man den Aequatorealhalbmesser der Erde als Einheit, so muſs man, wenn Δ und Δ' in Theilen der halben groſsen Axe der Erdbahn ausgedrückt sind, jetzt $\frac{\Delta'}{\sin\pi'}$ und $\frac{1}{\sin\pi}$ statt Δ' und Δ nehmen, wo π die Horizontal-Aequatorealparallaxe des nähern und π' die mittlere Horizontal-Aequatorealparallaxe für das entferntere Gestirn bezeichnen, und erhält dann:

$$\sin\pi\, G\cos d\cos(a-\alpha') = \Delta'\frac{\sin\pi}{\sin\pi'}\cos\delta' - \cos\delta\cos(\alpha-\alpha')$$
$$\sin\pi\, G\cos d\sin(a-\alpha') = \qquad - \cos\delta\sin(\alpha-\alpha')$$
$$\sin\pi\, G\sin d = \Delta'\frac{\sin\pi}{\sin\pi'}\sin\delta' - \sin\delta.$$

Da nun auch:

$$\sin\pi\, G\cos d = \Delta'\frac{\sin\pi}{\sin\pi'}\cos\delta'\cos(a-\alpha') - \cos\delta\cos(a-\alpha),$$

so hat man:

$$\operatorname{tang}(a-\alpha') = -\frac{\frac{\sin\pi'}{\Delta'\sin\pi}\,\frac{\cos\delta}{\cos\delta'}\sin(\alpha-\alpha')}{1-\frac{\sin\pi'}{\Delta'\sin\pi}\,\frac{\cos\delta}{\cos\delta'}\cos(\alpha-\alpha')}$$

und:

$$\operatorname{tang}(d-\delta') = -\frac{\frac{\sin\pi'}{\Delta'\sin\pi}\sin(\delta-\delta')}{1-\frac{\sin\pi'}{\Delta'\sin\pi}\cos(\delta-\delta')}.$$

Da für Sonnenfinsternisse $\frac{\sin\pi'}{\sin\pi}$ eine kleine Gröſse ist, so erhält man hieraus nach Formel (12) in No. 11 der Einleitung:

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha' - \frac{\sin\pi'}{\Delta'\sin\pi}\cdot\frac{\cos\delta}{\cos\delta'}(\alpha-\alpha') \\ d &= \delta' - \frac{\sin\pi'}{\Delta'\sin\pi}(\delta-\delta') \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

und, wenn man setzt:

$$g = \frac{G\sin\pi'}{\Delta'},$$

auch noch:

$$g = 1 - \frac{\sin\pi'}{\Delta'\sin\pi}. \qquad (B)$$

Man denke sich nun ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Durchschnittspunkt im Mittelpunkte der Erde liegt. Die Axe der y sei nach dem Nordpole des Aequators gerichtet, die Axen der x und z sollen dagegen in der Ebene des Aequators liegen und zwar so, dafs die Axen der z und x nach Punkten gerichtet sind, deren Rectascensionen a und $90^0 + a$ sind. Dann sind die Coordinaten des näheren Gestirns in Bezug auf diese Axen:

$$z' = \Delta \cos \delta \cos (\alpha - a), \quad y' = \Delta \sin \delta, \quad x' = \Delta \cos \delta \sin (\alpha - a).$$

Denkt man sich nun die Axen der y und z in der Ebene der yz um den Winkel $-d$ gedreht*), sodafs dann die Axe der z nach demjenigen Punkte gerichtet ist, dessen Rectascension und Declination a und d ist, so erhält man für die Coordinaten des näheren Gestirns in Bezug auf dies neue Axensystem:

$$z = \frac{\sin \delta \sin d + \cos \delta \cos d \cos (\alpha - a)}{\sin \pi}$$

$$y = \frac{\sin \delta \cos d - \cos \delta \sin d \cos (\alpha - a)}{\sin \pi}$$

$$x = \frac{\cos \delta \sin (\alpha - a)}{\sin \pi}$$

oder auch:

$$z = \frac{\cos (\delta - d) \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - a)^2 - \cos (\delta + d) \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - a)^2}{\sin \pi}$$

$$y = \frac{\sin (\delta - d) \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - a)^2 + \sin (\delta + d) \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - a)^2}{\sin \pi} \qquad (C)$$

$$x = \frac{\cos \delta \sin (\alpha - a)}{\sin \pi}.$$

Die Axe der z ist jetzt parallel der Linie, welche die Mittelpunkte beider Gestirne mit einander verbindet. Läfst man die Axe der z mit dieser Linie zusammenfallen, so werden die Coordinaten x und y jetzt die Coordinaten des Mittelpunkts der Erde in Bezug auf den neuen Anfangspunkt, aber negativ genommen.

Die Coordinaten eines Erdorts, dessen verbesserte Polhöhe φ', dessen Sternzeit Θ und dessen Entfernung vom Mittelpunkte ϱ ist, sind nun, wenn man den Anfangspunkt im

*) Der Winkel d mufs negativ genommen werden, da die Drehung von der positiven Seite der Axe der z nach der positiven Seite der Axe der y zu erfolgt.

Mittelpunkte der Erde, die Axe der ζ aber parallel der Linie annimmt, welche die Mittelpunkte beider Gestirne verbindet:

$$\begin{aligned} \zeta &= \varrho\,[\sin d \sin \varphi' + \cos d \cos \varphi' \cos(\Theta - a)] \\ \eta &= \varrho\,[\cos d \sin \varphi' - \sin d \cos \varphi' \cos(\Theta - a)] \qquad (D) \\ \xi &= \varrho \cos \varphi' \sin(\Theta - a). \end{aligned}$$

Die Coordinaten dieses Ortes in Bezug auf ein Axensystem, dessen Axe der z die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Gestirne selbst ist, sind dann:

$$\xi - x, \quad \eta - y \text{ und } \zeta$$

und die Gleichung, welche ausdrückt, dafs der durch ϱ, φ' und Θ bestimmte Ort der Erdoberfläche in der Fläche des beide Gestirne einhüllenden Kegels liegt, wird daher:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (c - \zeta)^2 \operatorname{tang} f^2,$$

wo nun noch c und f durch Gröfsen ausgedrückt werden müssen, welche sich auf den Mittelpunkt der Erde beziehen. Den Winkel f findet man aber, wie man sogleich sieht, durch die Gleichung:

$$\sin f = \frac{r' \pm r}{G},$$

wo r und r' die Halbmesser beider Gestirne bezeichnen, und wo das obere Zeichen für äufsere, das untere für innere Berührungen gilt. Da nun G in Theilen des Halbmessers des Erdäquators ausgedrückt war, so müssen auch r und r' auf diese Einheit bezogen werden. Bezeichnet also k den in Theilen des Halbmessers des Erdäquators ausgedrückten Mondhalbmesser und h den Halbmesser, in dem die Sonne in der Entfernung, welche gleich der halben grofsen Axe der Erdbahn ist, erscheint, so erhält man, da:

$$r' = \frac{\sin h}{\sin \pi'},$$

auch:

$$\sin f = \frac{1}{G \sin \pi'} [\sin h \pm k \sin \pi']$$

oder:

$$\sin f = \frac{1}{\Delta' g} [\sin h \pm k \sin \pi']. \qquad (E)$$

Es ist aber:

$$\log \sin \pi' = 5.6186145,$$

ferner k nach Burkhardts Mondtafeln gleich 0.2725 und h nach Bessel gleich 15′ 59″. 788, also ist:

$$\log [\sin h + k \sin \pi'] = 7.6688041 \text{ für äufsere Berührungen,}$$
$$\log [\sin h - k \sin \pi'] = 7.6666903 \text{ für innere Berührungen.}$$

Nun ist noch die Gröſse c oder die Entfernung der Spitze des Kegels von der Ebene der xy auszudrücken. Es ist aber, wie man leicht sieht:

$$c = z \pm \frac{k}{\sin f}, \qquad (F)$$

wo wieder das obere Zeichen für äuſsere, das untere für innere Berührungen gilt. Bezeichnet man dann $c \tan f$, d. h. den Radius des Durchschnitts des Schattenkegels mit der Ebene der xy, durch l und $\tan f$ durch λ, so wird die allgemeine Gleichung der Finsternisse, die also ausdrückt, daſs der durch φ', Θ und ϱ bestimmte Ort der Erdoberfläche in der Oberfläche des beide Gestirne einhüllenden Kegels liegt:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta^2) = (l-\lambda\zeta)^2.$$

Da die Gröſse l immer positiv ist, so muſs man $\tan f$ oder λ negativ nehmen, wenn man aus der Gleichung (F) für c einen negativen Werth findet.

Die Gröſsen, welche zur Berechnung von x, y, z und ξ, η und ζ nach den Gleichungen (C) und (D) dienen, werden aus den Monds- und Sonnentafeln entnommen. Da diese indessen immer mit kleinen Fehlern behaftet sind, so werden auch die berechneten Werthe von x, y etc. von den wahren verschieden sein. Sind daher Δx, Δy und Δl die Aenderungen, welche man zu den berechneten Werthen von x, y und l hinzuzufügen hat, um die wahren Werthe zu erhalten, so wird die vorige Gleichung*):

$$(x+\Delta x-\xi)^2 + (y+\Delta y-\eta)^2 = (l+\Delta l-\lambda\zeta)^2.$$

Es seien nun die Werthe von α, δ, π, α', δ' und π' aus den Tafeln oder astronomischen Ephemeriden für die Zeit T des ersten Meridians genommen. Die gesuchte Zeit des ersten Meridians, zu welcher ein Moment einer Finsterniſs beobachtet ist, sei dann $T + T'$, so hat man, wenn x_0 und y_0 die Werthe von x und y für die Zeit T und x' und y' die Differentialquotienten von x und y bezeichnen:

$$x = x_0 + x'\,T' \quad \text{und} \quad y = y_0 + y'\,T'.$$

Auf ähnliche Weise erhält man auch die Gröſsen ξ, η und ζ aus zwei solchen Theilen zusammengesetzt. Da diese

---

*) Fehler in α, d und λ werden hier vernachlässigt, weil sich dieselben doch nicht aus den Beobachtungen der Finsternisse bestimmen lassen.

Gröfsen sich aber immer sehr langsam ändern und man in der Regel schon immer einen genäherten Werth für den Längenunterschied, also für die der Beobachtungszeit entsprechende Zeit des ersten Meridians kennt, so kann man diese Gröfsen schon immer für diese Zeit als bekannt voraussetzen.

Die vorige Gleichung wird daher:

$$[x_0 - \xi + x' T' + \Delta x]^2 + [y_0 - \eta + y' T' + \Delta y]^2 = (l + \Delta l - \lambda \zeta)^2.$$

Aenderten sich nun x und y der Zeit proportional, so wären x' und y' constant, und man hätte zur Berechnung derselben die Kenntnifs der Zeit $T + T'$ nicht nöthig. Dies ist nun zwar nicht der Fall, da aber die Aenderungen von x' und y' sehr klein sind gegen die Aenderungen von x und y selbst, so kann man die obige Gleichung durch Näherungen auflösen, welche sehr schnell convergiren.

Setzt man nun:

$$x' i - y' i' = \Delta x$$
$$y' i + x' i' = \Delta y$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned} m \sin M &= x_0 - \xi \qquad & n \sin N &= x' \\ m \cos M &= y_0 - \eta \qquad & n \cos N &= y' \\ & l - \lambda \zeta = L, \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

so geht die vorige Gleichung über in:

$$(L + \Delta l)^2 = [m \cos (M - N) + n (T' + i)]^2 + [m \sin (M - N) - n i']^2,$$

und man erhält hieraus, wenn man die Quadrate von i' und Δl vernachläfsigt, für $T' + i$ die quadratische Gleichung:

$$(T' + i)^2 + \frac{2m}{n} \cos (M - N) (T' + i) = \frac{L^2 - m^2 \sin (M - N)^2}{n^2} - \frac{m^2 \cos (M - N)^2}{n^2}$$
$$+ \frac{2m}{n} \sin (M - N) i' + \frac{2L}{n^2} \Delta l.$$

Löst man diese Gleichung nach $T' + i$ auf und bedenkt, dafs:

$$\sqrt{(x + \Delta x)} = \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}},$$

so findet man, wenn man setzt:

$$L \sin \psi = m \sin (M - N), \qquad (H)$$

$$T' = -\frac{m}{n} \cos (M - N) \mp \frac{L \cos \psi}{n} - i \mp \operatorname{tang} \psi \, i' \mp \frac{\Delta l}{n} \sec \psi,$$

oder mit Ausnahme des Falles, dafs ψ sehr klein ist:

$$T' = -\frac{m}{n} \cdot \frac{\sin (M - N \pm \psi)}{\sin \psi} - i \mp \operatorname{tang} \psi \, i' \mp \frac{\Delta l}{n} \sec \psi.$$

Da nun die Zeit des Eintritts immer früher als die des Austritts ist, also T' für den Eintritt einen kleineren positiven oder gröfseren negativen Werth haben mufs als für den Austritt, so gilt, wenn man den Winkel ψ immer im ersten oder vierten Quadranten nimmt, das obere Zeichen für den Eintritt, das untere dagegen für den Austritt, wie man sogleich aus der ersteren Form der Gleichung für T' sieht. Nimmt man aber für den Eintritt ψ in dem ersten oder vierten, für den Austritt dagegen in dem zweiten oder dritten Quadranten, so ist für beide Fälle:

$$T' = -\frac{m \sin(M - N + \psi)}{n \sin \psi} - i - i' \operatorname{tang} \psi - \frac{\Delta l}{n} \sec \psi$$

oder:

$$T' = -\frac{m}{n} \cos(M - N) - \frac{L \cos \psi}{n} - i - i' \operatorname{tang} \psi - \frac{\Delta l}{n} \sec \psi. \quad (J)$$

Nur für ringförmige Sonnenfinsternisse ist der Austritt bei der inneren Berührung früher als der Eintritt. Man mufs also dann für den Eintritt ψ in dem zweiten oder dritten, für den Austritt dagegen in dem ersten oder vierten Quadranten nehmen.

Die Gleichung (J) löst man nun durch auf einander folgende Näherungen auf. Man berechnet zu dem Ende die Werthe x, y, z, a, d, g, l und λ nach den Formeln (A), (B), (C), (E) und (F) für mehrere auf einander folgende Stunden, sodafs man nach den Interpolationsformeln die Werthe von x_0 und y_0, sowie deren Differentialquotienten für eine jede Zeit finden kann. Dann nimmt man ein T an, so genau als es die beiläufige Kenntnifs des Längenunterschiedes erlaubt, interpolirt für diese Zeit die Gröfsen x_0, y_0, x' und y' und findet dadurch mit Hülfe der Formeln (D), (G), (H) und (J) einen genäherten Werth für T'. Mit dem Werthe $T + T'$ wiederholt man dann, wenn es nöthig ist, die vorige Rechnung. Bezeichnet man den in der letzten Näherung angenommenen Werth wieder mit T und die gefundene Verbesserung mit T', so ist dann $T + T' = t - d$, wo t die Beobachtungszeit und d den östlichen Längenunterschied des Beobachtungsortes vom ersten Meridian, d. h. von demjenigen Meridiane bezeichnet, dessen Zeit der Berechnung der Gröfsen x, y, z etc. zum Grunde liegt.

Es ist also:

$$d = t - T + \frac{m}{n}\cos(M-N) + \frac{L}{n}\cos\psi + i + i'\operatorname{tang}\psi + \frac{\Delta l}{n}\sec\psi$$
$$= t - T + \frac{m\sin(M-N+\psi)}{n\sin\psi} + i + i'\operatorname{tang}\psi + \frac{\Delta l}{n}\sec\psi. \quad (K)$$

Da die Werthe von x' und y' so gefunden werden, daſs ihnen die mittlere Stunde als Zwischenzeit zum Grunde liegt, so setzt die obige Formel für d dieselbe Zeiteinheit voraus. Will man aber den Längenunterschied d in Zeitsecunden haben, so muſs man die Formel mit der Anzahl s von Secunden, die auf eine Stunde derjenigen Zeitart gehen, in welcher die Beobachtung ausgedrückt ist, multipliciren. Dadurch wird dann auch $t - T$ in Secunden derselben Zeitart, in der t angegeben ist, ausgedrückt, oder T bezeichnet die mit t gleichmäſsig ausgedrückte Zeit.

Die Gleichung (K) giebt nun nicht den Längenunterschied des Beobachtungsortes vom ersten Meridian, sondern vielmehr eine Relation zwischen demselben und den Fehlern der Rechnungselemente. Hat man aber an verschiedenen Orten dieselbe Finsterniſs beobachtet, so erhält man für einen jeden Ort so viele solcher Gleichungen, als man Momente der Finsterniſs beobachtet hat. Durch die Combination dieser Gleichungen eliminirt man dann, wie man nachher sehen wird, die Fehler eines oder mehrerer Rechnungselemente und macht auf diese Weise das Resultat von den Fehlern der Tafeln so viel als möglich unabhängig.

Man muſs nun noch die Gröſsen i und i' entwickeln, welche durch die Gleichungen:

$$x'i - y'i' = \Delta x$$
$$y'i + x'i' = \Delta y$$

oder:

$$n\,i = \sin N\Delta x + \cos N\Delta y$$
$$n\,i' = \sin N\Delta y - \cos N\Delta x$$

bestimmt waren. Die Gröſsen x und y hängen von $\alpha - a$, $\delta - d$ und π ab. Nimmt man also diese Gröſsen als fehlerhaft an, so wird:

$$\Delta x = A\,\Delta(\alpha - a) + B\,\Delta(\delta - d) + C\,\Delta\pi$$
$$\Delta y = A'\Delta(\alpha - a) + B'\Delta(\delta - d) + C'\Delta\pi,$$

wo A, B, C die Differentialquotienten von x in Bezug auf $\alpha - a$, $\delta - d$ und π, A', B', C' dagegen dieselben Differential-

quotienten von y sind. Da nun $\Delta(\alpha - a)$, $\Delta(\delta - d)$ und $\Delta\pi$ immer nur kleine Gröfsen sind, so kann man in den Ausdrücken für die Differentialquotienten die Glieder, welche $\sin(\alpha - a)$ und $\sin(\delta - d)$ als Factor enthalten, vernachlässigen, dagegen $\cos(\alpha - a)$ und $\cos(\delta - d)$ gleich Eins setzen und erhält dann:

$$A = \frac{\cos\delta}{\sin\pi}\cos(\alpha - a) = \frac{\cos\delta}{\sin\pi}$$

$$B = -\frac{\sin\delta\sin(\alpha - a)}{\sin\pi} = 0$$

$$C = -\frac{\cos\delta\sin(\alpha - a)\cos\pi}{\sin\pi^2} = -\frac{x}{\operatorname{tang}\pi}$$

$$A' = +\frac{\cos\delta\sin d\sin(\alpha - a)}{\sin\pi} = 0$$

$$B' = \frac{\cos(\delta - d)}{\sin\pi} = \frac{1}{\sin\pi}$$

$$C' = -\frac{y}{\operatorname{tang}\pi}.$$

Da nun i und i', also auch $\Delta(\alpha - a)$, $\Delta(\delta - d)$ und $\Delta\pi$ in Theilen des Radius ausgedrückt sind, so müssen diese Differentialquotienten, wenn man die Fehler der Elemente in Secunden erhalten will, mit 206265 dividirt werden. Setzt man dann:

$$\frac{s}{206265\,.\,n\sin\pi} = h,$$

so wird:

$$i = h\sin N\cos\delta\,\Delta(\alpha - a) + h\cos N\,\Delta(\delta - d) - h\cos\pi\,\Delta\pi\,[x\sin N + y\cos N]$$
$$i' = -h\cos N\cos\delta\,\Delta(\alpha - a) + h\sin N\,\Delta(\delta - d) + h\cos\pi\,\Delta\pi\,[x\cos N - y\sin N],$$

also, wenn man die obere Gleichung mit $\cos\psi$, die untere mit $\sin\psi$ multiplicirt:

$$[i + i'\operatorname{tang}\psi]\frac{\cos\psi}{h} = \sin(N - \psi)\cos\delta\,\Delta(\alpha - a) + \cos(N - \psi)\,\Delta(\delta - d)$$
$$- \cos\pi\,\Delta\pi\,[x\sin(N - \psi) + y\cos(N - \psi)].$$

Damit erhält man dann:

$$d = t - T + \frac{m}{n}s\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi} + h\frac{\sin(N - \psi)}{\cos\psi}\cos\delta\,\Delta(\alpha - a)$$
$$+ h\frac{\cos(N - \psi)}{\cos\psi}\Delta(\delta - d)$$
$$+ h\frac{1}{\cos\psi}\,206265\sin\pi\,\Delta l$$
$$- h\cos\pi\,\Delta\pi\left(\frac{x\sin(N - \psi) + y\cos(N - \psi)}{\cos\psi}\right)$$

oder auch, wenn man setzt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \sin N \cos \delta \Delta (\alpha - a) + \cos N \Delta (\delta - d) \\
\zeta &= - \cos N \cos \delta \Delta (\alpha - a) + \sin N \Delta (\delta - d) \\
\eta &= 206265 \sin \pi \Delta l \qquad\qquad (L) \\
\Theta &= \cos \pi \Delta \pi \\
E &= \frac{x \sin (N - \psi) + y \cos (N - \psi)}{\cos \psi},
\end{aligned}$$

$$d = t - T + \frac{m}{n} \cdot s \frac{\sin (M - N + \psi)}{\sin \psi} + h \varepsilon + h \zeta \operatorname{tang} \psi + h \eta \sec \psi - h E \Theta. \quad (M)$$

Jede Beobachtung eines Moments einer Verfinsterung giebt nun eine solche Gleichung und da dieselbe fünf unbekannte Gröſsen enthält, so werden fünf solcher Gleichungen zur Bestimmung derselben hinreichen. Die Gröſsen η und Θ wird man aber in der Regel nicht bestimmen können, wenn nicht die Beobachtungen an Orten, welche sehr weit von einander entfernt liegen, angestellt sind. Indessen wird doch die Berechnung der Coefficienten immer den Einfluſs zeigen, welchen Fehler in den Werthen von π und l auf das Resultat haben können. Man wird also in der Regel immer nur den Mittagsunterschied von den Fehlern ζ und ε zu befreien suchen, aber die letztere Gröſse nur dann bestimmen können, wenn der Mittagsunterschied eines Ortes vom ersten Meridiane bekannt ist. Kennt man dann ε und ζ, so erhält man daraus die Fehler der Tafeln in Rectascension und Declination durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\cos \delta \Delta (\alpha - a) &= \varepsilon \sin N - \zeta \cos N \\
\Delta (\delta - d) &= \varepsilon \cos N + \zeta \sin N.
\end{aligned}$$

Die sämmtlichen Formeln, deren man zur Berechnung des Längenunterschiedes aus einer Sonnen-Finsterniſs bedarf, sind nun also, noch einmal der Uebersicht wegen zusammengestellt, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \alpha' - \frac{\sin \pi'}{\Delta' \sin \pi} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \delta'} (\alpha - \alpha') \\
d &= \delta' - \frac{\sin \pi'}{\Delta' \sin \pi} (\delta - \delta') \\
g &= 1 - \frac{\sin \pi'}{\Delta' \sin \pi},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wo α, δ und π Rectascension, Declination und Horizontal-Aequatorealparallaxe des Mondes, α', δ', Δ' und π' dagegen Rectascension, Declination, Entfernung und mittlere Horizontal-Aequatorealparallaxe der Sonne bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\cos\delta \sin(\alpha - a)}{\sin\pi} \\ y &= \frac{\sin(\delta - d)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - a)^2 + \sin(\delta + d)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - a)^2}{\sin\pi} \\ z &= \frac{\cos(\delta - d)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - a)^2 - \cos(\delta + d)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - a)^2}{\sin\pi} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\sin f = \frac{1}{\Delta' \cdot g}\,[\sin h \pm k \sin\pi'], \quad (3)$$

wo:

$$\log[\sin h + k \sin\pi'] = 7.6588041$$

für äufsere Berührungen und:

$$\log[\sin h - k \sin\pi'] = 7.6666903$$

für innere Berührungen ist,

$$c = z \pm \frac{k}{\sin f}, \quad (4)$$

wo wieder das obere Zeichen für äufsere, das untere für innere Berührungen gilt.

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} f &= \lambda \\ l &= c\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

wo λ immer dasselbe Zeichen wie c erhält:

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos\varphi' \sin(\Theta - a) \\ \eta &= \varrho\,[\cos d \sin\varphi' - \sin d \cos\varphi' \cos(\Theta - a)] \\ \zeta &= \varrho\,[\sin d \sin\varphi' + \cos d \cos\varphi' \cos(\Theta - a)], \end{aligned} \quad (6)$$

wo φ' und ϱ die verbesserte Polhöhe des Beobachtungsortes und seine Entfernung vom Mittelpunkte, Θ dagegen die beobachtete Sternzeit eines Ein- oder Austritts bezeichnet.

Ist dann für eine Zeit T:

$$\begin{aligned} x &= x_0 & \frac{dx}{dt} &= x' \\ y &= y_0 & \frac{dy}{dt} &= y', \end{aligned}$$

so berechnet man:

$$\begin{aligned} m \sin M &= x_0 - \xi & n \sin N &= x' \\ m \cos M &= y_0 - \eta & n \cos N &= y' \end{aligned} \quad l - \lambda\zeta = L \quad (7)$$

$$L \sin\psi = m \sin(M - N), \quad (8)$$

wo für Eintritte ψ im ersten oder vierten, für Austritte im zweiten oder dritten Quadranten zu nehmen ist, und:

$$T' = -s\,\frac{m}{n}\,\frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin\psi} = -\frac{m}{n}\cos(M - N) - \frac{L\cos\psi}{n}. \quad (9)$$

Dann ist:

$$d = t - T - T' + h\varepsilon + h\zeta \operatorname{tang}\psi, \quad (10)$$

wo:

$$h = \frac{s}{206265 \, . \, n \sin \pi},$$
$$\varepsilon = \sin N \cos \delta \Delta (\alpha - a) + \cos N \Delta (\delta - d),$$
$$\zeta = - \cos N \cos \delta \Delta (\alpha - a) + \sin N \Delta (\delta - d),$$

also:

$$\cos \delta \Delta (\alpha - a) = \varepsilon \sin N - \zeta \cos N$$
$$\Delta (\delta - d) = \varepsilon \cos N + \zeta \sin N.$$

Beispiel. Am 7. Juli 1842 fand eine Sonnenfinsternifs statt, bei welcher in Wien und Pulkowa die folgenden Momente beobachtet wurden:

Wien:

Innere Berührung beim Eintritt	$18^h\ 49^m\ 25^s.0$	mittlere Wiener Zeit.
Innere Berührung beim Austritt	18 51 22 .0	„ „ „

Pulkowa:

Aeufsere Berührung beim Eintritt	$19^h\ 7^m\ 3^s.5$	mittlere Pulkowaer Zeit.
Aeufsere Berührung beim Austritt	21 12 52 .0	„ „ „

Nach dem Berliner Jahrbuche hat man die folgenden Oerter der Sonne und des Mondes:

M. Berl. Zeit.	α	δ	α'	δ'
17^h	105° 8′ 49″.93	+ 23° 22′ 10″.35	106° 50′ 38″.49	+ 22° 33′ 24″.46
18^h	47 43 .31	15 0 .34	53 12 .37	33 7 .93
19^h	106 26 34 .14	7 40 .45	55 46 .24	32 51 .36
20^h	107 5 22 .32	0 10 .75	58 20 .09	32 34 .75
21^h	44 7 .75	22 52 31 .29	107 0 53 .94	32 18 .09
22^h	108 22 50 .34	44 42 .13	3 27 .78	32 1 .40

	π	$\log \Delta'$
17^h	59′ 55″.06	0.0072061
18^h	56 .37	56
19^h	57 .65	51
20^h	58 .91	46
21^h	60 0 .14	41
22^h	1 .35	36.

Berechnet man nun zuerst die Gröfsen a, d und g nach den Formeln (1), so erhält man:

	a	d	$\log g$
18^h	106° 53′ 21″.53	+ 22° 33′ 2″.04	9.9989808
19^h	55 50 .33	32 46 .47	11
20^h	58 19 .10	32 30 .87	15
21^h	107 0 47 .88	32 15 .25	19

Ferner findet man nach den Formeln (2), (3), (4) und (5):

	x	y	$\log z$
17h	−1.5632144	+0.8246864	1.7585349
18h	−1.0061154	+0.7039354	1.7584833
19h	−0.4489341	+0.5827957	1.7583923
20h	+0.1082514	+0.4612784	1.7582614
21h	+0.6653785	+0.3393985	1.7580909
22h	+1.2224009	+0.2171603	1.7578799.

	l		$\log \lambda$	
	Aeufsere Berührung.	Innere Berührung.	Aeufsere Berühr.	Innere Berühr.
17h	0.5362314	0.0100548	7.6626222	7.6605084$_n$
18h	0.5362001	0.0100860	23	85
19h	0.5361450	0.0101409	25	87
20h	0.5360655	0.0102198	26	88
21h	0.5359622	0.0103227	27	89
22h	0.5358345	0.0104499	29	91.

Nun ist die Zeit der inneren Berührung beim Eintritt für Wien:

$$18^h\ 49^m\ 25^s.0,$$

also die Sternzeit:

$$\Theta = 1^h\ 52^m\ 29^s.8 = 28^\circ\ 7'\ 27''.0;$$

ferner ist:

$$\varphi = 48^\circ\ 12'\ 35''.5,$$

also die verbesserte Polhöhe:

$$\varphi' = 48^\circ\ 1'\ 8''.9$$

und:

$$\log \varrho = 9.9991952.$$

Nimmt man nun $T = 18^h\ 30^m$ an, so erhält man für diese Zeit:

$$x_0 = -0.727530 \qquad y_0 = +0.643413,$$

und nach den Formeln (6):

$$\xi = -0.654897 \qquad \eta = +0.635482 \qquad \log \zeta = 9.606857;$$

ferner nach den Formeln in No. 15 der Einleitung:

$$x' = +0.557185 \qquad y' = -0.121140,$$

also nach den Formeln (7), (8) und (9):

$$M = 276^\circ\ 13'\ 54'' \qquad \log m = 8.863708$$
$$N = 102\ \ 15\ \ 58 \qquad \log n = 9.756030 \qquad \log L = 8.077778$$
$$\psi = 39^\circ\ 57'\ 10''$$
$$T' = -6^m\ 40^s.85.$$

Man hat hier nun nicht nöthig, eine zweite Näherung zu machen, und erhält daher nach der Formel (10):

$$d = +0^h\ 12^m\ 44^s.15 + 1.7553\ \varepsilon + 1.4703\ \zeta.$$

Aus der Beobachtung der inneren Berührungen beim Austritt findet man ebenso, wenn man dasselbe T beibehält:

$$\xi = -0.653763 \qquad \eta = +0.633338 \qquad \log\zeta = 9.612367$$
$$M = 277^\circ\, 46'\, 40'' \qquad \log m = 8.871874 \qquad \log L = 8.078638$$
$$\psi = 150^\circ\, 54'\, 51''.5$$
$$T' = -8^m\, 54^s.74,$$

also:

$$d = +0^h\, 12^m\, 27^s.26 + 1.7553\,\varepsilon - 0.9764\,\zeta.$$

Auf gleiche Weise erhält man aus den Beobachtungen in Pulkowa, wenn man:

$$\varphi = 59^\circ\, 46'\, 18''.6,$$

also:

$$\varphi' = 59^\circ\, 36'\, 16''.8$$

und:

$$\log\varrho = 9.9989172$$

nimmt,

$$d' = 1^h\, 8^m\, 26^s.57 + 1.7559\,\varepsilon + 0.5064\,\zeta,$$
$$d' = 1\;\; 8\;\; 22\;\; .67 + 1.7541\,\varepsilon - 0.3034\,\zeta.$$

Es ist also:

$$d' - d = +55^m\, 42^s.42 - 0.9639\,\zeta,$$
$$d' - d = +55\;\; 55\;\; .41 + 0.6730\,\zeta,$$

also:

$$d' - d = +55^m\, 50^s.07$$

und:

$$\zeta = -7''.94.$$

Um nun auch den Fehler ε zu bestimmen, mufs man die Länge eines der Orte von Berlin als bekannt annehmen. Da aber die Länge Wiens von Berlin

$$+0^h\, 11^m\, 56^s.40$$

beträgt, so erhält man aus der ersten Gleichung für d:

$$\varepsilon = -20''.55.$$

Da nun ferner:

$$\cos\delta\Delta(\alpha - a) = \varepsilon\sin N - \zeta\cos N$$
$$\Delta(\delta - d) = \varepsilon\cos N + \zeta\sin N,$$

so wird:

$$\cos d\Delta(\alpha - a) = -21''.78$$

und

$$\Delta(\delta - d) = -3''.38.$$

30. Für Sternbedeckungen durch den Mond werden die Formeln etwas einfacher. Da dann $\pi' = 0$ ist, so wird $a = \alpha'$, $d = \delta'$. Es fällt daher die Berechnung der Formeln

(1) ganz fort und die Coordinaten des Erdorts werden vom Orte des Mondes ganz unabhängig, nämlich:

$$\xi = \varrho \cos \varphi' \sin (\Theta - \alpha')$$
$$\eta = \varrho [\sin \varphi' \cos \delta' - \cos \varphi' \sin \delta' \cos (\Theta - \alpha')].$$

Die dritte Coordinate ζ braucht man nicht, weil für diesen Fall f, also auch $\lambda = 0$ ist, indem der einhüllende Kegel in einen Cylinder übergeht. Der Halbmesser l des Durchschnitts dieses Cylinders mit der Grundebene der Coordinaten wird dann gleich dem Halbmesser des Mondes, also gleich k. Man hat daher auch nicht die Berechnung der Coordinate z nöthig; x und y findet man aber aus den einfachen Gleichungen:

$$x = \frac{\cos \delta \sin (\alpha - \alpha')}{\sin \pi}$$
$$y = \frac{\sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos (\alpha - \alpha')}{\sin \pi}.$$

Die allgemeine Gleichung der Finsternisse geht nun in die folgende über:

$$(k + \Delta k)^2 = (x + \Delta x - \xi)^2 + (y + \Delta y - \eta)^2,$$

die man ganz so wie vorher auflöst. Setzt man wieder $t - d = T + T'$ und sind x_0 und y_0 die Werthe von x und y für die Zeit T, x' und y' die Differentialquotienten dieser Gröſsen, so berechnet man wieder die Hülfsgröſsen:

$$m \sin M = x_0 - \xi \qquad n \sin N = x'$$
$$m \cos M = y_0 - \eta \qquad n \cos N = y'$$
$$k \sin \psi = m \sin (M - N)$$

und erhält dann:

$$d = t - T + \frac{m}{n} s \frac{\sin (M - N + \psi)}{\sin \psi} + h\varepsilon + h\zeta \operatorname{tang} \psi,$$

wo h, ε und ζ wieder dieselbe Bedeutung wie vorher haben.

B e i s p i e l. 1849 Nov. 29 wurde zu Bilk der Ein- und Austritt des Sterns α Tauri am Mondrande beobachtet und zwar:

der Eintritt um $8^h 15^m 12^s.1$ mittlere Bilker Zeit
der Austritt um $9 \quad 18 \quad 19 \;.8$.

Der Eintritt desselben Sterns wurde auch zu Hamburg beobachtet um

$$8^h 33^m 47^s.2$$

mittlere Hamburger Zeit.

Der Ort des Sterns war an diesem Tage nach dem Nautical Almanac:

$$\alpha' = 4^h\,11^m\,16^s.24 = 62^\circ\,49'\,3''.6$$
$$\delta' = +15^\circ\,15'\,32''.2.$$

Ferner ist für Bilk:

$$\varphi' = 51^\circ\,1'\,10''.0$$
$$\log\varrho = 9.9991201$$

und für Hamburg:

$$\varphi' = 53^\circ\,22'\,4''.2$$
$$\log\varrho = 9.9990624.$$

Endlich hat man nach dem Nautical-Almanac für die mittleren Greenwicher Zeiten 7^h, 8^h, 9^h die folgenden Oerter des Mondes:

	α	δ	π
7^h	$4^h\ 6^m\ 2^s.35$	$+15^\circ\,47'\,24''.6$	$60'\,50''.8$
8^h	$4\ \ 8\ 35\ .69$	$15\ 54\ 48\ .8$	$60\ 51\ .8$
9^h	$4\ 11\ \ 9\ .31$	$16\ \ 2\ \ 6\ .5$	$60\ 52\ .9.$

Man erhält also für diese drei Zeiten:

	x	I. Diff.	y	I. Diff.
7^h	-1.240980		$+0.527577$	
		$+0.606752$		$+0.118741$
8^h	-0.634228		$+0.646318$	
		$+0.606864$		$+0.118656$
9^h	-0.027364		$+0.764974$	

Für den Eintritt für Bilk hat man nun:

$$\Theta = 0^h\,49^m\,29^s.93$$
$$\Theta - \alpha' = -50^\circ\,26'\,34''.6$$

also:

$$\xi = -0.484015 \text{ und } \eta = +0.643216.$$

Nimmt man nun $T = 7^h\,50^m$ an, so erhält man für diese Zeit:

$$x_0 - \xi = -0.251346 \qquad y_0 - \eta = -0.016682$$
$$x' = +0.606789 \qquad y' = +0.118713,$$

also:

$$M = 266^\circ\,12'\,10'' \qquad N = +78^\circ\,55'\,50''$$
$$\log m = 9.401226 \qquad \log n = 9.791194$$
$$\psi = -6^\circ\,43'\,11''$$
$$T' = +2^m\,0^s.85.$$

Die Beobachtung des Eintritts für Bilk giebt also zwischen dem Mittagsunterschiede von Greenwich und den Fehlern ε und ζ die Gleichung:

$$d = +27^m\,12^s.95 + 1.5945\,\varepsilon - 0.1879\,\zeta,$$

und auf dieselbe Weise erhält man aus dem Austritt für Bilk:

$$d = +27^m\,27^s.10 + 1.5937\,\varepsilon + 0.5336\,\zeta,$$

und aus der Beobachtung des Austritts für Hamburg:

$$d' = + 40^m\, 3^s.76 + 1.5945\, \varepsilon - 0.1362\, \zeta.$$

Man hat also die beiden Gleichungen:

$$d' - d = + 12^m\, 50^s.81 + 0.0517\, \zeta,$$
$$d' - d = + 12\quad 36\ .66 - 0.6698\, \zeta,$$

woraus man

$$d' - d = + 12^m\, 49^s.80 \text{ und } \zeta = -19''.61$$

findet.

31. Die in No. 29 und 30 gegebenen allgemeinen Gleichungen für die Finsternisse und Sternbedeckungen dienen nun auch zur Vorausberechnung derselben für einen gegebenen Ort der Erde. Nimmt man für T eine der Mitte der Finsternifs nahe gelegene Zeit des ersten Meridians, am bequemsten eine runde Stunde und berechnet für diese Zeiten wieder die Gröfsen x_0, y_0, x', y' und L, so wird die allgemeine Gleichung der Finsternisse:

$$[x_0 + x'\, T' - \xi]^2 + [y_0 + y'\, T' - \eta]^2 = L^2 \text{ *)},$$

wo ξ und η die Coordinaten des Ortes auf der Oberfläche der Erde in dem gesuchten Momente der Finsternifs $T + T'$ bezeichnen. Nennt man daher Θ_0 die der Zeit T entsprechende Sternzeit, so wird $\Theta_0 + d_0$ die Sternzeit des Ortes, für welchen die Finsternifs berechnet wird; bezeichnet man also die zu $\Theta_0 + d_0$ gehörigen Werthe von ξ und η mit ξ_0 und η_0, so wird:

$$\xi = \xi_0 + \varrho \cos \varphi' \cos (\Theta_0 - a + d_0) \frac{d(\Theta - a)}{dT} . T'$$

$$\eta = \eta_0 + \varrho \cos \varphi' \sin (\Theta_0 - a + d_0) \frac{d(\Theta - a)}{dT} . T' . \sin d.$$

Wenn man daher jetzt setzt:

$$m \sin M = x_0 - \xi_0, \quad n \sin N = x' - \varrho \cos \varphi' \cos (\Theta_0 - a + d_0) \frac{d(\Theta - a)}{dT}$$

$$m \cos M = y_0 - \eta_0, \quad n \cos N = y' - \varrho \cos \varphi' \sin (\Theta_0 - a + d_0) \frac{d(\Theta - a)}{dT} \sin d$$

$$\sin \psi = \frac{m}{L_0} \sin (M - N),$$

wo L_0 den zur Zeit T gehörigen Werth von L bezeichnet, so erhält man wieder:

$$T' = -\frac{m}{n} \cos (M - N) \mp \frac{L_0}{n} \cos \psi = t - T - d,$$

---

*) Für eine Sternbedeckung ist $L = k = 0.2725$.

wo ψ im ersten oder vierten Quadranten genommen werden mufs und das obere Zeichen für den Eintritt, das untere für den Austritt gilt, oder es wird, wenn:

$$-\frac{m}{n}\cos(M-N)-\frac{L_0}{n}\cos\psi=\tau$$
$$-\frac{m}{n}\cos(M-N)+\frac{L_0}{n}\cos\psi=\tau'$$

die Zeit des Eintritts in mittlerer Ortszeit:

$$t=T+d+\tau,$$

und die des Austritts:

$$t'=T+d+\tau'.$$

Durch diese erste Annäherung erhält man die Zeiten der Ränderberührungen auf einige Zeitminuten genau, was für die Erleichterung der Beobachtungen der Finsternisse schon ausreicht. Will man die Zeiten genauer haben, so mufs man die Rechnung wiederholen, indem man einmal $T+\tau$ und dann $T+\tau'$ statt T nimmt.

Zur Erleichterung der Beobachtungen ist es noch nöthig, diejenigen Punkte des Sonnenrandes (oder für Sternbedeckungen des Mondsrandes) zu bestimmen, an denen der Eintritt und Austritt erfolgt. Substituirt man aber in:

$$x_0-\xi+xT' \text{ und } y_0-\eta+y'T'$$

für T' den Werth:

$$-\frac{m}{n}\cos(M-N)\mp\frac{L}{n}\cos\psi,$$

so erhält man:

$$x-\xi=[m\sin M\cos N\cos N\sin\psi-m\cos M\cos N\sin N\sin\psi$$
$$\mp m\sin M\cos N\sin N\cos\psi\pm m\cos M\sin N\sin N\cos\psi]\frac{1}{\sin\psi},$$

oder:

$$x-\xi=\mp\frac{m\sin(M-N)}{\sin\psi}\sin(N\mp\psi)$$
$$=\mp L\sin(N\mp\psi)$$

und ebenso:

$$y-\eta=\mp L\cos(N\mp\psi).$$

Es ist daher für den Eintritt:

$$x-\xi=-L\sin(N-\psi)=L\sin(N+180^\circ-\psi)$$
$$y-\eta=-L\cos(N-\psi)=L\cos(N+180^\circ-\psi),$$

und für den Austritt:

$$x-\xi=L\sin(N+\psi)$$
$$y-\eta=L\cos(N+\psi).$$

Nun sind $\xi - x$ und $\eta - y$, wie man in No. 29 gesehen hat, die Coordinaten des in dem Einhüllungskegel gelegenen Erdorts, bezogen auf ein Axensystem, dessen Axe der z die Verbindungslinie der Mitten beider Gestirne und dessen Axe der x dem Aequator parallel ist; $x - \xi$ und $y - \eta$ sind daher die Coordinaten eines Punktes, welcher in der Richtung der von dem Erdorte nach dem Berührungspunkte der beiden Gestirne gezogenen geraden Linie liegt und dessen Entfernung von der Spitze des Kegels gleich der des Erdorts von derselben ist. $\frac{x - \xi}{L}$ und $\frac{y - \eta}{L}$ sind also der Sinus und Cosinus desjenigen Winkels, welchen die Axe der y oder der durch den Punkt Z*) gehende Declinationskreis mit der Richtung von Z nach dem Berührungspunkte macht. Da nun aber der Punkt Z dem Mittelpunkte der Sonne immer sehr nahe liegt, so kann man auch ohne merklichen Fehler $\frac{x - \xi}{L}$ und $\frac{y - \eta}{L}$ als den Sinus oder Cosinus desjenigen Winkels ansehen, welchen der durch den Mittelpunkt der Sonne gehende Declinationskreis mit der Richtung vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Berührungspunkte macht. Dieser Winkel ist daher für Eintritte:

$$\left.\begin{array}{l} N + 180^0 - \psi \\ N + \psi. \end{array}\right\} (A)$$

und für Austritte:

Für ringförmige Sonnenfinsternisse wird dagegen $N + \psi$ der Winkel für den Eintritt bei der inneren Berührung, und $N + 180^0 - \psi$ der Winkel, in welchem der Austritt erfolgt.

Für eine Sonnenfinsternifs hat man also zuerst für eine der Mitte der Finsternifs nahe gelegene Zeit T (am besten eine runde Stunde) desjenigen Meridians, für welchen die Sonnen- und Mondstafeln oder die Ephemeriden gelten, die Formeln (1), (2), (3), (4) und (5) in No. 29 und die Diffe-

---

*) Der Punkt Z ist derjenige Punkt, in welchem die Axe der z oder die Verbindungslinie der Mitten beider Gestirne die scheinbare Himmelskugel trifft.

rentialquotienten x' und y' zu berechnen, ferner wenn Θ_0 die der mittleren Zeit T entsprechende Sternzeit und d_0 die östliche Länge des Ortes, für welchen man rechnet, bezeichnet:

$$\xi_0 = \varrho \cos\varphi' \sin(\Theta_0 + d_0 - \alpha)$$
$$\eta_0 = \varrho [\cos d \sin\varphi' - \sin d \cos\varphi' \cos(\Theta_0 + d_0 - \alpha)]$$
$$\zeta_0 = \varrho [\sin d \sin\varphi' + \cos d \cos\varphi' \cos(\Theta_0 + d_0 - \alpha)].$$

Setzt man dann:

$$m \sin M = x_0 - \xi_0, \quad n \sin N = x' - \varrho \cos\varphi' \cos(\Theta_0 + d_0 - \alpha) \frac{d(\Theta_0 - \alpha)}{dt}$$
$$m \cos M = y_0 - \eta_0, \quad n \cos N = y' - \varrho \cos\varphi' \sin(\Theta_0 + d_0 - \alpha) \frac{d(\Theta_0 - \alpha)}{dt} \sin d$$
$$L_0 = l_0 - \lambda \zeta_0$$
$$\sin\psi = \frac{m}{L_0} \sin(M - N) \; (\psi \text{ immer} < \pm 90^\circ)$$
$$\tau = -\frac{m}{n}\cos(M - N) - \frac{L_0}{n}\cos\psi$$
$$\tau' = -\frac{m}{n}\cos(M - N) + \frac{L_0}{n}\cos\psi,$$

so wird die Zeit des Eintritts in mittlerer Ortszeit:

$$t = T + d_0 + \tau,$$

und die Zeit des Austritts:

$$t = T + d_0 + \tau'.$$

Den Ort des Ein- und Austritts am Sonnenrande findet man dann durch die Ausdrücke (A).

Für Sternbedeckungen werden die Formeln bei Weitem einfacher. Man berechnet wieder für eine der Mitte nahe gelegene Zeit T des ersten Meridians:

$$x_0 = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - \alpha')}{\sin\pi}$$
$$y_0 = \frac{\sin\delta \cos\delta' - \cos\delta \sin\delta' \cos(\alpha - \alpha')}{\sin\pi}$$

und die Differentialquotienten x' und y'. Ferner sucht man, wenn Θ_0 die der mittleren Zeit T entsprechende Sternzeit bezeichnet:

$$\xi_0 = \varrho \cos\varphi' \sin(\Theta - \alpha' + d_0)$$
$$\eta_0 = \varrho [\sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos(\Theta - \alpha' + d_0)].$$

Setzt man dann wieder:

$$m \sin M = x_0 - \xi_0, \; n \sin N = x' - \varrho \cos\varphi' \cos(\Theta_0 + d_0 - \alpha') \frac{d\Theta}{dt}$$
$$m \cos M = y_0 - \eta_0, \; n \cos N = y' - \varrho \cos\varphi' \sin(\Theta_0 + d_0 - \alpha') \frac{d\Theta}{dt} \sin\delta',$$

wo:

$$\log \frac{d\Theta}{dt} = 9.41916\,^{*})$$

$$\sin \psi = \frac{m}{k} \sin (M - N), \;\; \psi < \pm 90^\circ,$$

und:

$$\log k = 9.43537$$

$$-\frac{m}{n} \cos (M - N) - \frac{k}{n} \cos \psi = \tau$$

$$-\frac{m}{n} \cos (M - N) + \frac{k}{n} \cos \psi = \tau',$$

so wird die Zeit des Eintritts in mittlerer Ortszeit:

$$t = T + \tau + d_0$$

und die Zeit des Austritts:

$$t' = T + \tau' + d_0.$$

Den Winkel, welchen der Declinationskreis mit der Richtung nach dem Berührungspunkte macht, erhält man dann wieder nach den Ausdrücken A, nämlich für den Eintritt:

$$Q = N + 180^\circ - \psi$$

und für den Austritt:

$$Q' = N + \psi.$$

B e i s p i e l. Wollte man für Juli 7 1842 die Zeiten der äufseren Berührungen von Sonne und Mond für Pulkowa berechnen, so könnte man $T = 19^h$ mittlere Berliner Zeit nehmen. Für diese Zeit ist nach No. 29:

$$x_0 = -0.44893, \;\; y_0 = +0.58280, \;\; x' = +0.55718, \;\; y' = -0.12133$$
$$a = 106^\circ\, 55'.8, \;\; d = +22^\circ\, 32'.8, \;\; l = 0.53614, \;\; \log \lambda = 7.66262.$$

Ferner erhält man:

$$\Theta_0 = 2^h\, 3^m\, 8^s,$$

und da der Längenunterschied zwischen Pulkowa und Berlin gleich $+1^h\, 7^m\, 43^s$ ist:

$$\Theta_0 + d - a = 300^\circ\, 46'.9,$$

also hiermit:

$$\xi_0 = -0.43361, \;\; \eta_0 = +0.69560, \;\; \log \zeta_0 = 9.75470, \;\; \log L_0 = 9.72716.$$

---

*) Da bei den hier vorkommenden Differentialquotienten die Stunde als Einheit zum Grunde liegt, so ist $\frac{d\Theta}{dt}$ die Aenderung des Stundenwinkels in einer mittleren Stunde. Nun enthält aber eine mittlere Stunde $3609^s.86$ Sternzeit. Multiplicirt man dies mit 15 und dividirt mit 206265, um den Differentialquotienten in Theilen des Radius auszudrücken, so erhält man:

$$\log \frac{d\Theta}{dt} = 9.41916.$$

Ferner ist:

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \varrho \cos \varphi' \cos (\Theta_0 + d_0 - \alpha) \frac{d(\Theta_0 - \alpha)}{dt} = + 0.06762\,^{*})$$

$$\frac{d\eta_0}{dt} = \varrho \cos \varphi' \sin (\Theta_0 + d_0 - \alpha) \frac{d(\Theta_0 - \alpha)}{dt} \sin d = - 0.04352,$$

also:

$$x' - \frac{d\xi_0}{dt} = + 0.48956 \text{ und } y' - \frac{d\eta_0}{dt} = - 0.07781.$$

Daraus folgt dann:

$$M = 187^0\,44'.\,1 \qquad N = 99^0\,1'.\,9$$
$$\log m = 9.05628 \qquad \log n = 9.69522$$
$$\psi = 12^0\,19'.\,0$$

also:

$$\tau = - 1.057 \qquad \tau' = 1.046$$
$$= - 1^h\,3^m.\,4 \qquad = + 1^h\,2^m.\,8.$$

Die Zeiten des Ein- und Austritts sind demnach:

$$t = 19^h\ \ 4^m.\,3$$
$$t' = 21^h\,10^m.\,5$$

Zeiten, die von den wirklich beobachteten nur 3^m abweichen. Durch eine Wiederholung der Rechnung mit $T = 18^h$ und $T = 20^h$ würde man diese Zeiten schon sehr genau erhalten.

Der Winkel, welchen die Richtung vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Berührungspunkte mit dem durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Declinationskreise macht, ist für den Eintritt 267^0 und für den Austritt gleich 111^0 **).

---

*) Es ist nämlich:

$$\frac{d\Theta_0}{dt} = 3609^s.\,86$$

in Zeit oder:

$$+ 57147''.\,90;$$

ferner:

$$\frac{d\alpha}{dt} = + 148''.\,78$$

also:

$$\frac{d(\Theta_0 - \alpha)}{dt} = 56999''.\,12,$$

wovon der Logarithmus in Theilen des Radius ausgedrückt 9.41796 ist.

**) Ueber die Berechnungen der Finsternisse vergleiche man:

Bessel, Ueber die Berechnung der Länge aus Sternbedeckungen Astr. Nachr. No. 151 und 152 und Bessel's astronomische Untersuchungen Band II pag. 95 und folgende.

32. Ein anderes Mittel zur Bestimmung der Länge gewährt die Beobachtung der Distanz des Mondes von bekannten Sternen oder von der Sonne, und da diese Methode den Vortheil gewährt, daſs man sich ihrer in jedem Augenblicke bedienen kann, wenn nur der Mond über dem Horizonte ist, so wird dieselbe vorzüglich zur See angewandt.

Zu dem Ende enthalten die nautischen Ephemeriden die Distanzen des Mondes von der Sonne, den hellsten Planeten und Fixsternen für jede dritte Stunde eines ersten Meridians berechnet und zwar so, wie dieselben vom Mittelpunkte der Erde aus erscheinen. Hat man daher an irgend einem Orte zu einer bekannten Zeit eine Distanz des Mondes von einem solchen Gestirne gemessen, so befreit man dieselbe von der Refraction und Parallaxe und erhält dadurch die wahre Distanz des Mondes von dem Sterne, so wie sie in demselben Augenblicke vom Mittelpunkte der Erde aus beobachtet wäre. Sucht man dann aus den Ephemeriden diejenige Zeit des ersten Meridians, für welche dieselbe Distanz berechnet ist, so giebt diese Zeit, mit der beobachteten Ortszeit verglichen, sogleich die Länge des Beobachtungsortes. Da indessen bei dieser Methode die Tafeln als richtig vorausgesetzt werden, also der Fehler derselben in dem Resultate nicht eliminirt ist, so gewährt dieselbe schon aus diesem Grunde lange nicht die Genauigkeit wie die correspondirenden Beobachtungen bei Finsternissen. Ueberdies läſst sich die Zeit der Ränderberührung zweier Gestirne viel genauer beobachten, als eine Distanz.

Zur Berechnung der Refraction und der Höhenparallaxe der beiden beobachteten Gestirne muſs man deren Höhen selbst kennen. Man beobachtet daher zur See kurz vor und nach der Messung der Distanz die scheinbaren Höhen beider Gestirne und da die Aenderungen derselben in kurzen Zwischenzeiten als der Zeit proportional angesehen werden können, so kann man durch eine einfache Proportion die scheinbaren Höhen der Gestirne für den Augenblick, wo die Distanz beobachtet ist, finden. Durch Anbringung der Refraction. der Parallaxe und des Halbmessers der Gestirne erhält man daraus die wahren Höhen der Mittelpunkte beider Gestirne.

Sicherer ist es indessen, die wahren und scheinbaren Höhen der beiden Gestirne durch Rechnung zu suchen. Man nimmt zu dem Ende den Längenunterschied des Beobachtungsortes vom ersten Meridian als näherungsweise bekannt an und sucht für die genäherte Zeit des ersten Meridians, zu welcher die Distanz beobachtet ist, den Ort des Mondes und des anderen Gestirns aus den Ephemeriden. Darauf berechnet man nach den Formeln in No. 7 des ersten Abschnitts die wahren Höhen der beiden Gestirne und, wenn man die Abplattung der Erde berücksichtigen will, wenigstens beiläufig auch die Azimute derselben. Nach den Formeln in No. 3 des dritten Abschnitts rechnet man dann die Höhenparallaxen, indem man für den Mond die strengen Formeln:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} \sin p' = \varrho \sin p \sin [z - (\varphi - \varphi') \cos A]$$

$$\frac{\Delta'}{\Delta} \cos p' = 1 - \varrho \sin p \cos [z - (\varphi - \varphi') \cos A],$$

anwendet und sucht endlich für diese mit der Parallaxe behafteten Höhen mit Rücksicht auf den Stand der meteorologischen Instrumente die Refraction, nach deren Anbringung man die scheinbaren Höhen der beiden Gestirne erhält. Da man aber für die Berechnung der Refraction schon immer die scheinbaren d. h. die mit der Parallaxe und Refraction behafteten Höhen anwenden mufs, so hat man diese Rechnung doppelt zu machen.

Man beobachtet nun niemals die Distanz der Mittelpunkte der beiden Gestirne, sondern immer die Distanz ihrer Ränder; man mufs daher zu der beobachteten Distanz noch die Summe der scheinbaren Halbmesser der Gestirne addiren oder dieselbe davon abziehen, je nachdem man die Distanz der nächsten (inneren) oder entfernteren (äufseren) Ränder beobachtet hat. Ist aber r der Horizontalhalbmesser des Mondes, so ist der durch die Parallaxe vergröfserte Halbmesser:

$$r' = r [1 + p \sin h],$$

wo p die Horizontalparallaxe in Theilen des Radius bedeutet.

Da nun die Refraction den verticalen Halbmesser der Gestirne verkleinert, während sie den horizontalen Halbmesser ungeändert läfst, so ist der in der Richtung der Distanz

gezogene Halbmesser der Radius vector einer Ellipse, deren halbe große Axe der mit dem Horizonte parallele Halbmesser und deren halbe kleine Axe der verticale Halbmesser des Gestirns ist. Die Verkürzung des verticalen Halbmessers kann man nun nach den später in VIII des siebenten Abschnitts vorkommenden Formeln berechnen, man findet aber dafür auch in jedem nautischen Handbuche Tafeln, welche die Höhe des Gestirns zum Argumente haben. Nennt man dann π den Winkel, welchen die Richtung der Distanz mit dem durch das eine Gestirn gehenden Verticalkreise macht, h' die Höhe des andern Gestirns, Δ die Distanz beider Gestirne, so ist:

$$\sin\pi = \frac{\sin(A'-A)\cos h'}{\sin\Delta}$$

oder auch:

$$\cos\pi = \frac{\sin h' - \cos\Delta\sin h}{\sin\Delta\cos h},$$

mithin:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi^2 = \frac{\cos\frac{1}{2}(\Delta+h+h')\sin\frac{1}{2}(\Delta+h-h')}{\sin\frac{1}{2}(\Delta+h'-h)\cos\frac{1}{2}(h+h'-\Delta)}.$$

Aus der Gleichung der Ellipse findet man dann aber leicht, wenn man den verticalen und horizontalen Halbmesser mit b und a bezeichnet:

$$r = \frac{b}{\sqrt{\cos\pi^2 + \frac{b^2}{a^2}\sin\pi^2}}.$$

Nachdem man nun auf diese Weise die scheinbare Distanz der Mittelpunkte der beiden Gestirne berechnet hat, so erhält man hieraus in Verbindung mit den scheinbaren und wahren Höhen beider Gestirne die wahre Distanz der Mittelpunkte, wie man dieselbe vom Mittelpunkte der Erde aus beobachtet hätte. Bezeichnet man nämlich mit H', h' und Δ' die scheinbaren Höhen und die scheinbare Distanz der beiden Gestirne, mit E den Unterschied der beiden Azimute, so hat man im Dreieck zwischen dem Zenith und den scheinbaren Oertern der beiden Gestirne:

$$\begin{aligned}\cos\Delta' &= \sin H'\sin h' + \cos H'\cos h'\cos E\\ &= \cos(H'-h') - 2\cos H'\cos h'\sin\tfrac{1}{2}E^2.\end{aligned}$$

Ebenso erhält man, wenn H, h und Δ die wahren Höhen und die wahre Distanz der beiden Gestirne bezeichnen:

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \sin H\sin h + \cos H\cos h\cos E\\ &= \cos(H-h) - 2\cos H\cos h\sin\tfrac{1}{2}E^2,\end{aligned}$$

und wenn man 2 sin $\frac{1}{2}$ E^2 aus beiden Gleichungen eliminirt:

$$\cos\Delta = \cos(H - h) + \frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'}[\cos\Delta' - \cos(H' - h')]. \qquad (a)$$

Setzt man nun:

$$\frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'} = \frac{1}{C}, \qquad (A)$$

so wird in den meisten Fällen $C > 1$ sein und nur, wenn die Höhe des Mondes sehr grofs und die Höhe des anderen Gestirns sehr klein ist, wird das Gegentheil statt finden. Setzt man ferner:

$$H' - h' = d' \text{ und } H - h = d \qquad (B)$$

und nimmt d' und d immer positiv, so wird es auch erlaubt sein

$$\frac{\cos d'}{C} = \cos d'' \text{ und } \frac{\cos\Delta'}{C} = \cos\Delta'' \qquad (C)$$

zu setzen, weil für den Fall, dafs $C < 1$ ist, $\cos d'$ und $\cos\Delta'$ klein sind. Dadurch geht aber die Gleichung (a) über in:

$$\cos\Delta - \cos\Delta'' = \cos d - \cos d''$$

oder, wenn man die Sinus der halben Summe und Differenz der Winkel einführt und den Sinus des kleinen Winkels $\Delta - \Delta''$ mit dem Bogen vertauscht:

$$\Delta - \Delta'' = (d - d'')\frac{\sin\frac{1}{2}(d + d'')}{\sin\frac{1}{2}(\Delta + \Delta'')}.$$

Nimmt man nun hier zuerst $\sin\frac{1}{2}(\Delta' + \Delta'')$ statt $\sin\frac{1}{2}(\Delta + \Delta'')$ und setzt:

$$x = (d - d'')\frac{\sin\frac{1}{2}(d + d'')}{\sin\frac{1}{2}(\Delta' + \Delta'')}, \qquad (D)$$

so erhält man:

$$\Delta = \Delta'' + x, \qquad (E)$$

eine Näherung, welche in den meisten Fällen schon genau sein wird. Ist aber Δ beträchtlich verschieden von Δ', so mufs man die letzte Rechnung wiederholen, indem man mit dem eben gefundenen Δ ein neues x berechnet nach der Formel:

$$x = (d - d'')\frac{\sin\frac{1}{2}(d + d'')}{\sin\frac{1}{2}(\Delta + \Delta'')} \text{*)}.$$

Hier ist nun vorausgesetzt, dafs der Winkel E von einem Orte der Oberfläche der Erde und vom Mittelpunkte aus

*) Bremicker, über die Reduction der Monddistanzen. Astronomische Nachrichten No. 716.

gesehen derselbe sei. In No. 3 des dritten Abschnitts hat man aber gesehen, das die Parallaxe auch das Azimut des Mondes ändert und dafs man, wenn A und H Azimut und wahre Höhe bedeuten, zu dem vom Mittelpunkte der Erde gesehenen Azimut den Winkel:

$$\Delta A = + \frac{\varrho \sin p\,(\varphi - \varphi') \sin A}{\cos H}$$

addiren mufs, um das von der Oberfläche gesehene Azimut zu erhalten. Man hätte daher in der Formel für $\cos \Delta$ nicht $\cos E = \cos(A - a)$, sondern $\cos(E - \Delta A)$ anwenden müssen. Die daraus entstehende Aenderung von Δ ist aber:

$$d\Delta = - \frac{\cos H \cos h \sin(A - a)}{\sin \Delta}\, dA$$

also auch: $d\Delta = - \dfrac{\varrho \sin p\,(\varphi - \varphi') \cos h \sin A \sin(A - a)}{\sin \Delta}$.

Diese Correction hat man dann noch zu dem vorher berechneten Δ hinzuzufügen.

Beispiel. Am 2. Juni 1831 wurde an einem Orte, dessen nördliche Breite $19^0\,31'$ und dessen geschätzte Länge von Greenwich $8^h\,50^m$ östlich war, um $23^h\,8^m\,45^s$ wahre Zeit die Distanz der nächsten Ränder der Sonne und des Mondes:

$$\Delta' = 96^0\,47'\,10''$$

gemessen. Das Barometer zeigte 29.6 englische Zoll, das Thermometer desselben 88^0 Fahrenheit, die Temperatur der Luft war 90^0 Fahrenheit.

Nach dem Nautical Almanac waren die Oerter des Mondes und der Sonne die folgenden:

M. Zeit Greenw.		Rect. ☾	Decl. ☾	Parallaxe
Juni 2	12^h	$336^0\;6'\,24''.0$	$-10^0\,50'\,58''.0$	$56'\,44''.0$
	13^h	38 4 .7	41 48 .4	45 .9
	14^h	337 9 45 .7	32 35 .0	47 .9
	15^h	41 27 .0	23 17 .9	49 .9

		Rect. ☉	Decl. ☉
Juni 2	12^h	$70^0\;5'\,23''.2$	$+22^0\,11'\,48''.9$
	13^h	7 56 .9	12 8 .4
	14^h	10 30 .5	12 27 .9
	15^h	13 4 .1	12 47 .3

Die beobachtete Zeit entsprach nun der Greenwicher Zeit $14^h\,18^m\,45^s$ und für diese Zeit erhält man:

Rect. ☾ =	$337^0\,19'\,39''.6$	Rect. ☉ =	$70^0\,11'\,18''.5$
Decl. ☾ =	$-10\;\;29\;\;41\;.3$	Decl. ☉ =	$+22\;\;12\;\;33\;.9$
P =	56 48 .5	π =	$8''.5$

und damit die wahren Höhen und Azimute des Mondes und der Sonne für die Stundenwinkel:

$$+ 80^0\ 2'\ 53''.\ 8$$

und:

$$-\ 12^0\ 48'\ 45''.\ 0:$$

$$H = 5^0\ 41'\ 58''.\ 4 \qquad h = 77^0\ 43'\ 56''.\ 7$$
$$A = +\ 76^0\ 43'.\ 6 \qquad a = -\ 75^0\ 4'.\ 4.$$

Die Parallaxe des Mondes, nach der strengen Formel:

$$\operatorname{tang} p' = \frac{\varrho \sin p \sin [z - (\varphi - \varphi') \cos A]}{1 - \varrho \sin p \cos [z - (\varphi - \varphi') \cos A]}$$

berechnet, ist $p' = 56'\ 35''.\ 4$, also ist die scheinbare Höhe H' des Mondes gleich $4^0\ 45'\ 23''.\ 0$. Hieran ist nun noch die Refraction anzubringen. Man sucht zu dem Ende einen genäherten Werth für dieselbe, berechnet damit die scheinbare Höhe und sucht hierfür noch einmal die Refraction, indem man zugleich auf den Stand der meteorologischen Instrumente Rücksicht nimmt. Dann erhält man $\varrho = 9'\ 3''.\ 2$, also wird die scheinbare Höhe des Mondes:

$$H' = 4^0\ 54'\ 26''.\ 2.$$

Für die Sonne wird:

$$h' = 77^0\ 44'\ 6''.\ 5.$$

Aus der Horizontalparallaxe findet man durch Multiplication mit 0,2725 den Horizontalhalbmesser des Mondes:

$$r = 15'\ 28''.\ 8$$

und hiermit den durch die Parallaxe vergröfserten Halbmesser:

$$r' = 15'\ 30''.\ 1.$$

Die Verkleinerung des verticalen Halbmessers durch die Refraction beträgt $26''.\ 0$, der Winkel π ist $5^0\ 48'$, also wird der Halbmesser des Mondes in der Richtung der gemessenen Distanz:

$$r' = 15'\ 4''.\ 6,$$

und da der Halbmesser der Sonne $15'\ 47''.\ 0$ war, so ist die scheinbare Distanz der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes:

$$\Delta' = 97^0\ 18'\ 1''.\ 6.$$

Nach den Formeln (A), (B) und C erhält man ferner:

$$\log\ C = 0.000463$$
$$d = 72^0\ \ 1'\ 58''$$
$$d' = 72\ \ 49\ \ 40$$
$$d'' = 72\ \ 50\ \ 48$$
$$\Delta'' = 97\ \ 17\ \ 33$$

und endlich durch eine doppelte Berechnung von x nach den Formeln (D) und (E) die wahre Distanz der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes:

$$\Delta = 96^\circ\ 30'\ 39''.$$

Für die wahren Greenwicher Zeiten 12^h, 13^h etc. sind nun aber die wahren Distanzen der Mittelpunkte beider Gestirne:

12^h	97° 43′ 0″.4
13^h	13 4 .5
14^h	96 43 6 .5
15^h	13 6 .2,

also ist die wahre Greenwicher Zeit, welche der Distanz 96° 30′ 39″ entspricht, $14^h\ 24^m\ 55^s.2$. Da nun die wahre Ortszeit der Beobachtung $23^h\ 8^m\ 45^s.0$ war, so ist der Längenunterschied von Greenwich:

$$8^h\ 43^m\ 49^s.8 \text{ östlich.}$$

Der hier gefundene Meridianunterschied ist so nahe gleich dem vorher angenommenen, dafs aus der Berechnung der Oerter der Sonne und des Mondes für die nach letzterem gefundene Greenwicher Zeit, nur ein kleiner Fehler entstehen kann. Wäre der Unterschied bedeutend gewesen, so hätte man die Rechnung wiederholen müssen, indem man die Oerter von Sonne und Mond jetzt für die Greenwicher Zeit $14^h 24^m 55^s$ berechnet hätte.

Bessel hat in No. 220 der astronomischen Nachrichten *) eine andere Methode bekannt gemacht, durch welche man die Länge aus beobachteten Monddistanzen mit grofser Genauigkeit finden kann. Da man sich aber zur See immer der vorigen oder wenigstens einer ganz ähnlichen Methode bedient, auf dem Lande aber die Länge immer durch andre, eine gröfsere Genauigkeit gewährende Mittel bestimmt werden kann, so ist es nicht weiter nöthig, die Besselsche Methode hier näher auseinander zu setzen.

33. Ein vorzügliches Mittel zur Längenbestimmung gewährt die Beobachtung der Culmination des Mondes an ver-

---

*) Diesem Aufsatze von Bessel ist auch das eben gegebene Beispiel entnommen.

schiedenen Orten. Wegen der schnellen Bewegung des Mondes ist nämlich die Sternzeit der Culmination des Mondes für einen jeden Ort der Erdoberfläche eine andre. Kennt man daher die Geschwindigkeit, mit welcher die Rectascension sich ändert, so kann man aus dem Unterschiede der Sternzeiten der Culmination an verschiedenen Orten deren Längenunterschied finden. Da die Beobachtungen im Meridiane angestellt werden, so gewährt diese Methode noch den Vortheil, daſs weder die Parallaxe noch die Refraction einen Einfluſs darauf haben. Um nun auch von den Fehlern der Instrumente unabhängiger zu sein, beobachtet man an beiden Orten nicht die Sternzeit der Culmination selbst, sondern den Unterschied der Sternzeiten der Culmination des Mondes mit denen einiger seinem Parallele nahe stehender Sterne, welche in den astronomischen Ephemeriden schon im Voraus angegeben werden, damit die Beobachter an den verschiedenen Orten auch dieselben Sterne wählen.

Diese Methode zur Längenbestimmung wurde schon im vorigen Jahrhundert von Pigott vorgeschlagen, indessen hat erst die feinere Beobachtungskunst der neueren Zeit den dadurch gewonnenen Resultaten die nöthige Sicherheit gegeben.

Für irgend einen ersten Meridian seien für die Zeit T die Rectascension des Mondes gleich α, und deren Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, etc. berechnet. An einem Orte, dessen östliche Länge d ist, sei dann zu einer Zeit, die der Zeit, $T + t$ des ersten Meridians entspricht, also zur Ortszeit $T + t + d$ die Culmination des Mondes beobachtet. Dann wird zu dieser Zeit die Rectascension des Mondes gleich:

$$\alpha + t \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{2} t^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \tfrac{1}{6} t^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots$$

gewesen sein. Ist dann ebenso an einem andern Orte, dessen östliche Länge d' ist, die Culmination des Mondes zur Zeit $T + t'$ des ersten Meridians, also zur Ortszeit $T + t' + d'$ beobachtet, so gehört zu dieser Zeit die Rectascension:

$$\alpha + t' \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{2} t'^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \tfrac{1}{6} t'^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots$$

Da nun die Beobachtungen im Meridiane angestellt sind,

so sind die Sternzeiten der Beobachtungen gleich der wahren Rectascension des Mondes. Nimmt man also an, dafs die Tafeln, aus denen man die Werthe von α und deren Differentialquotienten entnommen hat, die Rectascension des Mondes um die Gröfse $\Delta\alpha$ zu klein geben, so wird man, wenn man

$$T + t + d = \Theta$$

und

$$T + t' + d' = \Theta'$$

setzt, die folgenden Gleichungen haben:

$$\Theta = \alpha + \Delta\alpha + t \,.\, \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{2}\, t^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \tfrac{1}{6}\, t^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots$$

$$\Theta' = \alpha + \Delta\alpha + t' \,.\, \frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{2}\, t'^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \tfrac{1}{6}\, t'^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots$$

mithin:

$$\Theta' - \Theta = (t' - t)\frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{2}\,(t'^2 - t^2)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \ldots \quad (a)$$

Da nun aber auch:

$$d' - d = (\Theta' - \Theta) - (t' - t), \quad (b)$$

so hat man also, um $d' - d$ berechnen zu können, nur noch $t' - t$ aus der Gleichung (a) zu bestimmen. Diese Gleichung ist nun keine reine Function von $t' - t$, indem sie auch $t'^2 - t^2$ enthält, sie kann aber durch eine geschickte Wahl von T in eine solche verwandelt werden. Führt man nämlich statt der Zeit T das arithmetische Mittel der Zeiten $T + t$ und $T + t'$, d. h. die Zeit $T + \frac{1}{2}(t + t') = T'$ ein, so hat man statt der Zeiten $T + t$ und $T + t'$ jetzt respective $T' - \frac{1}{2}(t' - t)$ und $T' + \frac{1}{2}(t' - t)$ zu setzen. Nimmt man daher an, dafs α und die Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dt}$ etc. zur Zeit T' gehören, so erhält man die Gleichungen:

$$\Theta = \alpha + \Delta\alpha - \tfrac{1}{2}(t' - t)\frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{8}(t' - t)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \tfrac{1}{48}(t' - t)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

$$\Theta' = \alpha + \Delta\alpha + \tfrac{1}{2}(t' - t)\frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{8}(t' - t)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \tfrac{1}{48}(t' - t)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3},$$

mithin auch:

$$\Theta' - \Theta = (t' - t)\frac{d\alpha}{dt} + \tfrac{1}{24}(t' - t)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

und, wenn man die letztere Gleichung so auflöst, dafs man

zuerst das zweite Glied der rechten Seite vernachlässigt, nachher aber den so gefundenen Werth von $t'-t$ in dies Glied substituirt:

$$t'-t = \frac{\Theta'-\Theta}{\frac{d\alpha}{dt}} - \tfrac{1}{24}\left[\frac{\Theta'-\Theta}{\frac{d\alpha}{dt}}\right]^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3}. \qquad (c)$$

Ist die Meridiandifferenz der beiden Orte nicht gröfser als zwei Stunden, so ist das letzte Glied so klein, dafs man es ganz vernachlässigen kann.

Damit ist nun das Problem gelöst, doch sind für die practische Anwendung noch einige Berücksichtigungen nöthig. Man sieht übrigens, dafs die Auflösung wieder eine indirecte ist, weil die Bestimmung der Zeit T' schon eine genäherte Kenntnifs des Meridianunterschiedes erfordert.

Es seien nun Θ und Θ' in Sternzeit gegeben und der Unterschied $\Theta'-\Theta$ in Sternzeitsecunden ausgedrückt. Soll dann $t'-t$ ebenfalls in Secunden gefunden werden, so mufs $\frac{d\alpha}{dt}$ die Bewegung des Mondes während einer Zeitsecunde ausdrücken. Nennt man also h die Aenderung der Rectascension des Mondes im Bogen während einer Stunde Sternzeit, so ist:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \tfrac{1}{15}\cdot\frac{h}{3600}.$$

In den Ephemeriden sind aber die Oerter des Mondes nicht für Sternzeit, sondern für mittlere Zeit angegeben; man wird also daraus die Bewegung des Mondes während einer Stunde mittlerer Zeit entnehmen. Da nun aber 366.24220 Sterntage gleich 365.24220 mittleren Tagen sind, also

ein Sterntag $=$ 0.9972693 mittleren Tagen

ist, so erhält man, wenn h' die Bewegung des Mondes in Rectascension in einer Stunde mittlerer Zeit bedeutet:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \tfrac{1}{15}\cdot\frac{0.9972693}{3600}\,h', \qquad (d)$$

mithin:

$$t'-t = \frac{15\times 3600}{0.9972693}\cdot\frac{\Theta'-\Theta}{h'},$$

oder nach der Gleichung (b):

$$d' - d = (\Theta' - \Theta)\left(1 - \frac{15 \times 3600}{0.9972693\, h'}\right).$$

Beim Monde ist nun das zweite Glied in der Klammer immer gröſser als eins; man schreibt also besser:

$$d - d' = (\Theta' - \Theta)\left(\frac{15 \times 3600}{0.9972693\, h'} - 1\right), \qquad (e)$$

und je nachdem $\Theta' - \Theta$ positiv oder negativ ist, liegt der zweite Ort, für den Θ' die Zeit der Beobachtung ist, westlich oder östlich vom ersten.

Man beobachtet nun niemals die Culmination des Mittelpunkts des Monds, dessen Ort in den Tafeln angegeben ist, sondern einen Rand; man muſs daher aus der Beobachtungszeit die Culminationszeit des Mittelpunktes berechnen. Im siebenten Abschnitte wird man die strenge Art und Weise der Reduction der im Meridian angestellten Beobachtungen des Mondes kennen lernen. Hier wird indessen das Folgende genügen. Der erste Rand heiſst derjenige, welcher zuerst in den Meridian kommt, dessen Rectascension also kleiner ist als die des Mittelpunkts des Mondes. Um daher die Rectascension des Mittelpunkts zu erhalten, wird man, wenn der erste Rand beobachtet ist, zu der Beobachtungszeit eine Gröſse hinzuzufügen haben, dagegen wird man dieselbe Gröſse von der Beobachtungszeit abziehen müssen, wenn der zweite oder folgende Rand beobachtet ist. Diese Gröſse wird aber gleich sein der Zeit, welche der Halbmesser des Mondes braucht, um durch den Meridian zu gehen, d. h. gleich dem dem Halbmesser entsprechenden Stundenwinkel. Denkt man sich nun das rechtwinklige Dreieck, dessen eine Ecke der Pol, die andre der im Meridiane befindliche Mondrand, die dritte der von der Parallaxe befreite Ort des Mittelpunkts des Mondes ist und bezeichnet die geocentrische Declination und den geocentrischen Halbmesser des Mondes durch δ und R, den Stundenwinkel des Mittelpunkts durch τ, so ist:

$$\sin \tau = \frac{\sin R}{\cos \delta},$$

oder:

$$\tau = \tfrac{1}{15}\,\frac{R}{\cos \delta},$$

wenn man τ gleich in Zeit erhalten will. Da nun aber die Rectascension des Mondes fortwährend wächst, so wird die Zeit, welche der Mond gebraucht, um den Stundenwinkel τ zu durchlaufen, gleich $\frac{\tau}{1-\lambda}$ sein, wenn λ die Zunahme der Rectascension in einer Zeitsecunde, oder den durch die Gleichung (d) gefundenen Werth von $\frac{da}{dt}$ bedeutet. Da ferner auch δ und R mit der Zeit veränderlich sind, so hat man, wenn ϑ und ϑ' die Zeiten bedeuten, zu denen der Rand des Mondes an beiden Orten im Meridiane beobachtet ist*):

$$\Theta' - \Theta = \vartheta' - \vartheta \pm \left(\frac{R'}{\cos\delta'} - \frac{R}{\cos\delta}\right)\frac{1}{1-\lambda},$$

mithin nach Gleichung (e):

$$\lambda = \frac{0.9972693\,h'}{3600},$$

$$d - d' = \left[\vartheta' - \vartheta \pm \left(\frac{R'}{\cos\delta'} - \frac{R}{\cos\delta}\right)\frac{1}{1-\lambda}\right]\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right), \qquad (A)$$

wo h' die Bewegung des Mondes in Rectascension in Zeit während einer mittleren Stunde ist und wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der erste oder zweite Rand beobachtet ist.

Stände nun das Instrument, an welchem man die Culmination des Mondes an dem einen Orte beobachtet, nicht genau im Meridiane, so würde man also den Mond daselbst in einem von Null verschiedenen Stundenwinkel beobachten und würde daher, wenn dieser gleich s ist, den Längenunterschied der beiden Orte um die Gröfse

$$s\left(\frac{15 \times 3600}{0.9972693\,h'} - 1\right)$$

fehlerhaft finden. Für Reisende, für welche es immer Schwierigkeit hat, ein Instrument ganz genau in den Meridian zu bringen, würde also diese Methode nicht gut anwendbar sein, zumal da dieselbe auch eine sehr genaue Zeitbestimmung voraussetzen würde. Man vermeidet aber diese Fehler, wenn man solche Sterne mit dem Monde vergleicht, welche in dem Parallel desselben liegen, weil dann die Fehler des Instru-

---

*) Vergl. No. 21 des siebenten Abschnitts.

ments auf die Beobachtungen des Mondes und Sterns denselben Einfluſs haben. Beobachtet man also an beiden Orten statt der Rectascension des Mondes blos den Unterschied der Rectascension des Mondes und des Sterns, also die Zeit, welche zwischen den Durchgängen beider Gestirne verfliefst, so ist dieser Unterschied von den Fehlern des Instruments ganz unabhängig. Da man aber doch den Rectascensionsunterschied nicht für die Zeit der Culmination des Mondes beobachtet hat, sondern für die Zeit, wo derselbe in dem Stundenwinkel s stand, wo derselbe also durch den Meridian eines Ortes ging, dessen Längenunterschied von dem Beobachtungsorte gleich s ist, so erhält man den gesuchten Meridianunterschied der beiden Orte um die Gröſse s fehlerhaft. Man muſs daher zu dem gefundenen Längenunterschied noch den absoluten Werth des Stundenwinkels, in welchem man Mond und Stern beobachtet hat, mit positivem oder negativem Zeichen hinzulegen, je nachdem der Meridian des Instruments zwischen oder auſser denen der Orte liegt*). Wie man aber den Stundenwinkel s aus den Fehlern des Instruments herleitet, wird später bei der Theorie des Passageninstruments in No. 18 des siebenten Abschnitts gezeigt werden.

Damit nun die Beobachter immer dieselben Sterne zum Vergleichen mit dem Monde wählen, wird jährlich in dem Nautical Almanac und danach auch in den andern astronomischen Ephemeriden ein Verzeichniſs der Sterne im Parallel des Mondes für alle Tage, an welchen der Mond im Meridiane beobachtet werden kann, bekannt gemacht.

Beispiel. Am 13. Juli 1848 wurden in Bilk die Mondsterne beobachtet und die folgenden Durchgangszeiten durch den Meridian ohne Anbringung des Standes der Uhr gefunden **):

---

*) Man kann auch zu dem beobachteten Rectascensionsunterschiede des Mondes und Sterns die Gröſse

$$\pm \frac{s\lambda}{1-\lambda}$$

hinzulegen.

**) Vergl. No. 21 des siebenten Abschnitts.

η Ophiuchi	17h	1m	52s	.64
ϱ Ophiuchi		12	6	.59
Mond-Mitte		27	34	.60
μ^1 Sagittarii	18	4	52	.99
λ Sagittarii		18	48	.12.

An demselben Tage wurden die Mondsterne auch in Hamburg beobachtet, und es waren die Zeiten der Culmination:

η Ophiuchi =	17h	1m	42s	.61
ϱ Ophiuchi =		11	56	.91
☾ I. Rand =		25	50	.43
μ^1 Sagittarii =	18	4	43	.53
λ Sagittarii =		18	38	.56.

Der Halbmesser des Mondes für die Zeit der Culmination in Hamburg war $15' 2''.10$, die Declination $-18^0 10'.1$, die Aenderung der Rectascension in einer Stunde mittlerer Zeit $= 129^s.8$, also $\lambda = 0.03596$. Es wird daher:

$$\frac{R}{(1-\lambda)\cos\delta} = 65^s.66,$$

mithin die Zeit der Culmination der Mitte des Mondes:

$$17^h\ 26^m\ 56^s.09.$$

Ferner erhält man die Unterschiede der Rectascensionen der Sterne und der Mitte des Mondes:

	für Bilk:	für Hamburg:
η Ophiuchi	$+25^m\ 41^s.96$	$+25^m\ 13^s.48$
ϱ Ophiuchi	$+15\ \ 28\ .01$	$+14\ \ 59\ .18$
μ^1 Sagittarii	$-37\ \ 18\ .39$	$-37\ \ 47\ .44$
λ Sagittarii	$-51\ \ 13\ .52$	$-51\ \ 42\ .47,$

also werden die Unterschiede zwischen den Beobachtungen in Bilk und in Hamburg:

$$\begin{aligned} \Theta' - \Theta = &+28^s.48 \\ &\ \ 28\ .83 \\ &\ \ 29\ .05 \\ &\ \ 28\ .95 \\ \hline \text{im Mittel}\ &+28^s.83. \end{aligned}$$

Nun waren in No. 15 der Einleitung die stündlichen Bewegungen für die nachstehenden Berliner Zeiten gefunden:

10^h	$+2^m\ 9^s.77$
11^h	$2\ \ 9\ .91$
12^h	$2\ \ 10\ .05.$

Da nun die Beobachtung in Bilk etwa der Berliner Zeit $10^h\,30^m$, die in Hamburg der Berliner Zeit $10^h\,16^m$ entspricht so ist:

$$T' = 10^h\,23^m$$

also:

$$h' = 2^m\,9^s.82.$$

Hiermit erhält man dann nach Formel (c):

$$d - d' = +\,12^m\,52^s.83.$$

Um so viel liegt also Hamburg östlicher als Bilk *).

Anm. Da h ungefähr gleich $30'$ ist, so wird der Coefficient von $\vartheta' - \vartheta$ in der Gleichung (A) etwa 29. Die Beobachtungsfehler werden daher in dem Längenunterschiede etwa 29 mal vergrößsert erscheinen, sodaſs ein Fehler von $0^s.2$ in $\vartheta' - \vartheta$ einen Fehler von etwa 6^s in der Länge erzeugt.

---

*) Sind für beide Orte die Beobachtungszeiten eines Randes angegeben, so rechnet man bequemer nach Formel (A).

Sechster Abschnitt.

Bestimmung der Dimensionen der Erde und der Horizontalparallaxen der Himmelskörper.

In den vorigen Abschnitten sind häufig die Constanten benutzt, die sich auf die Gestalt und Gröſse der Erde beziehen, ebenso die Winkel, unter denen der Halbmesser der Erde von andern Himmelskörpern aus erscheint oder die Horizontalparallaxen der Himmelskörper, und es ist nun noch zu zeigen, durch welche Methoden diese Constanten bestimmt worden sind. Von den Horizontalparallaxen wird nur die der Sonne und des Mondes durch unmittelbare Beobachtungen bestimmt, indem die Entfernungen der Planeten und Cometen von der Erde in Einheiten der halben groſsen Axe der Erdbahn sich aus den Bahnen dieser Himmelskörper ergeben, die dieselben nach den Keplerschen Gesetzen um die Sonne beschreiben. Um daher die Horizontalparallaxen aller dieser Himmelskörper zu erhalten, ist nur noch die Kenntniſs der Sonnenparallaxe erforderlich, oder auch die Kenntniſs der Horizontalparallaxe eines dieser Planeten.

I. Bestimmung der Gestalt und Gröſse der Erde.

1. Die Gestalt der Erde ist, wie sowohl die Theorie zeigt als auch wirkliche Messungen ergeben haben, die eines an den Polen abgeplatteten Sphäroids, d. h. eines solchen, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht. Freilich könnte dies nur dann in aller Strenge der Fall sein, wenn die Erde ein flüssiger Körper wäre, das abgeplattete Sphäroid ist aber diejenige geometrische krumme Fläche, welche der wahren Gestalt der Oberfläche der Erde am Nächsten kommt.

Die Dimensionen dieses Sphäroids werden durch Gradmessungen bestimmt, ein Verfahren, bei welchem man durch geodätische Operationen die Länge eines Gradbogens mifst und zugleich durch die Beobachtung der Polhöhen der Anfangs- und Endstation des gemessenen Bogens seine Gröfse in Graden bestimmt. Diese Methode ist schon sehr alt und schon Eratosthenes (etwa 300 v. Ch.) bediente sich derselben, um dadurch den Umfang der von ihm als kugelförmig betrachteten Erde zu bestimmen. Eratosthenes bemerkte nämlich, dafs die Städte Alexandrien und Syene in Aegypten nahe unter demselben Meridiane lagen. Ferner wufste er, dafs am Tage des Sommersolstitiums die Körper zu Syene keinen Schatten warfen und schlofs daraus, dafs dieser Ort unterm nördlichen Wendekreise lag. Er mafs daher an diesem Tage die Entfernung der Sonne vom Zenith von Alexandrien und fand dafür 7° 12′. Der Bogen des Meridians zwischen Syene und Alexandrien betrug daher ebenfalls 7° 12′, oder den funfzigsten Theil des Umfangs der Erde. Da nun Eratosthenes durch die Vermessungen der Aegyptischen Ländereien wufste, dafs die Entfernung der beiden Orte 5000 Stadien betrug, so fand er für den Umfang der Erde 250000 Stadien. Diese Bestimmung mufste nun aus verschiedenen Ursachen fehlerhaft sein. Einmal liegen nämlich die beiden Städte nicht unter demselben Meridian, sondern Syene etwa 3° östlicher als Alexandrien. Ferner liegt Syene nicht unter dem nördlichen Wendekreise, da die Polhöhe dieses Orts nach neueren Bestimmungen 24° 8′ ist, während die Schiefe der Ecliptic zu Eratosthenes Zeiten 23° 44′ betrug. Endlich war auch die Breite von Alexandrien und die Entfernung der beiden Orte von einander fehlerhaft bestimmt. Eratosthenes hat aber das Verdienst, die Messung der Erde zuerst versucht zu haben und zwar nach einer Methode, deren man sich noch jetzt zu diesem Zwecke bedient.

Nachdem Newton durch theoretische Betrachtungen gefunden hatte, dafs die Gestalt der Erde nicht kugelförmig, sondern sphäroidisch sei, reichte es nicht mehr hin, zur Bestimmung der Dimensionen der Erde eine Gradmessung an einem Orte anzustellen, sondern es mufsten dazu zwei Gradmessungen an zwei verschiedenen Orten der Erdoberfläche

unter möglichst verschiedenen Polhöhen mit einander verbunden werden, um mit der Gröfse auch zugleich die Abplattung der Erde bestimmen zu können.

In No. 2 des dritten Abschnitts waren nun für die Coordinaten eines Punktes auf der Erdoberfläche, bezogen auf ein in der Ebene des Meridians liegendes Axensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkte der Erde und dessen Axen der x und y respective dem Aequator und der kleinen Axe parallel angenommen werden, die folgenden Ausdrücke gefunden:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}},$$

$$y = \frac{a \sin \varphi (1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}},$$

wo a und ε die halbe grofse Axe und Excentricität der Meridianellipse, φ die Polhöhe des Ortes der Oberfläche bezeichnen.

Ferner ist der Krümmungshalbmesser für einen Punkt einer Ellipse, dessen Abscisse x ist:

$$r = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a b},$$

wo b die halbe kleine Axe bedeutet, oder, wenn man für x seinen eben gegebenen Werth setzt:

$$r = \frac{a (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist daher G die Länge eines Meridiangrades in irgend einem Längenmaafse ausgedrückt und φ die Polhöhe seiner Mitte, so ist:

$$G = \frac{\pi a (1 - \varepsilon^2)}{180 (1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo π das Verhältnifs des Kreisumfangs zum Durchmesser $= 3.1415927$ ist. Hat man nun einen zweiten Meridiangrad G' gemessen, und ist wieder φ' die Polhöhe seiner Mitte, sodafs man die Gleichung hat:

$$G' = \frac{\pi a (1 - \varepsilon^2)}{180 (1 - \varepsilon^2 \sin \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so findet man die Excentricität der Ellipse aus der Formel:

$$\varepsilon^2 = \frac{1 - \left(\frac{G}{G'}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sin \varphi'^2 - \left(\frac{G}{G'}\right)^{\frac{2}{3}} \sin \varphi^2},$$

und, nachdem man diese kennt, aus einer der beiden Formeln für G oder G' auch die halbe grofse Axe der Erde.

Beispiel. Die Entfernung der Parallelen von Tarqui und Cotschesqui in Peru wurde von Bouguer und Condamine gemessen und dieselbe gleich 176875.5 Toisen gefunden. Die Polhöhen der beiden Orte wurden zu

$$-3^{\circ}\,4'\,32''.068$$

und

$$+0^{\circ}\,2'\,31''.387$$

bestimmt.

Ferner fand Swanberg die Entfernung der Parallelen der beiden Orte Malörn und Pahtawara in Lappland gleich 92777.981 Toisen und deren Polhöhen gleich

$$65^{\circ}\,31'\,30''.265$$

und

$$67^{\circ}\,8'\,49''.830.$$

Aus der Gradmessung in Peru ergiebt sich für die Länge eines Grades unter der Polhöhe

$$\varphi = -1^{\circ}\,31'\,0''.34$$
$$G = 56734.01 \text{ Toisen,}$$

und aus der Gradmessung in Lappland die Länge eines Grades unter der Polhöhe:

$$\varphi' = 66^{\circ}\,20'\,10''.05:$$
$$G' = 57196.15 \text{ Toisen.}$$

Nach den vorher gegebenen Formeln erhält man hieraus:

$$\varepsilon^2 = 0.0064351$$
$$a = 3271651 \text{ Toisen,}$$

und da die Abplattung α der Erde gleich $1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}$ ist:

$$\alpha = \frac{1}{310.29}.$$

Solcher Gradmessungen sind nun mehrere an verschiedenen Orten der Erde mit der gröfsten Sorgfalt angestellt worden. Da man aber aus der Combination je zweier derselben für die Dimensionen der Erde immer verschiedene Werthe erhält, woran zum Theil die Beobachtungsfehler, hauptsächlich aber die Abweichungen der Erdoberfläche von der wahren sphäroidischen Gestalt Schuld sind, so mufs man aus allen diesen einzelnen Bestimmungen dasjenige Resultat suchen, welches sich an alle verschiedenen Gradmessungen am genauesten anschliefst.

2. Die Länge s des Bogens einer Curve wird gefunden durch die Formel:

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \, . \, dx.$$

Differenzirt man nun die in der vorigen Nummer gegebenen Ausdrücke für x und y nach φ und substituirt die Werthe von dx und dy in die Formel für s, so erhält man für die Länge eines Bogens eines elliptischen Erdmeridians vom Aequator bis zu einem Orte, dessen Polhöhe φ ist:

$$s = a\,(1 - \varepsilon^2) \int \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} \, .$$

Entwickelt man den Ausdruck unter dem Integralzeichen in eine Reihe, so findet man:

$$[1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2]^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \sin\varphi^2 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\,.\,2}\varepsilon^4 \sin\varphi^4 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}\varepsilon^6 \sin\varphi^6 + \ldots$$

und hieraus, wenn man statt der Potenzen von $\sin\varphi$ die Cosinus der vielfachen Winkel einführt und die einzelnen Glieder nach der Formel

$$\int \cos\lambda x \; dx = \frac{1}{\lambda} \sin\lambda x$$

integrirt:

$$s = a\,(1 - \varepsilon^2)\, E\, [\varphi - \alpha \sin 2\varphi + \beta \sin 4\,\varphi \text{ etc.}],$$

wo

$$E = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{45}{64}\varepsilon^4 + \frac{175}{256}\varepsilon^6 + \ldots$$

$$E\alpha = \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{15}{32}\varepsilon^4 + \frac{525}{1024}\varepsilon^6 + \ldots$$

$$E\beta = \frac{15}{256}\varepsilon^4 + \frac{105}{1024}\varepsilon^6 + \ldots$$

Setzt man hier $\varphi = 180^0$, so erhält man, wenn man die mittlere Länge eines Meridiangrades mit g bezeichnet:

$$180\,g = a\,(1 - \varepsilon^2)\, E\,.\,\pi,$$

also auch:

$$s = \frac{180\,g}{\pi}\,[\varphi - \alpha \sin 2\varphi + \beta \sin 4\,\varphi - \ldots]$$

Die Entfernung der den Polhöhen φ und φ' entsprechenden Parallelkreise wird daher:

$$s' - s = \frac{180\,g}{\pi}\,[\varphi' - \varphi - 2\,\alpha \sin(\varphi' - \varphi)\cos(\varphi' + \varphi)$$
$$+ 2\,\beta \sin 2\,(\varphi' - \varphi)\cos 2\,(\varphi' + \varphi)],$$

oder, wenn man den gemessenen Bogen $\varphi' - \varphi = l$ und die

Summe der Polhöhen $\varphi' + \varphi = 2L$ setzt, l in Secunden ausdrückt und unter w die Zahl 206264.8 versteht:

$$\frac{3600}{g}(s' - s) = l - 2w\alpha \sin l \cos 2L + 2w\beta \sin 2l \cos 4L.$$

Setzt man nun hier für l den beobachteten Werth der Differenz der Polhöhen und für $s' - s$ die gemessene Länge des Meridianbogens, so würde diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn man für g und ε, also für g, α und β diejenigen Werthe nimmt, welche grade dieser Messung entsprechen. Nimmt man nun aber dafür diejenigen Werthe, welche sich aus allen Gradmessungen ergeben, so wird man, wenn die Gleichung erfüllt werden soll, den beobachteten Polhöhen kleine Correctionen hinzufügen müssen. Schreibt man also $\varphi + x$ und $\varphi' + x'$ statt φ und φ', wo x und x' kleine Gröfsen sind, deren Quadrate und Producte vernachlässigt werden können, so erhält man, wenn man auch den Einflufs dieser Aenderungen auf L unberücksichtigt läfst:

$$\frac{3600}{g}(s' - s) = l - 2w\alpha \sin l \cos 2L + 2w\beta \sin 2l \cos 4L + (x' - x)\varrho,$$

wo:

$$\varrho = 1 - 2\alpha \cos l \cos 2L + 4\beta \cos 2l \cos 4L;$$

man hat also auch:

$$x' - x = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{3600}{g}(s' - s) - (l - 2w\alpha \sin l \cos 2L + 2w\beta \sin 2l \cos 4L)\right).$$

Eine jede Beobachtung der Polhöhen zweier Orte auf der Oberfläche der Erde und der Messung der Entfernung ihrer Parallelen giebt also für die an die beobachteten Polhöhen anzubringenden Verbesserungen eine solche Gleichung. Hat man nun die Resultate mehrerer Gradmessungen, sodafs man mehr solcher Gleichungen als unbekannte Gröfsen hat, so mufs man die Werthe der Unbekannten g und ε so bestimmen, dafs die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler $x' - x$, etc. ein Minimum wird. Nimmt man nun g_0 und α_0 als Näherungswerthe von g und α an und setzt:

$$g = \frac{g_0}{1 + i} \text{ und } \alpha = \alpha_0(1 + k)$$

und vernachlässigt wieder die Quadrate und Producte von i und k, so erhält man:

$$x' - x = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{3600}{g_0}(s' - s) - l\right) + \frac{2w}{\varrho}[\alpha_0 \sin l \cos 2L - \beta_0 \sin 2l \cos 4L]$$
$$+ \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{3600}{g_0}(s' - s)i + \frac{2w}{\varrho}\left[\alpha_0 \sin l \cos 2L - \alpha_0 \frac{d\beta_0}{d\alpha_0} \sin 2l \cos 4L\right]k.$$

Hier bezeichnet β_0 den Werth, in welchen β übergeht, wenn man für α den Näherungswerth α_0 setzt. Um diesen ebenso wie den Differentialquotienten $\frac{d\beta_0}{d\alpha_0}$ zu erhalten, mufs man β durch α ausdrücken.

Es war aber:

$$\alpha = \frac{\frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{15}{32}\varepsilon^4 + \frac{525}{1024}\varepsilon^6 + \ldots}{1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \frac{45}{64}\varepsilon^4 + \frac{175}{256}\varepsilon^6 + \ldots}$$

$$= \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{3}{16}\varepsilon^4 + \frac{111}{1024}\varepsilon^6 + \ldots$$

Ebenso ist:

$$\beta = \frac{15}{256}\varepsilon^4 + \frac{15}{256}\varepsilon^6 + \ldots$$

Kehrt man nun die Reihe für α um, so erhält man:

$$\varepsilon^2 = \frac{8}{3}\alpha - \frac{32}{9}\alpha^2 + 4\alpha^3 - \ldots$$

und, wenn man dies in den Ausdruck für β einführt:

$$\beta = \frac{5}{12}\alpha^2 + \frac{35}{108}\alpha^4 + \ldots$$

also auch:

$$\alpha\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{5}{6}\alpha^2 + \frac{35}{27}\alpha^4 + \ldots$$

Setzt man daher:

$$n = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{3600}{g_0}(s'-s) - l\right)$$
$$+ \frac{2w}{\varrho}\left[\alpha_0 \sin l \cos 2L - \left(\frac{5}{12}\alpha_0{}^2 + \frac{35}{108}\alpha_0{}^4\right)\sin 2l \cos 4L\right] \qquad (A)$$

$$a = \frac{1}{\varrho}\,\frac{3600}{g_0}(s'-s)$$

und:

$$b = \frac{2w}{\varrho}\left[\alpha_0 \sin l \cos 2L - \left(\frac{5}{6}\alpha_0{}^2 + \frac{35}{27}\alpha_0{}^4\right)\sin 2l \cos 4L\right],$$

so erhält man die Gleichung:

$$x' - x = n + a\,i + b\,k, \qquad (B)$$

und eine ähnliche Gleichung giebt die Verbindung des südlichsten Punktes einer Gradmessung mit einem jeden nördlicheren Punkte.

Behandelt man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so werden die Gleichungen des Minimums in Bezug auf x, i und k für jede einzelne Gradmessung, wenn

μ die Anzahl aller bei einer Gradmessung beobachteten Polhöhen bedeutet:

$$\mu x + [a] i + [b] k + [n] = 0$$
$$[a] x + [aa] i + [ab] k + [an] = 0$$
$$[b] x + [ab] i + [bb] k + [bn] = 0,$$

und wenn man x eliminirt, so giebt jede Gradmessung zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von i und k die beiden Gleichungen:

$$0 = [an_1] + [aa_1] i + [ab_1] k$$
$$0 = [bn_1] + [ab_1] i + [bb_1] k,$$

nach den in No. 23 der Einleitung eingeführten Bezeichnungen.

Addirt man daher die einzelnen Gröfsen $[an_1]$, die man für die verschiedenen Gradmessungen findet und bezeichnet die Summe mit (an_1), ebenso mit (aa_1) die Summe aller $[aa_1]$, etc., so erhält man zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von i und k aus allen Gradmessungen die Gleichungen:

$$0 = (an_1) + (aa_1) i + (ab_1) k$$
$$0 = (bn_1) + (ab_1) i + (bb_1) k.$$

Als Beispiel sollen die folgenden Gradmessungen berechnet werden:

1) Gradmessung in Peru.

	Polhöhe	l	Entfernung der Parallele
Tarqui	— 3° 4′ 32″068		
Cotchesqui	+ 0 2 31 387	3° 7′ 3″ 45	176875.5 Toisen

2) Gradmessung in Ostindien.

	Polhöhe	l	Entfernung der Parallele
Trivandeporum	+ 11° 44′ 52″. 59		
Paudru	13 19 49 .02	1° 34′ 56 . 43	89813 . 010.

3) Gradmessung in Preufsen.

Truns	54° 13′ 11″. 47		
Königsberg	54 42 50 .50	0° 29′ 39″. 03	28211 . 629
Memel	55 43 40 .45	1 30 28 . 98	86176 . 975.

4) Gradmessung in Schweden.

Malörn	65° 31′ 30″. 265		
Pahtawara	67 8 49 .830	1° 37′ 19″. 56	92777 . 981

Setzt man nun:

$$g = \frac{57008}{1 + i} \text{ und } \alpha = \frac{1 + k}{406},$$

so erhält man:

$$\log \alpha_0 = 7.39794$$

$$\log\left[\frac{15}{2}\alpha_0^{\,2} + \frac{35}{108}\alpha_0^{\,4}\right] = 4.41567$$

$$\log\left[\frac{5}{6}\alpha_0^{\,2} + \frac{35}{27}\alpha_0^{\,4}\right] = 4.71670.$$

Setzt man ferner:

$$10000\ i = y$$
$$10\ \ k = z,$$

so erhält man für die vier Gradmessungen die Gleichungen:

$$1)\quad x'_1 - x_1 = +1''.97 + 1.1225\,y + 5.6059\,z$$
$$2)\quad x'_2 - x_2 = +0\ .94 + 0.5697\,y + 2.5835\,z$$
$$3)\quad x'_3 - x_3 = -0\ .37 + 0.1779\,y - 0.2852\,z$$
$$x''_3 - x_3 = +3\ .79 + 0.5433\,y - 0.9157\,z$$
$$4)\quad x'_4 - x_4 = -0\ .51 + 0.5839\,y - 1.9711\,z$$

und daraus:

	[n]	[a]	[b]	[an]	[aa]	[ab]
1)	+ 1''. 97	+ 1.1225	+ 5.6059	+ 2.2113	+ 1.2600	+ 6.2924
2)	+ 0 . 94	+ 0.5697	+ 2.5835	+ 0.5355	+ 0.3246	+ 1.4718
3)	+ 3 . 42	+ 0.7212	− 1.2009	+ 1.9933	+ 0.3268	− 0.5482
4)	− 0 . 51	+ 0.5839	− 1.9711	− 0.2978	+ 0.3409	− 1.1509

	[bn]	[bb]
1)	+ 11.0436	+ 31.4254
2)	+ 2.4284	6.6742
3)	− 3.3650	0.9198
4)	+ 1.0026	3.8853

und:

	$[an_1]$	$[aa_1]$	$[ab_1]$
1)	+ 1.1056	+ 0.6300	+ 3.1462
2)	+ 0.2678	+ 0.1623	+ 0.7359
3)	+ 1.1711	+ 0.1534	− 0.2595
4)	− 0.1489	+ 0.1705	− 0.5755

$$(an_1) = +2.3956,\ (aa_1) = +1.1162,\ (ab_1) = +3.0471,$$

$[bn_1]$	$[bb_1]$
+ 5.5218	+ 15.7127
+ 1.2142	+ 3.3371
− 1.9960	+ 0.4391
+ 0.5013	+ 1.9426

$$(bn_1) = +5.2413,\ (bb_1) = +21.4315.$$

Man erhält somit für die Bestimmung von y und z die beiden Gleichungen:

$$0 = +2.3956 + 1.1162\,y + 3.0471\,z$$
$$0 = +5.2413 + 3.0471\,y + 21.4315\,z,$$

durch deren Auflösung man findet:

$$z = +0.099012$$
$$y = -2.4165,$$

also:

$$i = -0.00024165 \text{ und } k = +0.0099012;$$

mithin:

$$g = \frac{57008}{1 - 0.00024165} = 57021.79$$

und:

$$\alpha = \frac{1 + 0.0099012}{400} = 0.002524753$$

Da nun

$$\varepsilon^2 = \frac{8}{3}\alpha - \frac{32}{9}\alpha^2 + 4\alpha^3$$

war, so erhält man:

$$\varepsilon^2 = 0.006710073,$$

also für die Abplattung der Erde $\frac{1}{297.53}$.

Ferner ist:

$$\log\frac{b}{a} = \log\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 9.9985380,$$

und da

$$a = \frac{180\, g}{(1 - \varepsilon^2)\, E\pi}$$

war, so findet man:

$$\log a = 6.5147884,$$

also:

$$\log b = 6.5133264.$$

Auf diese Weise hat nun Bessel die Gröfse und Abplattung der Erde aus 10 verschiedenen Gradmessungen bestimmt *) und dafür die schon oben in No. 1 des dritten Abschnitts angeführten Werthe erhalten:

die Abplattung $\alpha = \frac{1}{299.1528}$

Halbe grofse Axe a in Toisen $= 3272077.14$

Halbe kleine Axe b „ $= 3261139.33$

$\log a = 6.5148235$

$\log b = 6.5133693.$

*) In Schumacher's astronomischen Nachrichten No. 333 und 438.

II. Bestimmung der Horizontalparallaxen der Gestirne.

3. Wenn man den Ort eines der Erde nahen Gestirns von zwei verschiedenen Punkten der Erdoberfläche aus beobachtet, so kann man dadurch die Parallaxe desselben oder, was dasselbe ist, seine Entfernung, in Einheiten der halben grofsen Axe des Erdsphaeroids ausgedrückt, bestimmen. Da aber nach dem Vorigen die Gröfse dieser Axe selbst bekannt ist, so kann man also die Entfernung des Gestirns auch in einem bekannten Längenmaafse ausdrücken.

Es soll nun angenommen werden, dafs die beiden Beobachtungsorte unter demselben Meridiane zu verschiedenen Seiten des Aequators liegen, und dafs man an beiden Orten die Zenithdistanz des Gestirns bei seiner Culmination beobachtet habe. Dann ist nach No. 3 des dritten Abschnitts die Höhenparallaxe des Gestirns an dem einen Orte gegeben durch die Gleichung:

$$\sin p' = \varrho \sin p \sin [z - (\varphi - \varphi')],$$

wo p die Horizontalparallaxe, z die beobachtete, von der Refraction befreite Zenithdistanz, φ und φ' die geographische und verbesserte Polhöhe und ϱ die Entfernung des Orts vom Mittelpunkte der Erde bezeichnen. Man hat also:

$$\frac{1}{\sin p} = \frac{\varrho \sin [z - (\varphi - \varphi')]}{\sin p'}$$

und ebenso für den zweiten Ort, dessen geographische und verbesserte Polhöhe φ_1 und φ'_1 und dessen Entfernung vom Mittelpunkte ϱ ist:

$$\frac{1}{\sin p} = \frac{\varrho_1 \sin [z_1 - (\varphi_1 - \varphi'_1)]}{\sin p'_1}.$$

Betrachtet man nun die beiden Dreiecke, welche durch den Ort des Gestirns, den Mittelpunkt der Erde und die beiden Beobachtungsorte gebildet werden, so ist in dem einen Dreiecke der Winkel am Gestirne p', der Winkel am Beobachtungsorte $180^0 - z + \varphi - \varphi'$ und der Winkel am Mittelpunkte $\varphi' \mp \delta$, wo δ die geocentrische Declination des Gestirns ist und wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem das Gestirn und der Beobachtungsort sich auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Aequators befinden. In dem

anderen Dreiecke sind diese Winkel p'_1, $180^0 - z_1 + \varphi_1 - \varphi'_1$ und $\varphi'_1 \pm \delta$. Man hat also:

$$p' = z - \varphi' \pm \delta$$
$$p'_1 = z_1 - \varphi'_1 \mp \delta$$

und:

$$p' + p'_1 = z + z_1 - \varphi' - \varphi'_1.$$

Bezeichnet man daher die bekannte Gröfse $p' + p'_1$ mit π, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\varrho \sin [z - (\varphi - \varphi')]}{\sin p'} = \frac{\varrho_1 \sin [z_1 - (\varphi_1 - \varphi'_1)]}{\sin (\pi - p')},$$

woraus folgt:

$$\tang p' = \frac{\varrho \sin \pi \sin [z - (\varphi - \varphi')]}{\varrho_1 \sin [z_1 - (\varphi_1 - \varphi'_1)] + \varrho \cos \pi \sin [z - (\varphi - \varphi')]},$$

oder auch:

$$\tang p'_1 = \frac{\varrho_1 \sin \pi \sin [z_1 - (\varphi_1 - \varphi'_1)]}{\varrho \sin [z - (\varphi - \varphi')] + \varrho_1 \cos \pi \sin [z_1 - (\varphi_1 - \varphi'_1)]}.$$

Nachdem man dann p' oder p'_1 durch eine dieser Gleichungen gefunden hat, erhält man p entweder aus:

$$\sin p = \frac{\sin p'}{\varrho \sin [z - (\varphi - \varphi')]}$$

oder aus:

$$\sin p = \frac{\sin p'_1}{\varrho_1 \sin [z_1 - (\varphi_1 - \varphi'_1)]}.$$

Es war nun hierbei vorausgesetzt, dafs die beiden Orte auf verschiedenen Seiten des Aequators liegen, wie es auch für die Bestimmung von p am Vortheilhaftesten ist. Ist dies aber nicht der Fall, sondern liegen die Orte auf derselben Seite des Aequators, so sind jetzt die Winkel am Mittelpunkte der Erde in den vorher betrachteten Dreiecken andere, nämlich in dem einen Dreiecke $\varphi' \mp \delta$ und in dem andern $\varphi'_1 \mp \delta$. Setzt man dann aber:

$$\pi = p'_1 - p' = z_1 - z - (\varphi_1 - \varphi),$$

so erhält man p' oder p'_1 durch dieselben Gleichungen wie vorher.

Liegen die beiden Orte nicht, wie es angenommen war, unter demselben Meridiane, so werden die beiden Beobachtungen nicht mehr gleichzeitig sein und man mufs dann die Aenderung der Declination in der Zwischenzeit in Rechnung bringen.

Auf diese Weise wurden in den Jahren 1751 und 1752 die Parallaxe des Mondes und des Mars bestimmt. Zu dem Ende beobachtete Lacaille die Zenithdistanz der beiden Gestirne bei ihrer Culmination am Cap der guten Hoffnung, während gleichzeitig Cassini in Paris, Lalande in Berlin, Zanotti in Bologna und Bradley in Greenwich beobachteten. Diese Orte sind sehr günstig gelegen. Der gröſste Unterschied der Polhöhen ist der vom Cap und Berlin und beträgt $86\frac{1}{2}^{0}$, der gröſste Unterschied der Längen ist dagegen der vom Cap und Greenwich, der $1\frac{1}{4}$ Stunde beträgt, eine Zeit, für welche man die Bewegung des Mondes in Declination vollkommen scharf in Rechnung bringen kann.

Die Beobachter fanden damals die Horizontalparallaxe des Mondes in seiner mittleren Entfernung von der Erde gleich 57′ 5″. Eine neue von Olufsen ausgeführte Berechnung aller dieser Beobachtungen, ergab aber dafür den Werth 57′ 2″. 64 unter der Voraussetzung, daſs die Abplattung der Erde $\frac{1}{302.02}$ ist. Mit dem wahrscheinlichsten Werthe $\frac{1}{299.15}$ der Abplattung erhält man dagegen 57′ 2″. 80 *). In neuester Zeit beobachtete auch Henderson in den Jahren 1832 und 1833 am Cap der guten Hoffnung Meridianzenithdistanzen des Mondes, aus denen er in Verbindung mit gleichzeitigen Greenwicher Beobachtungen die mittlere Horizontalparallaxe 57′ 1″.8 fand **). In den Burkhardtschen Mondtafeln ist für diese Constante der Werth 57′ 0″. 52 angenommen, in den Hansenschen 56′ 59″. 59.

Für den Mond wird nun übrigens das Problem, seine Parallaxe aus Beobachtungen an verschiedenen Orten der Erde zu finden, nicht so einfach, wie dasselbe vorher aufgestellt war, weil man immer nur den Rand des Mondes an beiden Orten beobachten kann, also zur Reduction die Kenntniſs des Halbmessers nöthig hat, welcher selbst durch die Parallaxe geändert wird.

Bezeichnen r und r' den geocentrischen und scheinbaren

*) Astron. Nachrichten No. 326.

**) Astron. Nachrichten No. 338.

Halbmesser des Mondes, Δ und Δ' die Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde und dem Beobachtungsorte, so ist:

$$\frac{\sin r'}{\sin r} = \frac{\Delta}{\Delta'}.$$

In dem Dreiecke, welches vom Mittelpunkte der Erde, dem Mittelpunkte des Mondes und dem Beobachtungsorte gebildet wird, hat man aber:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin(180^\circ - z')}{\sin(z' - p')},$$

wo z' den Winkel bezeichnet, den die Richtung vom Beobachtungsorte nach dem Mittelpunkte des Mondes mit der verlängerten Richtung vom Mittelpunkte der Erde nach dem Beobachtungsorte macht, oder da

$$z' = z - (\varphi - \varphi') \pm r'$$

ist, wo z die beobachtete Zenithdistanz des Mondrandes bezeichnet und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der obere oder untere Rand beobachtet ist:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin[z - (\varphi - \varphi') \pm r']}{\sin[z - (\varphi - \varphi') - p' \pm r']}.$$

Führt man diesen Ausdruck in die Gleichung für $\frac{\sin r'}{\sin r}$ ein und eliminirt p' durch die Gleichung:

$$\sin p' = \varrho \sin p \sin[z - (\varphi - \varphi') \pm r'],$$

so erhält man, wenn man der Kürze wegen $z - (\varphi - \varphi')$ blos durch z bezeichnet und ϱ gleich Eins setzt:

$$\sin r' = \sin r + \sin r' \sin p \cos(z \pm r') + \tfrac{1}{2} \sin r' \sin p^2 \sin(z \pm r')^2,$$

oder bis auf Gröfsen von der dritten Ordnung genau:

$$r' = r + \sin r \sin p \cos(z \pm r) + \tfrac{1}{2} \sin r \sin p^2 \sin(z \pm r)^2.$$

Ist nun Z die geocentrische Zenithdistanz des Mittelpunkts des Mondes, so ist dieselbe durch die Zenithdistanz z des beobachteten Randes ausgedrückt:

$$Z = z \pm r' - \sin p \sin(z \pm r') - \frac{\sin p^3 \sin(z \pm r')^3}{6},$$

oder, wenn man für r' seinen eben gefundenen Werth substituirt:

$$Z = z \pm r \pm \sin r \sin p \cos(z \pm r) \pm \tfrac{1}{2} \sin r \sin p^2 \sin(z \pm r)^2$$
$$- \sin p \sin(z \pm r) - \frac{\sin p^3 \sin(z \pm r)^3}{6}.$$

Entwickelt man diese Gleichung und vernachlässigt wie-

der die Glieder, welche in Bezug auf p und r von einer höheren Ordnung als der dritten sind, so erhält man:

$$Z = z \pm r - \sin r^2 \sin p \sin z \pm \tfrac{1}{2} \sin r \sin p^2 \sin z^2$$
$$- \sin p \cos r \sin z + \tfrac{1}{2} \sin p \sin r^2 \sin z - \frac{\sin p^3 \sin z^3}{6},$$

oder, wenn man $1 - \frac{1}{2} \sin r^2$ statt $\cos r$ und wieder $\varrho \sin p$ statt $\sin p$ einführt:

$$Z = z \pm r - \varrho \sin p \sin z - \tfrac{1}{2} \varrho \sin p \sin z \sin r^2 \pm \tfrac{1}{2} \varrho^2 \sin p^2 \sin r \sin z^2$$
$$- \frac{\varrho^3 \sin p^3 \sin z^3}{6},$$

und endlich, wenn man

$$\sin r = k \sin p,$$

also

$$r = k \sin p + \tfrac{1}{6} k^3 \sin p^3$$

setzt und auch wieder $z - \lambda$ statt z einführt, wo $\lambda = \varphi - \varphi'$ ist:

$$Z = z - \lambda - \sin p\, [\varrho \sin (z - \lambda) \mp k] - \frac{\sin p^3}{6} [\varrho \sin (z - \lambda) \mp k]^3.$$

Ist dann D die geocentrische Declination des Mittelpunktes des Mondes, δ die beobachtete Declination des Randes, so ist, weil $D = \varphi' - z$ und $\delta = \varphi' - (z - \lambda)$:

$$D = \delta + \sin p\, [\varrho \sin (z - \lambda) \mp k] + \frac{\sin p^3}{6} [\varrho \sin (z - \lambda) \mp k]^3.$$

Die Gröfsen ϱ und λ hängen nun von der Abplattung der Erde ab. Da es nun wünschenswerth ist, die Parallaxe des Mondes so zu finden, dafs man die Aenderung, welche eine andre Abplattung als die zum Grunde gelegte hervorbringt, leicht daran anbringen kann, so mufs man den Ausdruck so entwickeln, dafs derselbe die Abplattung explicite enthält. Nun war aber in No. 2 des dritten Abschnitts gefunden:

$$\varphi - \varphi' = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \sin 2\varphi + \ldots$$
$$= \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \sin 2\varphi + \ldots$$

Führt man hier die Abplattung α ein, gegeben durch die Gleichung:

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = 2\alpha - \alpha^2$$

und vernachlässigt die Glieder von der Ordnung α^2, so wird:

$$\varphi - \varphi' = \lambda = \alpha \sin 2\varphi.$$

Ferner war:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = \frac{\cos\varphi^2}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2} + \frac{(1-\varepsilon^2)^2\sin\varphi^2}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}$$
$$= \frac{1-2\,\varepsilon^2\sin\varphi^2 + \varepsilon^4\sin\varphi^2}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}.$$

Führt man auch hier wieder α ein durch die Gleichung:

$$\varepsilon^2 = 2\,\alpha - \alpha^2$$

und vernachlässigt die Glieder von der Ordnung α^2, so erhält man:

$$\varrho = 1 - \alpha\sin\varphi^2.$$

Damit wird dann der zuletzt für D gefundene Ausdruck der folgende:

$$D = \delta + [\sin z \mp k]\sin p - [\sin\varphi^2\sin z + \sin 2\varphi\cos z]\,\alpha\sin p$$
$$+ [\sin z \mp k]^3\,\frac{\sin p^3}{6}.$$

Eine solche Gleichung giebt also eine jede Beobachtung eines Mondrandes an einem Orte auf der nördlichen Halbkugel der Erde und es gilt hier das obere oder untere Zeichen, je nachdem man den oberen oder unteren Rand des Mondes beobachtet hat.

Für einen Ort auf der südlichen Halbkugel der Erde findet man ebenso:

$$D_1 = \delta_1 - [\sin z_1 \mp k]\sin p_1 - [\sin z_1 \mp k]^3\,\frac{\sin p_1{}^3}{6}$$
$$+ [\sin\varphi_1{}^2\sin z_1 + \sin 2\varphi_1\cos z_1]\sin p_1.$$

Es seien nun t und t_1 die den beiden Beobachtungen entsprechenden mittleren Zeiten irgend eines ersten Meridians, ferner sei D_0 die geocentrische Declination des Mondes für irgend eine Zeit T, und $\frac{dD}{dt}$ die Aenderung der Declination des Mondes während einer Stunde mittlerer Zeit, positiv genommen, wenn der Mond sich nach dem Nordpole zu bewegt, so geben die beiden Gleichungen für D und D_1:

$$(t_1 - t)\,\frac{dD}{dt} = \delta_1 - \delta - [\sin z_1 \mp k - \alpha(\sin\varphi_1{}^2\sin z_1 + \sin 2\varphi_1\cos z_1)]\sin p_1$$
$$- [\sin z \mp k - \alpha(\sin\varphi^2\sin z + \sin 2\varphi\cos z)]\sin p$$
$$- [\sin z_1 \mp k]^3\,\frac{\sin p_1{}^3}{6} - [\sin z \mp k]\,\frac{\sin p^3}{6}.$$

Ist ferner p_0 die Parallaxe für die Zeit T und $\frac{dp}{dt}$ die stündliche Veränderung derselben, so wird:

$$\sin p = \sin p_0 + \cos p_0 \frac{dp}{dt}(t - T)$$

$$\sin p_1 = \sin p_0 + \cos p_0 \frac{dp}{dt}(t_1 - T),$$

mithin erhält man für die Bestimmung der Parallaxe zur Zeit T die Gleichung:

$$0 = \delta_1 - \delta + (t - t_1)\frac{dD}{dt} - [(\sin z_1 \mp k)^3 + \sin(z \mp k)^3]\frac{\sin p_0{}^3}{6}$$

$$-\frac{dp}{dt}\cos p_0 [(\sin z \mp k)(t - T) + (\sin z_1 \mp k)(t_1 - T)]$$

$$-[\sin z_1 + \sin z \mp k \mp k]\sin p_0 + \alpha \sin p_0 \left\{\begin{matrix} \sin\varphi^2 \sin z + \sin 2\varphi \cos z \\ + \sin\varphi_1{}^2 \sin z_1 \sin 2\varphi_1 \cos z_1 \end{matrix}\right\} \text{*)}.$$

Sind nun an den beiden Orten verschiedene Ränder des Mondes beobachtet, so wird der Coefficient von sin p_0 unabhängig von k und da diese Gröfse dann nur noch in den kleinen, mit $\sin p_0{}^3$ und $\frac{dp}{dt}$ multiplicirten Gliedern vorkommt, so wird auch der gefundene Werth von p_0 unabhängig von einem etwaigen Fehler in k. Da man nun ferner die Parallaxe aus früheren Bestimmungen als soweit annähernd bekannt voraussetzen kann, um damit das dritte und vierte Glied der Formel ohne merklichen Fehler zu berechnen, so kann man also die vier ersten Glieder als bekannt voraussetzen, weil alle darin vorkommenden Gröfsen entweder durch die Beobachtungen gegeben sind oder aus den Mondstafeln entnommen werden können. Bezeichnet man daher die Summe dieser Glieder mit n, den Coefficienten von sin p_0 mit a und den von α sin p_0 mit b, so erhält man die Gleichung:

$$0 = n - \sin p_0 (a - b\alpha),$$

aus welcher man p_0 als Function von α findet. Man will nun aber nicht allein die Horizontalparallaxe p_0, welche zur Zeit T statt findet, kennen, sondern die sogenannte mittlere Horizontalparallaxe d. h. den Werth, welchen die Horizon-

*) Will man auf die zweiten Differentialquotienten Rücksicht nehmen, so mufs man noch das Glied hinzufügen:

$$+\tfrac{1}{2}[(t - T)^2 - (t_1 - T)^2]\frac{d^2 D}{dt^2}$$

nimmt man aber:

$$T = \tfrac{1}{2}(t_1 + t),$$

so fällt dies Glied fort.

talparallaxe in der mittleren Entfernung des Mondes von der Erde *) hat. Ist aber K die in den Mondstafeln angenommene mittlere Horizontalparallaxe und π die aus denselben Tafeln für die Zeit T entnommene, so hat man, wenn man die gesuchte mittlere Horizontalparallaxe mit Π bezeichnet:

$$\sin p_0 = \frac{\pi}{K} \sin \Pi = \mu \sin \Pi,$$

also wird die Bedingungsgleichung jetzt:

$$0 = \frac{n}{\mu} - \sin \Pi (a - b\alpha).$$

Beispiel. Am 23sten Februar 1752 beobachtete Lalande in Berlin die Declination des unteren Randes des Mondes:

$$\delta = +20^\circ\, 26'\, 25''.2,$$

dagegen Lacaille am Cap der guten Hoffnung die Declination des oberen Randes:

$$\delta_1 = +21^\circ\, 46'\, 44''.8.$$

Für die in der Mitte zwischen beiden Beobachtungen liegende mittlere Pariser Zeit:

$$T = 6^h 40^m,$$

hat man ferner nach den Burkhardtschen Mondstafeln:

$$\frac{dD}{dt} = -34''.15$$

$$\pi = 59'\, 24''.54$$

$$\frac{dp}{dt} = +0''.28;$$

endlich ist:

$$\varphi = 52^\circ\, 30'\, 16''$$

und

$$\varphi_1 = 33 \quad 56 \quad 3 \text{ südlich.}$$

Da der östliche Meridianunterschied des Caps von Berlin $20^m\, 19^s.5$ beträgt und die stündliche Zunahme der Rectascension des Mondes gleich $38'\, 10''$ im Bogen war, so erfolgte die Culmination des Mondes in Berlin $21^m\, 11^s$ später als am Cap, mithin ist:

$$t - t_1 = +21^m\, 11^s, \text{ also } (t - t_1)\frac{dD}{dt} = -12''.06$$

ferner:

$$\delta_1 - \delta = +1^\circ\, 20'\, 19''.6.$$

---

*) Nämlich wenn diese Entfernung gleich der halben grofsen Axe der elliptischen Bahn des Mondes ist.

Das dritte Glied, welches von $\sin p^3$ abhängt, erhält man, wenn man $k = 0.2725$ nimmt, gleich $-0''.12$; es ist daher, wenn man das hier ganz unbedeutende in $\frac{dp}{dt}$ multiplicirte Glied vernachlässigt:

$$n = +1^\circ\, 20'\, 7''.42$$

oder in Theilen des Radius:

$$n = +0.023307$$

und da die in den Burkhardtschen Mondstafeln angewandte Constante der Parallaxe:

$$K = 57'\, 0''.52$$

ist, so wird:

$$\log \mu = 0.01792,$$

also:

$$\frac{n}{\mu} = +0.022365.$$

Berechnet man die Coefficienten a und b, so erhält man, da

$$z = 32^\circ\, 3'\, 51'' \text{ und } z_1 = 55^\circ\, 42'\, 48''$$

war:

$$a = +1.3571 \text{ und } b = +1.9321$$

und somit für die Bestimmung von $\sin \Pi$ die Gleichung:

$$0 = +0.022365 - \sin \Pi\,(1.3571 - 1.9321\,\alpha).$$

Eine solche Gleichung von der Form:

$$0 = \frac{n}{\mu} - x\,(a - b\,\alpha)$$

giebt nun die Verbindung je zweier Beobachtungen. Hat man nur eine solche Gleichung, so kann man daraus für einen bestimmten Werth von α denjenigen Werth suchen, welcher diese Gleichung erfüllt. So erhält man aus der vorigen Gleichung, wenn man $\alpha = \frac{1}{299.15}$ nimmt:

$$\log \sin \Pi = 8.21901$$
$$\Pi = 56'\, 55''.4.$$

Hat man aber mehrere Gleichungen, so erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate für die Gleichung des Minimums in Bezug auf x:

$$[a\,a]\,x - [a\,b]\,\alpha\,x - \left[a\frac{n}{\mu}\right] = 0,$$

also:

$$x = \frac{\left[a\frac{n}{\mu}\right]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,\alpha\,x$$
$$= \frac{\left[a\frac{n}{\mu}\right]}{[a\,a]} + \frac{\left[a\frac{n}{\mu}\right]}{[a\,a]} \cdot \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,\alpha$$

Auf diese Weise wurde von Olufsen für die mittlere Horizontalparallaxe des Mondes der oben angeführte Werth 57′ 2″. 80 gefunden *). Da die Parallaxe des Mondes übrigens so groſs ist, so kann man dieselbe schon aus den Beobachtungen an einem und demselben Orte der Erde mit einiger Annäherung ableiten, indem man dem Zenithe nahe gelegene Beobachtungen, für welche die Höhenparallaxe gering ist, mit Beobachtungen in der Nähe des Horizontes verbindet, für welche die Parallaxe also nahe ihr Maximum erreicht. Auf diese Weise wurde auch die Mondsparallaxe von Hipparch entdeckt, indem derselbe in der Bewegung des Mondes ein Glied auffand, welches von der Höhe desselben über dem Horizonte abhing und die Periode eines Tages hatte.

4. Die Horizontalparallaxe der Sonne kann ihrer Kleinheit wegen durch diese Methode nicht mit Sicherheit gefunden werden, indessen wurden doch die ersten genäherten Bestimmungen derselben auf diese Weise erhalten. Im Jahre 1671 beobachteten nämlich Richer in Cayenne und Picard und Römer in Paris Meridianhöhen des Mars und fanden daraus nach der vorher gegebenen Methode die Horizontalparallaxe desselben gleich 25″. 5. Kennt man nun aber die Parallaxe oder die Entfernung eines Planeten, so kann man daraus nach dem dritten Keplerschen Gesetze, wonach die Cuben der halben groſsen Axen der Planetenbahnen sich wie die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten, die Entfernungen aller übrigen und auch die der Sonne finden. So erhielt man aus der angegebenen Parallaxe des Mars die Parallaxe der Sonne 9″. 5. Noch weniger genau wurde diese Constante durch die von Lacaille und Lalande angestellten, schon vorher erwähnten correspondirenden Beobachtungen bestimmt, nämlich gleich 10″. 25. Die neuerdings von Gilliss in Chili gemachten Beobachtungen haben auch, zum Theil wegen des Mangels correspondirender Beobachtungen in der nördlichen Hemisphäre, Nichts zu einer genaueren Bestimmung der Parallaxe beigetragen. Wiewohl somit alle durch diese Methode bisher erlangten Resultate ungenügend sind,

---

*) Astron. Nachrichten No. 326.

so wäre es doch immer wünschenswerth, daſs dieselbe einmal wieder ausgeführt oder auch die ganz ähnliche, von Gerling in No. 599 der astronomischen Nachrichten vorgeschlagene Methode der Beobachtung der Venus um die Zeit ihres Stillstandes zur Bestimmung der Sonnenparallaxe angewandt würde, weil durch die jetzt so sehr vervollkommneten Instrumente gewiſs auch auf diesem Wege genauere Resultate zu erhalten wären.

Das geeignetste Mittel für die Bestimmung der Sonnenparallaxe gewähren indessen die Beobachtungen der Vorübergänge der Venus vor der Sonnenscheibe, welche zuerst von Halley zu diesem Zwecke vorgeschlagen wurden. Die Berechnung dieser Erscheinungen kann nach den in No. 29 und 31 des vorigen Abschnitts gegebenen Formeln ausgeführt werden. Etwas bequemer ist aber noch eine von Encke im astronomischen Jahrbuche für 1842 mitgetheilte Methode, welche zuerst die Erscheinung für den Mittelpunkt der Erde bestimmt und dann hieraus dieselbe für jeden Ort auf der Oberfläche zu finden lehrt.

Bezeichnen α, δ, A und D die geocentrischen Rectascensionen und Declinationen der Venus und der Sonne für eine der Conjunctionszeit nahe Zeit T eines ersten Meridians, so hat man in dem sphärischen Dreiecke, welches durch den Pol des Aequators und die Mittelpunkte der Venus und der Sonne gebildet wird, wenn man die Entfernung beider Mittelpunkte mit m und die Winkel am Mittelpunkte der Sonne und der Venus mit M und $180 - M'$ bezeichnet, nach den Gauſsischen Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}m \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(M' + M) &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - A)\cos\tfrac{1}{2}(\delta + D)\\
\sin\tfrac{1}{2}m \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(M' + M) &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - A)\sin\tfrac{1}{2}(\delta - D)\\
\cos\tfrac{1}{2}m \,.\, \sin\tfrac{1}{2}(M' - M) &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - A)\sin\tfrac{1}{2}(\delta + D)\\
\cos\tfrac{1}{2}m \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(M' - M) &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - A)\cos\tfrac{1}{2}(\delta - D),
\end{aligned}$$

oder da für die Zeiten der Ränderberührungen $\alpha - A$ und $\delta - D$, mithin auch m und $M' - M$ kleine Gröſsen sind:

$$\begin{aligned}
m \sin M &= (\alpha - A)\cos\tfrac{1}{2}(\delta + D)\\
m \cos M &= \delta - D.
\end{aligned} \qquad (A)$$

Setzt man dann auch:

$$\begin{aligned}
n \sin N &= \frac{d(\alpha - A)}{dt}\cos\tfrac{1}{2}(\delta + D)\\
n \cos N &= \frac{d(\delta - D)}{dt},
\end{aligned} \qquad (B)$$

wo $\frac{d(\alpha - A)}{dt}$ und $\frac{d(\delta - D)}{dt}$ die relative Aenderung der Rectascension und Declination in der zum Grunde gelegten Zeiteinheit bezeichnen, und nennt $T + \tau$ die Zeit, zu welcher eine Ränderberührung statt findet, so hat man:

$$[m \sin M + \tau n \sin N]^2 + [m \cos M + \tau n \cos N]^2 = [R \pm r]^2,$$

wo R und r die Halbmesser der Sonne und der Venus bezeichnen, und wo das obere Zeichen für äufsere, das untere für innere Berührungen gilt.

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$\tau = -\frac{m}{n} \cos (M - N) \mp \frac{R \pm r}{n} \sqrt{1 - \frac{m^2 \sin (M - N)^2}{(R \pm r)^2}}$$

Setzt man daher:

$$\frac{m \sin (M - N)}{R \pm r} = \sin \psi, \text{ wo } \psi < \pm 90^\circ, \qquad (C)$$

so wird:

$$\tau = -\frac{m}{n} \cos (M - N) \mp \frac{R \pm r}{n} \cos \psi, \qquad (D)$$

wo das obere Zeichen für den Eintritt, das untere für den Austritt gilt, sodafs also für den Mittelpunkt der Erde in Zeit des angenommenen ersten Meridians der Eintritt zur Zeit:

$$T - \frac{m}{n} \cos (M - N) - \frac{R \pm r}{n} \cos \psi$$

und der Austritt zur Zeit:

$$T - \frac{m}{n} \cos (M - N) + \frac{R \pm r}{n} \cos \psi$$

erfolgt.

Bezeichnet man endlich mit $\odot$ den Winkel, welchen der vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Berührungspunkte gezogene gröfste Kreis mit dem durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Declinationskreise macht, so ist:

$$(R \pm r) \cos \odot = m \cos M + n \cos N \,.\, \tau$$
$$(R \pm r) \sin \odot = m \sin M + n \sin N \,.\, \tau$$

oder:

$$\cos \odot = -\sin N \sin \psi \mp \cos N \cos \psi$$
$$\sin \odot = \sin \psi \cos N \mp \cos \psi \sin N,$$

mithin für den Eintritt:

$$\odot = 180^\circ + N - \psi \qquad (E)$$

und für den Austritt:

$$\odot = N + \psi. \qquad (F)$$

Die Formeln (A) bis (F) dienen also zur vollständigen Vorausberechnung der Erscheinung für den Mittelpunkt der

Erde. Um nun hieraus die Zeiten des Ein- und Austritts für einen Ort auf der Oberfläche der Erde zu berechnen, mufs man die zu einer Zeit von diesem Orte gesehene Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne durch die vom Mittelpunkte der Erde gesehene Distanz ausdrücken.

Es ist aber:

$$\cos m = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A).$$

Bezeichnet man nun mit α', δ', A' und D' die von dem Orte auf der Oberfläche gesehenen scheinbaren Rectascensionen und Declinationen der Venus und der Sonne und mit m' die scheinbare Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne, so ist auch:

$$\cos m' = \sin \delta' \sin D' + \cos \delta' \cos D' \cos (\alpha' - A')$$

mithin auch:

$$\begin{aligned} \cos m' = \cos m &+ (\delta' - \delta) [\cos \delta \sin D - \sin \delta \cos D \cos (\alpha - A)] \\ &+ (D' - D) [\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos (\alpha - A)] \\ &- (\alpha' - \alpha) \cos \delta \cos D \sin (\alpha - A) \\ &+ (A' - A) \cos \delta \cos D \sin (\alpha - A). \end{aligned}$$

Nach den Formeln in No. 4 des dritten Abschnitts war aber *):

$$\begin{aligned} \delta' - \delta &= \pi [\cos \varphi \sin \delta \cos (\alpha - \Theta) - \sin \varphi \cos \delta] \\ D' - D &= p [\cos \varphi \sin D \cos (\alpha - \Theta) - \sin \varphi \cos D] \\ \alpha' - \alpha &= \pi \sec \delta \sin (\alpha - \Theta) \cos \varphi \\ A' - A &= p \sec D \sin (A - \Theta) \cos \varphi, \end{aligned}$$

wo π und p die Horizontalparallaxen der Venus und der Sonne bezeichnen; mithin erhält man, wenn man diese Werthe in die Gleichung für $\cos m'$ setzt:

$$\begin{aligned} &\cos m' = \cos m \\ &+ [\cos \delta \sin D - \sin \delta \cos D \cos (\alpha - A)] [\pi \cos \varphi \sin \delta \cos (\alpha - \Theta) - \pi \sin \varphi \cos \delta] \\ &+ [\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos (\alpha - A)] [p \cos \varphi \sin D \cos (\alpha - \Theta) - p \sin \varphi \cos D] \\ &- \cos D \sin (\alpha - A) . \pi \sin (\alpha - \Theta) \cos \varphi \qquad (a) \\ &+ \cos \delta \sin (\alpha - A) . p \sin (A - \Theta) \cos \varphi. \end{aligned}$$

---

*) Es war nämlich nach den dortigen Formeln:

$$\delta' - \delta = \pi \sin \varphi \frac{\sin (\delta - \gamma)}{\sin \gamma} = \pi \sin \varphi [\sin \delta \operatorname{cotang} \gamma - \cos \delta].$$

Da aber:

$$\operatorname{cotang} \gamma = \cos (\alpha - \Theta) . \operatorname{cotang} \varphi,$$

so wird:

$$\delta' - \delta = \pi [\cos \varphi \sin \delta \cos (\alpha - \Theta) - \sin \varphi \cos \delta].$$

Entwickelt man diese Gleichung, so findet man zuerst für den Coefficienten von $\cos\varphi$:

$$\pi\,[\sin\delta\cos\delta\sin D\cos(\alpha-\Theta)-\sin\delta^2\cos D\cos(\alpha-\Theta)\cos(\alpha-A)$$
$$-\cos D\sin(\alpha-\Theta)\sin(\alpha-A)]$$
$$+p\,[\sin\delta\cos D\sin D\cos(\alpha-\Theta)-\cos\delta\sin D^2\cos(\alpha-\Theta)\cos(\alpha-A)$$
$$+\cos\delta\sin(\alpha-\Theta)\sin(\alpha-A)]$$

oder da

$$\sin\delta^2=1-\cos\delta^2 \text{ und } \sin D^2=1-\cos D^2:$$

$$\pi\,[(\sin\delta\sin D+\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A))\cos\delta\cos(\alpha-\Theta)-\cos D\cos(A-\Theta)]$$
$$+p\,[(\sin\delta\sin D+\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A))\cos D\cos(A-\Theta)-\cos\delta\cos(\alpha-\Theta)],$$

mithin:

$$\pi\cos m\cos\delta\cos(\alpha-\Theta)-\pi\cos D\cos(A-\Theta)$$
$$+p\cos m\cos D\cos(A-\Theta)-p\cos\delta\cos(\alpha-\Theta).$$

Sondert man hier Alles ab, was sich auf einen bestimmten Ort der Erde bezieht, so erhält man:

$$[\pi\cos m\cos\delta\cos\alpha-\pi\cos D\cos A]\cos\Theta$$
$$+[p\cos m\cos D\cos A-p\cos\delta\cos\alpha]\cos\Theta$$
$$+[\pi\cos m\cos\delta\sin\alpha-\pi\cos D\sin A]\sin\Theta$$
$$+[p\cos m\cos D\sin A-p\cos\delta\sin\alpha]\sin\Theta,$$

es wird daher das in $\cos\varphi$ multiplicirte Glied der Gleichung (a):

$$[(\pi\cos m-p)\cos\delta\cos\alpha-(\pi-p\cos m)\cos D\cos A]\cos\varphi\cos\Theta$$
$$+[(\pi\cos m-p)\cos\delta\sin\alpha-(\pi-p\cos m)\cos D\sin A]\cos\varphi\sin\Theta. \qquad (b)$$

Ferner wird der Coefficient von $\sin\varphi$ in der Gleichung (a):

$$\pi\,[-\cos\delta^2\sin D+\sin\delta\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A)]$$
$$+p\,[-\sin\delta\cos D^2+\sin D\cos D\cos\delta\cos(\alpha-A)],$$

oder, da $\cos\delta^2=1-\sin\delta^2$ und $\cos D^2=1-\sin D^2$ ist:

$$\pi\,[-\sin D+\sin\delta\,(\sin\delta\sin D+\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A))]$$
$$+p\,[-\sin\delta+\sin D\,(\sin\delta\sin D+\cos\delta\cos D\cos(\alpha-A))].$$

Das in $\sin\varphi$ multiplicirte Glied der Gleichung (a) wird daher:

$$(\pi\cos m-p)\sin\delta\sin\varphi-(\pi-p\cos m)\sin D\sin\varphi,$$

und die Gleichung (a) geht mithin über in die folgende:

$$\cos m'=\cos m$$
$$+[(\pi\cos m-p)\cos\delta\cos\alpha-(\pi-p\cos m)\cos D\cos A]\cos\varphi\cos\Theta$$
$$+[(\pi\cos m-p)\cos\delta\sin\alpha-(\pi-p\cos m)\cos D\sin A]\cos\varphi\sin\Theta \qquad (c)$$
$$+[(\pi\cos m-p)\sin\delta-(\pi-p\cos m)\sin D]\sin\varphi.$$

Setzt man nun:

$$\pi\cos m-p=f\sin s$$
$$-\pi\sin m=f\cos s, \qquad (d)$$

so wird:

$$n - p\cos m = f\sin(s-m),$$

mithin:

$$\begin{aligned}\cos m' = \cos m \\ &+ f[\sin s\cos\delta\cos\alpha - \sin(s-m)\cos D\cos A]\cos\varphi\cos\Theta \\ &+ f[\sin s\cos\delta\sin\alpha - \sin(s-m)\cos D\sin A]\cos\varphi\sin\Theta \qquad (e) \\ &+ f[\sin s\sin\delta \qquad - \sin(s-m)\sin D]\sin\varphi.\end{aligned}$$

Setzt man ferner:

$$\begin{aligned}\sin s\cos\delta\cos\alpha - \sin(s-m)\cos D\cos A &= P\cos\lambda\cos\beta \\ \sin s\cos\delta\sin\alpha - \sin(s-m)\cos D\sin A &= P\sin\lambda\cos\beta \qquad (f) \\ \sin s\sin\delta - \sin(s-m)\sin D &= P\sin\beta,\end{aligned}$$

so erhält man durch die Quadrirung dieser Gleichungen zur Bestimmung von P die folgende:

$$\begin{aligned}P^2 &= \sin s^2 + \sin(s-m)^2 - 2\sin s\sin(s-m)\cos m \\ &= \sin s^2 - \sin s^2\cos m^2 + \cos s^2\sin m^2 = \sin m^2.\end{aligned}$$

Es wird daher erlaubt sein zu setzen:

$$\begin{aligned}\sin s\cos\delta\cos\alpha - \sin(s-m)\cos D\cos A &= \sin m\cos\lambda\cos\beta \\ \sin s\cos\delta\sin\alpha - \sin(s-m)\cos D\sin A &= \sin m\sin\lambda\cos\beta \\ \sin s\sin\delta - \sin(s-m)\sin D &= \sin m\sin\beta,\end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned}\sin m\sin(\lambda-A)\cos\beta &= \sin s\cos\delta\sin(\alpha-A) \\ \sin m\cos(\lambda-A)\cos\beta &= \sin s\cos\delta\cos(\alpha-A) - \sin(s-m)\cos D \qquad (g) \\ \sin m\sin\beta &= \sin s\sin\delta - \sin(s-m)\sin D.\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}\sin s\cos\delta\cos(\alpha-A) - \sin(s-m)\cos D &= \sin s[\cos\delta\cos(\alpha-A) - \cos m\cos D] \\ &+ \cos s\,.\,\sin m\cos D\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}\sin s\sin\delta - \sin(s-m)\sin D &= \sin s[\sin\delta - \cos m\sin D] \\ &+ \cos s\,.\,\sin m\sin D.\end{aligned}$$

Im Dreiecke, welches vom Pole des Aequators und den geocentrischen Oertern der Mittelpunkte der Sonne und der Venus gebildet wird, hat man aber auch, wenn man den Winkel an der Sonne mit M bezeichnet:

$$\begin{aligned}\sin m\sin M &= \cos\delta\sin(\alpha-A) \\ \sin m\cos M &= \sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha-A) \qquad (h) \\ \cos m &= \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha-A),\end{aligned}$$

also wird:

$$\begin{aligned}\cos\delta\cos(\alpha-A) &= \cos D\cos m - \sin D\sin m\cos M \\ \sin\delta &= \sin D\cos m + \cos D\sin m\cos M,\end{aligned}$$

und die Gleichungen (g) gehen daher in die folgenden über:

$$\begin{aligned}\sin(\lambda-A)\cos\beta &= \sin s\sin M \\ \cos(\lambda-A)\cos\beta &= \cos s\cos D - \sin s\sin D\cos M \qquad (i) \\ \sin\beta &= \cos s\sin D + \sin s\cos D\cos M,\end{aligned}$$

wo s und M durch die Gleichungen (d) und (h) gefunden werden. Hat man dann aus den Gleichungen (i) λ und β bestimmt, so findet man nach (e) und (f) m' durch die Gleichung:

$$\cos m' = \cos m + f \sin m\,[\cos\lambda\cos\beta\cos\varphi\cos\Theta + \sin\lambda\cos\beta\cos\varphi\sin\Theta + \sin\beta\sin\varphi]$$
$$= \cos m + f\sin m\,[\sin\varphi\sin\beta + \cos\varphi\cos\beta\cos(\lambda - \Theta)].$$

Es sei nun T die mittlere Zeit des ersten Meridians, für welche die Gröfsen α, δ, A und D berechnet sind und L die hierzu gehörige Sternzeit, ferner sei l die östliche Länge des Ortes, auf welchen sich Θ und φ beziehen, so ist:

$$\Theta = l + L,$$

also:

$$\lambda - \Theta = \lambda - L - l.$$

Setzt man daher:

$$\left.\begin{aligned} \varLambda &= \lambda - L,\\ \cos\zeta &= \sin\varphi\sin\beta + \cos\varphi\cos\beta\cos(\varLambda - l),\end{aligned}\right\}\ (k)$$

so wird:

$$\cos m' = \cos m + f\sin m\cos\zeta$$

Alle Orte, für welche $\cos\zeta$ gleich ist, sehen also in demselben absoluten Augenblicke, welcher der Sternzeit L oder der mittleren Zeit T des ersten Meridians entspricht, mithin jeder zu der mittleren Zeit $T + l$ des Ortes, dieselbe scheinbare Distanz m'. Um nun die Zeit zu finden, wann diese Orte die Entfernung m sehen, hat man:

$$dm = -f\cos\zeta,$$

mithin:

$$dt = -\frac{f\cos\zeta}{\frac{dm}{dt}}.$$

Ist aber m eine kleine Gröfse, wie dies z. B. für die Zeiten der Ränderberührungen der Fall ist, so hat man nach den Formeln (A):

$$m = (\alpha - A)\cos\tfrac{1}{2}(\delta + D)\sin M + (\delta - D)\cos M$$
$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(\alpha - A)}{dt}\cos\tfrac{1}{2}(\delta + D)\sin M + \frac{d(\delta - D)}{dt}\cos M,$$

oder nach den Formeln (B):

$$\frac{dm}{dt} = n\cos(M - N),$$

mithin:

$$dt = -\frac{f\cos\zeta}{n\cos(M - N)}.$$

Wenn daher der Beobachter im Mittelpunkte zur Zeit T die Entfernung m sieht, so wird man an einem Orte auf der Oberfläche der Erde diese Entfernung zur Zeit des ersten Meridians

$$T + \frac{f \cos \zeta}{n \cos (M - N)}$$

oder zur Ortszeit

$$T + l + \frac{f \cos \zeta}{n \cos (M - N)}$$

sehen.

Um nun aus den Zeiten des Ein- und Austritts für den Mittelpunkt der Erde die Zeiten des Ein- und Austritts für einen Ort auf der Oberfläche zu finden, hat man nur $R \pm r$ und $\odot$ statt m und M zu nehmen, und da nach den Formeln (E) und (F) für den Eintritt $\odot = 180^0 + N - \psi$, für den Austritt dagegen $\odot = N + \psi$ war, so wird man also zu den Zeiten des Ein- und Austritts für den Mittelpunkt der Erde hinzuzulegen haben:

$$-\frac{f \cos \zeta}{n \cos \psi}$$

und:

$$+\frac{f \cos \zeta}{n \cos \psi}.$$

Die sämmtlichen Formeln für die Vorausberechnung eines Venusdurchgangs sind daher die folgenden:

Für den Mittelpunkt der Erde.

Für eine der Conjunctionszeit nahe Zeit eines ersten Meridians suche man die Rectascensionen α, A und die Declinationen δ, D der Venus und Sonne und ebenso die Halbmesser r und R beider Gestirne. Dann berechne man:

$$m \sin M = (\alpha - A) \cos \tfrac{1}{2} (\delta + D)$$

$$m \cos M = \delta - D$$

$$n \sin N = \frac{d(\alpha - A)}{dt} \cos \tfrac{1}{2} (\delta + D)$$

$$n \cos N = \frac{d(\delta - D)}{dt}$$

$$\frac{m \sin (M - N)}{R \pm r} = \sin \psi, \quad \psi < \pm 90^0$$

$$\tau = -\frac{m}{n} \cos (M - N) - \frac{R \pm r}{n} \cos \psi$$

$$\tau' = -\frac{m}{n} \cos (M - N) + \frac{R \pm r}{n} \cos \psi,$$

so erfolgt der Eintritt zur Zeit:

$$t = T + \tau,$$

wobei:

$$\odot = 180^0 + N - \psi,$$

und der Austritt zur Zeit:

$$t' = T + \tau',$$

und es ist

$$\odot = N + \psi.$$

Für einen Ort dessen östliche Länge l und dessen Polhöhe φ ist.

Für den Ein- und Austritt rechne man mit den entsprechenden Winkeln $\odot$ die Formeln:

$$\pi \cos(R \pm r) - p = f \sin s$$
$$-\pi \sin(R \pm r) = f \cos s$$
$$\frac{f}{n \cos \psi} = g$$
$$\sin(\lambda - A) \cos \beta = \sin s \sin \odot$$
$$\cos(\lambda - A) \cos \beta = \cos s \cos D - \sin s \sin D \cos \odot$$
$$\sin \beta = \cos s \sin D + \sin s \cos D \cos \odot$$
$$\varDelta = \lambda - L$$
$$\cos \zeta = \sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos(\varDelta - l)\ ^*),$$

wo L die den Zeiten t oder t' entsprechende Sternzeit ist. Dann ist in mittlerer Ortszeit die Zeit des Eintritts:

$$t + l - g \cos \zeta,$$

und die Zeit des Austritts:

$$t' + l + g \cos \zeta.$$

Diejenigen Orte, für welche die Gröſse

$$\sin \beta \sin \varphi + \cos \beta \cos \varphi \cos(\varDelta - l)$$

gleich ± 1 wird, sehen die Erscheinung unter allen Orten am frühesten oder spätesten. Die Dauer der Erscheinung kann aber für einen Ort auf der Oberfläche um $2g$ von der Dauer der Erscheinung für den Mittelpunkt verschieden sein, und da nun für centrale Durchgänge sehr nahe

$$g = \frac{\pi - p}{n}$$

ist, so kann also der Unterschied in der Dauer die doppelte Zeit betragen, welche die Venus braucht, um vermöge ihrer relativen Geschwindigkeit gegen die Sonne einen Bogen zu

---

*) ζ ist der Winkelabstand des Punktes, dessen Länge l und Breite φ ist, von einem Punkte, dessen Länge und Breite $\varDelta$ und β ist.

beschreiben, welcher gleich dem doppelten Unterschiede ihrer Parallaxe mit der der Sonne ist. Da nun der Unterschied dieser Parallaxen 23″ und die stündliche Bewegung der Venus zur Zeit ihrer Conjunction mit der Sonne 234″ beträgt, so kann dieser Unterschied nahe 12 Minuten ausmachen. Daraus sieht man also, daſs aus diesen Erscheinungen die Differenz der Parallaxen von Sonne und Venus und somit auch nach dem dritten Keplerschen Gesetze die Parallaxe der Sonne selbst mit groſser Genauigkeit bestimmt werden kann.

Beispiel. Für den Venusdurchgang am 5. Juni 1761 hat man die folgenden Oerter der Sonne und der Venus:

M. Par. Zeit	A	D	α	δ
16^h	74° 17′ 1″. 8	+ 22° 41′ 3″. 7	74° 25′50″. 3	+ 22° 33′17″. 6
17^h	19 36 . 4	41 19 . 1	24 13 . 2	32 32 . 4
18^h	22 10 . 9	41 34 . 5	22 36 . 2	31 47 . 1
19^h	24 45 . 5	41 49 . 9	20 59 . 2	31 1 . 9
20^h	27 20 . 1	42 5 . 3	19 22 . 2	30 16 . 6,

ferner:

$$\pi = 29''.6068 \qquad R = 946''.8$$
$$p = 8''.4408 \qquad r = 29''.0.$$

Um nun hieraus die Zeit der äuſseren Berührungen für den Mittelpunkt der Erde zu berechnen, hat man für

$$T = 17^h$$

$$\alpha - A = +4'\,36''.8, \quad \delta - D = -8'\,46''.7, \quad \frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt} = -4'\,11''.6$$

$$\frac{d\delta}{dt} - \frac{dD}{dt} = -60''.65, \quad R + r = 975''.8.$$

Damit erhält man:

$$M = 154°\,7'.2 \qquad N = 255°\,21'.9$$
$$\log m = 2.76746 \qquad \log n = 2.38028$$
$$M - N = 258°\,45'.3$$
$$\psi = -36\quad 2.6$$

$$-\frac{m}{n}\cos(M-N) = +0.4756 \qquad \tau = -2^h.8114 = -2^h 48^m 41^s.0$$

$$+\frac{(R+r)\cos\psi}{n} = +3.2870 \qquad \tau' = +3\;.7626 = +3\;\;45\;\;45\;.4.$$

Mithin erfolgte für den Mittelpunkt der Erde:

der Eintritt um

$14^h\,11^m\,19^s.0$ mittlere Pariser Zeit,

wobei:

$$\odot = 111°\,24'5,$$

und der Austritt um

$$20^h\ 45^m\ 45^s.4 \text{ mittlere Pariser Zeit,}$$

wobei

$$\odot = 219^\circ\ 19'.3.$$

Will man nun die Zeiten des Austritts für Orte auf der Oberfläche der Erde haben, so hat man zunächst die Constanten λ, β und g zu berechnen. Man erhält aber:

$$s = 90^\circ\ 22'.7,\ \log f = 1.32564,\ \log g = 9.03764,$$

nnd da

$$\odot = 219^\circ\ 19'.3,\ D = 22^\circ\ 42'.3,\ A = 74^\circ\ 29'.3,$$

so ist:

$$\lambda = 9^\circ\ 15'.9$$

und

$$\beta = -45^\circ\ 44'.4.$$

Da ferner die mittlere Pariser Zeit $20^h\ 45^m\ 45^s.4$ der Sternzeit $1^h\ 45^m\ 34^s.6$ entspricht, so ist:

$$\varDelta = -17^\circ\ 7'.7.$$

Verlangt man nun z. B. die Zeit des Austritts für das Cap der guten Hoffnung, für welches:

$$l = +1^h\ 4^m\ 33^s.5$$

und

$$\varphi = -33^\circ\ 56'\ 3'',$$

so findet man:

$$\log\cos\zeta = 9.94643,\ g\cos\zeta = +5'\ 47''.0,$$

also die Zeit des Austritts:

$$t + l + g\cos\zeta = 21^h\ 56^m\ 5^s.9,$$

mittlere Zeit des Caps.

Differenzirt man die Gleichung:

$$T = t + l + g\cos\zeta,$$

so erhält man für die Aenderung von T in Secunden:

$$\begin{aligned} dT &= \frac{3600\cos\zeta}{n\cos\psi}\, d(\pi - p) \\ &= \frac{3600\cos\zeta}{n\cos\psi} \cdot \frac{\pi - p}{p_0}\, dp_0 \text{ *)} \\ &= 40.49\, dp_0, \end{aligned}$$

sodafs ein Fehler von 0″.13 in dem angenommenen Werthe der Sonnenparallaxe die Zeiten der Ränderberührung um volle 5 Zeitsecunden ändert. Umgekehrt werden Fehler in der

---

*) Wo p_0 die mittlere Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe der Sonne bezeichnet.

Beobachtung der Berührungszeit nur einen geringen Einfluſs auf die daraus hergeleitete Parallaxe haben, und da sich die Beobachtungen des Ein- und Austritts der dunklen Scheibe des Planeten am Sonnenrande mit sehr groſser Schärfe anstellen lassen, so sieht man, daſs man auf diese Weise die Sonnenparallaxe mit sehr groſser Genauigkeit finden kann.

5. Um nun die vollständige Bedingungsgleichung zu erhalten, welche jede Beobachtung einer Ränderberührung giebt, geht man von der Gleichung aus:

$$[\alpha' - A']^2 \cos\delta_0{}^2 + [\delta' - D']^2 = [R \pm r]^2, \qquad (a)$$

wo α', A', δ' und D' die scheinbaren, mit der Parallaxe behafteten Rectascensionen und Declinationen der Sonne und der Venus sind, δ_0 das arithmetische Mittel $\frac{\delta' + D'}{2}$ bezeichnet. Da aber die Parallaxen beider Gestirne klein und ebenso für die Zeiten der Ränderberührungen die Unterschiede der Rectascensionen und Declinationen kleine Gröſsen sind, so kann man annehmen:

$$\alpha' - A' = \alpha - A + (\pi - p) \sec\delta_0 \cos\varphi' \sin(\alpha_0 - \Theta)$$
$$\delta' - D' = \delta - D + (\pi - p)\,[\cos\varphi' \sin\delta_0 \cos(\alpha_0 - \Theta) - \sin\varphi' \cos\delta_0],$$

wo:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha + A}{2}$$

gesetzt ist.

Führt man nun die folgenden Hülfsgröſsen ein:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi' \sin(\alpha_0 - \Theta) &= h \sin H \\ \cos\varphi' \sin\delta_0 \cos(\alpha_0 - \Theta) - \sin\varphi' \cos\delta_0 &= h \cos H, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

so geht die Gleichung (a) in die folgende über:

$$[\alpha - A + (\pi - p) h \sin H \sec\delta_0]^2 \cos\delta_0{}^2 + [\delta - D + (\pi - p) h \cos H]^2 = [R \pm r]^2.$$

Sind hier α, A, δ, D, π und p die aus den Tafeln genommenen Werthe, $\alpha + d\alpha$, $\delta + d\delta$, $A + dA$, $D + dD$, $\pi + d\pi$ und $p + dp$ dagegen die wahren Werthe und ist dt der Fehler in der angenommenen Länge des Beobachtungsortes, so wird diese Gleichung:

$$\begin{bmatrix} \alpha - A + (\pi - p) h \sin H \sec\delta_0 + d(\alpha - A) \\ \qquad + d(\pi - p) h \sin H \sec\delta_0 - \frac{d(\alpha - A)}{dt} dt \end{bmatrix}^2 \cos\delta_0{}^2$$
$$+ [\delta - D + (\pi - p) h \cos H + d(\delta - D) + d(\pi - p) h \cos H - \frac{d(\delta - D)}{dt} dt]^2$$
$$= [R \pm r]^2.$$

Entwickelt man diese Gleichung und vernachlässigt die

Quadrate und Producte von $\pi - p$ und den kleinen Aenderungen, so erhält man, wenn man setzt:

$$\alpha - A + (\pi - p)\, h \sin H \sec \delta_0 = A'$$
$$\delta - D + (\pi - p)\, h \cos H \qquad = D',$$
$$A'^2 \cos \delta_0{}^2 + D'^2 - (R \pm r)^2$$
$$= -2 A' \cos \delta_0{}^2\, d(\alpha - A) - 2 [A' h \sin H \cos \delta_0 + D' h \cos H]\, d(\pi - p)$$
$$- 2 D'\, d(\delta - D) + 2 \left(A' \frac{d(\alpha - A)}{dt} \cos \delta_0{}^2 + D' \frac{d(\delta - D)}{dt}\right) dt$$
$$+ 2 (R \pm r)\, d(R \pm r).$$

Bezeichnet man aber:

$$A'^2 \cos \delta_0{}^2 + D'^2,$$

mit m^2, so ist, da nahe:

$$m^2 - (R \pm r)^2 = 2 m [m - (R \pm r)],$$
$$m [m - (R \pm r)] = - A' \cos \delta_0{}^2\, d(\alpha - A) - D'\, d(\delta - D)$$
$$- [A' h \sin H \cos \delta_0 + D' h \cos H]\, d(\pi - p)$$
$$+ \left(A' \frac{d(\alpha - A)}{dt} \cos \delta_0{}^2 + D' \frac{d(\delta - D)}{dt}\right) dt + (R \pm r)\, d(R \pm r).$$

Setzt man nun wieder:

$$\left.\begin{aligned} A' \cos \delta_0 &= m \sin M \\ D' &= m \cos M \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3600} \frac{d(\alpha - A)}{dt} &= n \sin N \\ \frac{1}{3600} \frac{d(\delta - D)}{dt} &= n \cos N \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$dt + \frac{(R \pm r - m)}{n \cos (M - N)} = \frac{\sin M \cos \delta\, d(\alpha - A)}{n \cos (M - N)} + \frac{\cos M\, d(\delta - D)}{n \cos (M - N)}$$
$$+ \frac{h \cos (M - H)}{n \cos (M - N)} \frac{\pi - p}{p_0}\, dt - \frac{d(R \pm r)}{n \cos (M - N)}. \qquad (D)$$

Wäre die Länge genau bekannt, also $dt = 0$, so könnte man die Divisoren weglassen. Behält man dieselben indessen bei, so wird dadurch $R \pm r - m$ in Zeitsecunden ausgedrückt, da:

$$n \cos (M - N) = \frac{dm}{dt}$$

ist.

B e i s p i e l. Die innere Berührung beim Austritt wurde am Cap der guten Hoffnung beobachtet um:

$21^h\, 38^m\, 3^s.3$ mittlere Zeit.

Diese Zeit entspricht der mittleren Pariser Zeit:

$20^h\, 33^m\, 29^s.8 = 1^h\, 33^m\, 16^s.2$ Sternzeit.

Es war also:

$$\Theta = 2^h\, 37^m\, 49^s.7 = 39^0\, 27'\, 25''.$$

Ferner hat man für die angegebene mittlere Pariser Zeit:

$$\begin{array}{ll} \alpha = 74^{\circ}\ 18'\ 28''.05 & \delta = 22^{\circ}\ 29'\ 51''.32 \\ A = 74\ \ 28\ \ 46\ .41 & D = 22\ \ 42\ \ 13\ .90 \\ \hline \alpha - A = -\ \ 10'\ 18''.36 & \delta - D = -\ \ 12'\ 22''.58 \end{array}$$

$$\alpha_0 = 74^{\circ}\ 23'\ 37'' \qquad \alpha_0 - \Theta = 34^{\circ}\ 56'\ 12'' \qquad \delta_0 = 22^{\circ}\ 36'\ 2''$$

$$(\pi - p)\, h \sin H = + 10''.07 \qquad H = 31^{\circ}\ 34'.0 \qquad (\pi - p)\, h \sin H \sec \delta_0$$

$$(\pi - p)\, h \cos H = + 16\ .39 \qquad \log h = 9.95835 \qquad = + 10''.90$$

$$A' = - 10'\ 7''.46$$

$$D' = - 12\ \ 6\ .19$$

$$M = 217^{\circ}\ 40'.7 \qquad N = 255^{\circ}\ 19'.3$$

$$\log m = 2.96262 \qquad \log n = 8.82412.$$

Da nun

$$R - r = 917''.80$$

ist, und:

$$p_0 = 8''.57116,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} -5.3 = {} & 10.684\, d(\alpha - A) + 14.986\, d(\delta - D) \\ & + 42.240\, dp_0 + 18.934\, d(R - r). \end{aligned}$$

Eine solche Gleichung von der Form:

$$0 = n + a\, d(\alpha - A) + b\, d(\delta - D) + c\, dp_0 + e\, d(R - r)$$

giebt dann eine jede Beobachtung einer inneren Berührung und aus allen diesen Gleichungen mufs man dann wieder, um die wahrscheinlichsten Werthe zu erhalten, diejenigen Werthe suchen, welche die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum machen.

Auf diese Weise fand nun Encke *) aus der sorgfältigsten Discussion aller bei den Vorübergängen der Venus in den Jahren 1761 und 1769 angestellten Beobachtungen die Sonnenparallaxe gleich 8''.5776. In neuester Zeit hat Encke nach Auffindung des Originalmanuscripts von Hell's Beobachtungen des Venusdurchgangs von 1769 in Wardoe im nördlichen Lappland diesen Werth noch etwas geändert und dafür

8''.57116

angenommen. Man erhält damit die Entfernung der Sonne von der Erde gleich 20682329 geographischen Meilen, von denen 15 auf einen Grad des Aequators gehen.

---

*) Encke, Entfernung der Sonne von der Erde aus dem Venusdurchgang von 1761. Gotha 1822.

Encke, Venusdurchgang von 1769. Gotha 1824.

Nachdem man so die Horizontalparallaxe der Sonne kennt, findet man dieselbe für jedes andere Gestirn, dessen Entfernung vom Mittelpunkte der Erde in Einheiten der halben großen Axe der Erdbahn ausgedrückt Δ ist, durch die Gleichung:

$$\sin p = \frac{8''.57116}{\Delta}.$$

Anm. Alles, was in No. 4 und 5 über die Venusdurchgänge gesagt ist, gilt auch für die Vorübergänge des Mercur vor der Sonne, die indessen weit weniger günstig für die Bestimmung der Sonnenparallaxe sind. Da nämlich für die Zeiten der unteren Conjunction des Mercur die stündliche Bewegung desselben 550″ beträgt, während die Differenz der Parallaxen von Mercur und Sonne im Mittel etwa 9″ ist, so wird der Coefficient von dp_0 für einen Venusdurchgang sich zu dem Coefficienten für einen Mercursdurchgang verhalten wie:

$$\frac{23}{9} \cdot \frac{550}{234} : 1,$$

also im ersteren Falle etwa 6 mal größer sein. Ein Fehler von 5^s in der Beobachtung der Zeit des Ein- und Austritts bei einem Mercursdurchgange wird daher schon einen Fehler von 0″.8 in der Sonnenparallaxe hervorbringen. Wegen der starken Excentricität der Mercursbahn kann dies Verhältniſs indessen günstiger werden, wenn sich nämlich der Mercur zur Zeit seiner untern Conjunction zugleich im Aphel oder in seiner gröſsten Entfernung von der Sonne befindet.

Siebenter Abschnitt.

Theorie der astronomischen Instrumente.

Ein jedes Instrument, mit welchem man die vollständige Bestimmung der Lage eines Gestirns gegen eine Grundebene machen kann, stellt ein auf diese Grundebene bezogenes rechtwinkliges Coordinatensystem dar. Es besteht nämlich ein solches Instrument im Wesentlichen aus zwei Kreisen, von denen der eine die Ebene der xy des Coordinatensystems vorstellt, während ein darauf senkrechter, das Fernrohr tragender Kreis sich um eine auf der ersteren Ebene senkrechte Axe des Instruments drehen läfst und also alle gröfsten Kreise, welche auf der Ebene der xy senkrecht stehen, vorstellen kann. Wäre ein solches Instrument vollkommen richtig, so würde man an den Kreisen unmittelbar die sphärischen Coordinaten desjenigen Punktes, nach welchem das Fernrohr hingerichtet ist, ablesen können. Bei jedem Instrumente mufs man aber Fehler voraussetzen, welche theils von der Aufstellung, theils von der nicht ganz mathematisch richtigen Ausführung desselben herrühren und welche bewirken, dafs die Kreise des Instruments nicht mit den Coordinatenebenen, welche sie repräsentiren, zusammenfallen, sondern einen kleinen Winkel mit denselben bilden. Es ist nun die Aufgabe, aus den an diesen Kreisen beobachteten Coordinaten die auf das rechtwinklige Axensystem bezogenen herzuleiten und zugleich die Abweichungen der Kreise des Instruments von den wahren Coordinatenebenen zu bestimmen.

Aufserdem kommen bei den Instrumenten noch Fehler vor, die theils von der Einwirkung der Schwere und der Temperatur auf die einzelnen Theile des Instruments, theils von der unvollkommenen Ausführung einzelner Theile, wie der Zapfen, der Theilungen der Kreise u. s. w. herrühren, und

man mufs auch Mittel haben, um diese Fehler so weit als möglich zu bestimmen, um aus den Angaben des Instruments die wirklichen auf die gröfsten Kreise der Himmelskugel bezogenen Coordinaten der Sterne mit so grofser Annäherung als möglich herzuleiten.

Aufser diesen Instrumenten, mit denen man zwei auf einander senkrechte Coordinaten eines Sterns beobachten kann, giebt es nun noch andre, mit welchen man theils nur eine einzelne Coordinate, theils den relativen Ort zweier Sterne gegen einander beobachten kann. Für diese Instrumente mufs man ebenso die Methoden kennen lernen, durch welche man aus den an denselben gemachten Ablesungen die wahren Werthe der beobachteten Gröfsen erhalten kann.

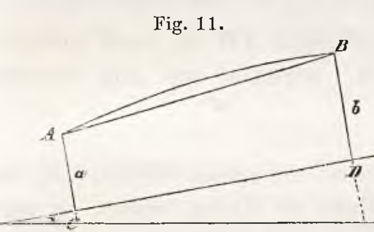
I. Einige alle Instrumente allgemein betreffende Gegenstände.

A. Gebrauch des Niveau's bei Beobachtungen.

1. Das Niveau dient dazu, die Neigung einer Linie gegen den Horizont zu finden. Es besteht aus einer geschlossenen Glasröhre, welche fast ganz mit einer Flüssigkeit angefüllt ist, sodafs nur ein kleiner, mit Luft angefüllter Raum übrig bleibt. Da nun der obere Theil der Röhre in einem Kreisbogen ausgeschliffen ist, so stellt sich die Luftblase in jeder Lage der Libelle so, dafs sie den höchsten Punkt dieses Bogens einnimmt. Der höchste Punkt für die horizontale Lage der Libelle wird durch den Nullpunkt bezeichnet und zu beiden Seiten desselben sind in gleichen Intervallen Theilstriche angebracht, welche von ihm aus nach jeder Seite hin gezählt werden. Könnte man nun das Niveau direct auf eine Linie aufsetzen, so würde man, um diese Linie horizontal zu stellen, die Neigung derselben gegen den Horizont nur so lange zu ändern haben, bis die Mitte der Blase den höchsten Punkt einnimmt, also auf dem Nullpunkte steht. Da dies nun aber nicht angeht, so wird die Glasröhre zum gröfseren Schutze zuerst in eine Messingröhre, die nur die getheilte Seite der

Libelle frei läfst, fest eingelegt und diese Röhre selbst wieder in eine weite Messingröhre von der Länge der Axe des Instruments eingesetzt, deren oberer mittlerer Theil ausgeschnitten und nur mit einem Planglase bedeckt ist. In dieser Röhre wird die andre durch horizontale und verticale Schrauben, die zugleich als Correctionsschrauben dienen, befestigt, sodafs die Theilung des Niveau's sich unter dem Planglase befindet und durch dasselbe abgelesen werden kann *). Die Röhre ist dann mit zwei rechtwinklig ausgeschnittenen Stützen zum Aufsetzen auf die Zapfen oder bei gröfseren Instrumenten mit eben solchen Haken zum Anhängen an die Axe des Instruments versehen. In der Regel werden aber diese Stützen oder Haken nicht gleich lang sein. Es sei nun

Fig. 11.



AB Fig. 11 das Niveau, AC und BD seien die beiden Stützen, deren Länge a und b sein mag, und man denke sich das Niveau auf eine Linie, welche gegen den Horizont um den Winkel α geneigt ist, aufgesetzt und zwar so, dafs BD auf der höheren Seite steht. Dann wird A in der Höhe $a + c$ und B in der Höhe

$$b + c + L \operatorname{tang} \alpha$$

stehen, wenn L die Länge des Niveau's ist. Freilich ist dies nicht ganz richtig, weil die Stützen AC und BD nicht senkrecht auf der horizontalen Linie stehen; da hier aber immer nur kleine Neigungen von wenigen Minuten, gewöhnlich von wenigen Secunden angenommen werden, so genügt diese Näherung vollkommen. Nennt man nun x den Winkel, welchen die Linie AB mit dem Horizonte macht, so wird:

$$\operatorname{tang} x = \frac{b - a + L \operatorname{tang} \alpha}{L},$$

oder

$$x = \alpha + \frac{b - a}{L}.$$

---

*) Diese Einrichtung wird deshalb getroffen, damit sich das Niveau in einem abgeschlossenen Raume befindet und durch die Wärme des Beobachters oder der Lampe beim Ablesen nicht gestört wird.

Kehrt man nun das Niveau um, sodafs B auf der niedrigeren Seite steht, nennt x' den Winkel, welchen AB jetzt mit dem Horizonte macht, so wird:

$$x' = a - \frac{b-a}{L}.$$

Man nehme nun noch an, dafs der Nullpunkt fehlerhaft auf dem Niveau angegeben sei und dafs er um λ näher an B als an A stehe; dann wird man, wenn man das Niveau unmittelbar auf eine horizontale Linie aufsetzt, bei A ablesen $l+\lambda$, wenn $2l$ die Länge der Blase ist, dagegen $l-\lambda$ bei B. Denkt man sich dagegen das Niveau auf die Linie AB aufgesetzt, deren Neigung gegen den Horizont x ist, so wird man auf der Seite von A ablesen:

$$A = l + \lambda - rx,$$

wo r der Halbmesser des Kreisbogens AB ist, nach welchem das Niveau ausgeschliffen ist, dagegen auf dem höheren Ende B:

$$B = l - \lambda + rx.$$

Kehrt man aber das Niveau mit seinen Stützen um, sodafs B auf dem niedrigeren Ende zu stehen kommt, so wird man jetzt ablesen:

$$A' = l + \lambda + rx'$$
$$B' = l - \lambda - rx'.$$

Substituirt man nun für x und x' die vorher gefundenen Werthe, so erhält man für die vier verschiedenen Ablesungen, wenn man die Ungleichheit der Stützen in Theilen des Niveau's u nennt:

$$\begin{aligned} A &= l - ra + \lambda - ru \\ B &= l + ra - \lambda + ru \\ A' &= l + ra + \lambda - ru \\ B' &= l - ra - \lambda + ru. \end{aligned}$$

Man ersieht hieraus, dafs man die zwei Gröfsen λ und ru nicht von einander trennen kann, dafs es also für die Ablesung ganz einerlei ist, ob der Nullpunkt nicht in der Mitte ist oder ob die Stützen ungleich lang sind. Dagegen wird man durch die Combination dieser Gleichungen $\lambda - ru$ und a finden können.

Ist das Ende B der Blase auf einer bestimmten Seite der Axe eines Instruments, z. B. auf derjenigen, auf welcher sich der Kreis befindet und die man das Kreisende nennt,

so wird man nach der Umkehrung des Niveau's A' auf dieser Seite ablesen. Nun ist:

$$\frac{B-A}{2} = -\lambda + ru + r\alpha$$

$$\frac{A'-B'}{2} = \lambda - ru + r\alpha,$$

also:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{B-A}{2} + \frac{A'-B'}{2}\right)}{r} 206265,$$

wenn man die Neigung gleich in Bogensecunden haben will. Die Gröfse $\frac{206265}{r}$ ist dann die Länge eines Niveautheils in Bogensecunden.

Will man also die Neigung einer Axe eines Instruments durch das Niveau bestimmen, so setzt man dasselbe in zwei verschiedenen Lagen auf die Axe und liest beide Enden der Blase in jeder Lage ab. Dann zieht man von der Ablesung auf der Seite des Kreisendes die an der andern Seite gemachte Ablesung ab und dividirt das arithmetische Mittel der in beiden Lagen gefundenen Werthe mit 2, dann ist dies die Erhöhung des Kreisendes der Axe in Theilen des Niveaus ausgedrückt. Multiplicirt man endlich diese Zahl mit dem Werthe eines Niveautheils in Bogensecunden, so erhält man die Erhöhung des Kreisendes in Bogensecunden.

Wenn man annehmen könnte, dafs sich die Länge der Blase während der Beobachtung nicht ändert, so würde man auch:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{(A'-A)}{r},$$

oder

$$= \frac{1}{2} \frac{(B-B')}{r}$$

haben, d. h. die Neigung würde gleich der Hälfte der Bewegung des Niveaus an einem bestimmten Ende sein. Wäre endlich das Niveau vollkommen richtig, also $\lambda - ru = 0$, so würde man gar nicht nöthig haben, das Niveau umzukehren, sondern würde aus dem blofsen Stande von B gegen A die Neigung finden, indem man den halben Unterschied der beiden Ablesungen nähme.

Beispiel. An dem auf der Berliner Sternwarte im ersten Verticale aufgestellten Passageninstrumente wurden 1846 Aug. 22 folgende Nivellirungen gemacht:

	Kreis-Ende			Kreis-Ende	
Objectiv Ost	17.0	9.2	Objectiv West	6.9	19.5
	8.2	18.0		16.1	10.3

$$\frac{B-A}{2} = +3''.90 \qquad\qquad -6''.30$$
$$\lambda - ru = -8''.80 \qquad\qquad \lambda - ru = -9''.20$$
$$\frac{A'-B'}{2} = -4.90 \qquad\qquad +2.90$$
$$-0''.50 \qquad\qquad -1''.70$$

Also ist im Mittel aus den beiden Nivellirungen $b = -1^p.10$, oder da der Werth eines Scalentheils gleich $2''(1-\frac{1}{16})$ war, $b = -2''.06$.

Das Vorige setzt aber voraus, daſs die Tangente an dem Nullpunkte des Niveau's sich mit der Axe des Instruments in einer Ebene befindet. Um dies zu erreichen, berichtige man das Niveau zuerst so, daſs diese Tangente in einer Ebene liegt, die der Axe parallel ist, was der Fall ist, wenn $\lambda - ru$ gleich Null ist. Findet man diesen Werth bei der Nivellirung gleich Null, so ist das Niveau in diesem Sinne berichtigt, findet man aber, wie in dem obigen Beispiele, einen von Null verschiedenen Werth, so muſs man die Neigung des Niveau's durch die verticalen Correctionsschrauben so ändern, daſs die obige Bedingung erfüllt wird, was der Fall ist, wenn A gleich A' und B gleich B' ist oder wenn auf der Seite des Kreisendes sowohl als auf der entgegengesetzten die Blase vor und nach der Umkehrung dieselbe Stellung hat. In dem vorigen Beispiele, wo $\lambda - ru$ im Mittel $9''.00$ ist, würde man also die Neigung des Niveau's so ändern müssen, bis die Blase in der letzten Stellung Objectiv West 11.6 und 14.8 zeigt. Dann würde man an dem so berichtigten Niveau abgelesen haben:

Objectiv Ost	12.5	13.7	Objectiv West	11.4	15.0
	12.7	13.5		11.6	14.8,

woraus man wieder die Neigungen $-0''.50$ und $-1''.70$ und $\lambda - ru$ im Mittel gleich Null gefunden hätte.

Ist das Niveau so berichtigt, so ist die Tangente an dem Nullpunkte des Niveau's in einer der Axe parallelen Ebene. Bewegt man nun das Niveau ein wenig um die Axe des In-

struments, sodafs die Haken immer genau in Berührung mit den Zapfen bleiben, so bleibt die Tangente an dem Nullpunkte, wenn dieselbe der Axe parallel ist, auch bei der Drehung parallel und die Blase ändert daher durch diese Bewegung ihre Stellung nicht. Macht aber die Tangente in der der Axe parallelen Ebene einen Winkel mit der Axe, so ändert sich bei der Drehung die Neigung gegen die Axe, und da sich die Blase immer nach dem erhöheten Ende bewegt, so ist, wenn die Drehung auf den Beobachter zu gerichtet ist, das Ende, nach welchem sich die Blase hinbewegt, dem Beobachter zu nahe. Man mufs dann dies Ende mittelst der horizontalen Correctionsschrauben so lange bewegen, bis die Blase bei der Drehung des Niveau's ihre Stellung unverändert beibehält, wo dann die Tangente an dem Nullpunkt der Axe parallel ist. Durch die Bewegung der horizontalen Schrauben ändert sich aber das Niveau gewöhnlich ein Wenig im verticalen Sinne, und man wird daher die beiden Correctionen im verticalen und horizontalen Sinne in der Regel mehrmals wiederholen müssen, ehe man den vollkommenen Parallelismus der Tangente des Niveau's mit der Axe des Instruments erreicht.

2. Um den Werth eines Niveautheils in Secunden zu finden, kann man dasselbe an einem Höhenkreise befestigen, wenn derselbe eine dazu geeignete Vorrichtung hat und dann durch gleichzeitige Ablesung des Niveaus und des getheilten Kreises und Wiederholung der Ablesungen in wenig geänderten Lagen des Kreises die Anzahl von Theilen finden, die der Anzahl von Secunden, um welche man den Kreis gedreht hat, entspricht. Geht nämlich die Blase durch α Theilstriche, während der Kreis durch β Secunden rotirt, so ist $\frac{\beta}{\alpha}$ der Werth eines Scalentheils in Secunden.

Bei der Untersuchung ist es aber am besten, das Niveau nicht von seinem Träger abzunehmen, da man vermuthen kann, dafs die es haltenden Schrauben eine etwas andre Krümmung hervorbringen, als die, welche das Niveau ohne dieselben zeigen würde, und da man ein grofses Niveau nicht wohl an dem Höhenkreise befestigen kann, so bedient man sich am besten eines eignen Instruments, das im Wesentlichen aus

einem starken, auf drei Schrauben ruhenden T-förmigen Träger besteht, auf welchem das Niveau in zwei rechtwinkligen Lagern ruhen kann, sodafs die Richtung des Niveau's durch die eine Schraube geht und senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden andern Schrauben ist. Die erstere Schraube ist zur Messung bestimmt und ist daher sehr sorgfältig gearbeitet und mit einem getheilten Kopfe und Index versehen, an dem man die Theile einer Umdrehung der Schraube ablesen kann. Durch ein Hülfsniveau kann der Apparat so berichtigt werden, dafs diese Schraube genau vertical steht. Liest man dann in einer Stellung der Schraube das Niveau ab und dann wieder, nachdem man die Schraube ein wenig gedreht hat, so findet man wie vorher die Länge eines Niveautheils in Theilen der Umdrehung der Schraube. Kennt man dann durch genaue Messung die Entfernung f der Schraube von der Verbindungslinie der beiden anderen Schrauben und die Höhe h eines Schraubenumgangs, so ist $\frac{h}{f}$ die Tangente des Winkels, der einer Umdrehung der Schraube entspricht, oder auch $\frac{h}{f}$ 206265 dieser Winkel selbst. Man kann auch leicht prüfen, ob das Niveau vollkommen ist, indem man untersucht, ob die Blase immer um eine gleiche Anzahl von Theilen fortrückt, wenn man die Schraube immer um dieselbe Anzahl von Theilen des Kopfes dreht. Indessen ist es nicht nöthig, dafs die Theile des Niveaus wirklich für die ganze Ausdehnung der Theilung von gleicher Länge sind, sondern es braucht diese Gleichheit nur für diejenigen Theile stattzufinden, die möglicher Weise bei der Nivellirung gebraucht werden und die sich, wenigstens bei neueren Niveaus nicht weit zu beiden Seiten des Nullpunkts erstrecken. Die Blase des Niveau's ändert zwar ihre Länge durch die Wärme und Kälte wegen der Ausdehnung und Zusammenziehung des Weingeistes, die neueren Niveaus haben aber eine ebenfalls zum Theil mit Flüssigkeit gefüllte Kammer, die mit der Röhre des Niveau's durch eine kleine Oeffnung in Verbindung steht, und aus der man das Niveau auffüllen kann, wenn die Blase zu lang geworden ist, indem man dasselbe so neigt, dafs die Kammer an dem hohen Ende steht. Ist umgekehrt die Blase zu kurz, so kann man durch das Neigen des Niveaus im ent-

gegengesetzten Sinne etwas Flüssigkeit ablassen. Dadurch kann man also bewirken, dafs die Blase immer sehr nahe von derselben Länge ist und wenn man daher dafür sorgt, dafs das Niveau immer nahe berichtigt und auch die Neigung der Axe klein ist, indem man das eine Lager des Instruments durch die dazu angebrachten Correctionsschrauben erhöhet oder erniedrigt, wenn dieselbe grofs wird, so wird man immer nur sehr wenige Theilstriche für alle Nivellirungen gebrauchen, deren Länge man sehr sorgfältig bestimmen kann. Es wird übrigens gut sein, diese Bestimmung bei sehr verschiedenen Temperaturen zu wiederholen, um zu sehen, ob sich die Werthe der Scalentheile mit der Temperatur ändern. Zeigt sich eine solche Abhängigkeit, so mufs man die Länge eines Niveautheils durch eine Formel von der Form:

$$l = a + b\,(t - t_0)$$

ausdrücken, wo a die Länge für die bestimmte Temperatur t_0 ist, und wo man die Werthe von a und b aus den bei verschiedenen Temperaturen beobachteten Werthen nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen mufs.

Statt eines eigenen Instruments zur Bestimmung der Niveautheile kann man sich auch eines Höheninstruments und Collimators bedienen, wenn derselbe so eingerichtet ist, dafs man an demselben zwei rechtwinklige Lager befestigen kann, in welche man das Niveau so legen kann, dafs die Tangente des Niveau's mit der Axe des Collimators in einer Ebene liegt. Stellt man nämlich diesen Collimator vor einem, mit einem feinen Höhenkreise versehenen Instrumente auf, legt das Niveau in die Lager und liest dasselbe sowie den Kreis ab, nachdem man das Fadenkreuz des Collimators auf das Fadenkreuz des Instruments gebracht hat und wiederholt man dies, nachdem man die Neigung des Collimators durch eine der Fufsschrauben ein wenig geändert hat, so erhält man wieder aus der Vergleichung der Aenderung des Niveau's und der Ablesungen des Kreises die Länge eines Niveautheils.

Die Theodolithen und Universalinstrumente sind häufig schon so eingerichtet, dafs man die Länge der Scalentheile des Niveau's mittelst einer der Fufsschrauben, die zu dem Ende fein geschnitten ist und einen eingetheilten Kopf hat, bestimmen kann. Diese Instrumente ruhen nämlich auf drei

Fuſsschrauben, die nahe ein gleichseitiges Dreieck bilden. Wenn man dann das Niveau auf die horizontale Axe eines solchen Instruments aufsetzt und die Axe so stellt, daſs die Richtung des Niveau's durch die mit dem eingetheilten Kopfe versehene Schraube a geht, also auf der Verbindungslinie der beiden anderen Schrauben senkrecht steht, so kann man wieder aus der Aenderung der Schraube a und der entsprechenden Bewegung der Blase des Niveau's die Länge eines Scalentheils bestimmen, wenn die Höhe eines Schraubenumgangs und die Entfernung der Schraube a von der Verbindungslinie der beiden anderen Schrauben bekannt ist. Für das an den Mikroskopen- und Nonienträgern des Verticalkreises befestigte Niveau erhält man dagegen den Werth eines Scalentheils, wenn man das Fernrohr auf das Fadenkreuz eines Collimators oder auf ein entferntes irdisches Object richtet und den Kreis sowie das Niveau abliest. Aendert man dann die Neigung des Fernrohrs gegen das Object durch die Fuſsschrauben des Instruments, so liest man an dem Niveau den Betrag der Neigung in Theilen des Niveau's ab, während man denselben in Secunden erhält, wenn man das Fernrohr auf das Object zurückbewegt und den Kreis in der neuen Stellung abliest.

3. Der bisher betrachtete Fall, daſs man durch das Niveau die Neigung einer Linie bestimmen will, auf welche man das Niveau aufsetzen kann, kommt bei den Instrumenten nie vor, sondern man sucht immer die Neigung einer Axe, welche nur durch ein Paar Cylinder an den Enden angegeben ist, auf die man das Niveau aufsetzen muſs. Wenn nun auch die Axe der Cylinder mit der mathematischen Axe des Instruments zusammenfällt, so können die Cylinder doch von verschiedenem Durchmesser sein und es wird dann ein auf dieselben gestelltes Niveau nicht die Neigung der wahren Axe des Instruments angeben. Diese Cylinder liegen immer in Lagern, welche durch zwei Ebenen gebildet werden, die um den Winkel $2i$ gegen einander geneigt sein mögen. Der Winkel zwischen den Haken des Niveau's, womit dasselbe auf die Axe aufgesetzt wird, sei $2i'$, der Radius des Zapfens an dem einen Ende (wofür hier wieder das Kreisende genommen

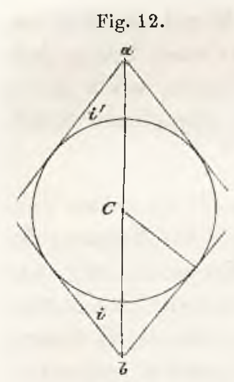


Fig. 12.

wird) sei r_0, so wird bC (Fig. 12) oder die Erhöhung des Mittelpunkts des Zapfens über dem Zapfenlager gleich r_0 cosec i, ebenso wird:

$$aC = r_0 \operatorname{cosec} i',$$

also:

$$ab = r_0 [\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i],$$

und an dem andern Ende der Axe wird

$$a'b' = r_1 [\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i],$$

wenn r_1 der Radius des auf dieser Seite befindlichen Zapfens ist. Macht nun die Linie durch die beiden Punkte, in welchem die Zapfenlager zusammenstoſsen, mit dem Horizonte den Winkel x, so wird man, wenn die Durchmesser der Zapfen einander gleich sind, durch das Niveau auch die Neigung x finden. Sind aber die Zapfen ungleich, so wird man wenn auch x die Erhöhung des Zapfenlagers desselben Endes bezeichnet, für die Erhöhung b des Kreisendes finden:

$$b = x + \frac{r_0 - r_1}{L} [\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i],$$

wo L die Länge der Axe ist. Kehrt man dagegen das Instrument in seinen Zapfenlagern um, sodaſs jetzt das Kreisende in dem tieferen Zapfenlager zu liegen kommt, so wird die Erhöhung des Kreisendes

$$b' = -x + \frac{r_0 - r_1}{L} [\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i]$$

sein. Aus beiden Gleichungen erhält man:

$$\frac{b' + b}{2} = \frac{r_0 - r_1}{L} [\operatorname{cosec} i' + \operatorname{cosec} i],$$

eine Gröſse, welche solange constant bleibt, als sich die Dicke der Zapfen nicht ändert.

Da man nun durch die Nivellirung die Neigung der mathematischen Axe der beiden Cylinder finden will, so muſs man von jedem b abziehen die Gröſse:

$$\frac{r_0 - r_1}{L} \operatorname{cosec} i',$$

oder, wenn man $\frac{r_0 - r_1}{L}$ eliminirt, die Gröſse

$$\frac{\frac{1}{2}(b + b') \operatorname{cosec} i'}{\operatorname{cosec} i + \operatorname{cosec} i'},$$

oder:

$$\frac{\frac{1}{2}(b + b') \sin i}{\sin i + \sin i'}.$$

Ist die Correction, wie dies in der Regel der Fall ist, klein, so kann man $i = i'$ setzen*) und hat dann also an jede Nivellirung die Gröfse $-\frac{1}{4}(b + b')$ anzubringen, wo b und b' die in zwei verschiedenen Lagen der Axe gefundenen Nivellirungen bezeichnen.

Beispiel. An dem Passageninstrumente im ersten Verticale der Berliner Sternwarte war nach No. 1 die Neigung der Axe $b = -2''.06$ gefunden, als das Kreisende der Axe nach Süden gerichtet war. Nach der Umlegung des Instruments wurde die Nivellirung wiederholt und für die Erhöhung des jetzt nach Norden gerichteten Kreisendes gefunden: $b' = +5''.02$, welcher Werth wie vorher das Mittel aus zwei Nivellirungen ist, bei denen das Objectiv des Fernrohrs einmal nach Osten, das andere Mal nach Westen gerichtet war. In diesem Falle ist daher:

$$\frac{1}{4}(b' + b) = +0''.74,$$

mithin war mit Rücksicht hierauf die Neigung der mathematischen Axe der Zapfen

$$\text{bei Kreis Süd} = -2''.80,$$
$$\text{und bei Kreis Nord} = +4''.28.$$

Es ist bisher angenommen worden, dafs die Durchschnitte senkrecht auf die Axe der Zapfen genau kreisförmig sind. Ist dies der Fall, so wird das Niveau bei jeder Neigung des Fernrohrs dieselbe Neigung der Axe angeben und das Fernrohr wird bei der Drehung einen gröfsten Kreis beschreiben; ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, so wird auch die Neigung für verschiedene Erhöhungen des Fernrohrs verschieden sein und das Fernrohr wird bei der Umdrehung statt eines gröfsten Kreises eine Art Zigzaglinie beschreiben. Man kann aber mittelst des Niveaus die Correctionen bestimmen, die man an die in einer bestimmten Lage gemachte Nivellirung anzubringen hat, um die Neigung in einer anderen Lage zu erhalten. Wenn nämlich das Instrument so eingerichtet ist, dafs man das Niveau bei verschiedenen Erhöhungen des Fernrohrs an die Axe anhängen kann, so kann man die Neigung der Axe in verschiedenen Stellungen des Fernrohrs,

*) In der Regel sind i und i' nahe gleich $90°$.

z. B. für jeden 15. oder 30. Grad der Höhe finden und nur, wenn das Fernrohr nach dem Zenith oder Nadir gerichtet ist, wird dies unmöglich sein. Macht man diese Beobachtungen auch in der anderen Lage des Instruments, so kann man die Ungleichheit der Zapfen oder die Gröfse $\frac{1}{4}(b + b')$ für die verschiedenen Zenithdistanzen bestimmen und wenn man diese von den Nivellirungen in den entsprechenden Stellungen des Fernrohrs abzieht, erhält man die Neigung der Axe in den verschiedenen Zenithdistanzen. Durch Vergleichung derselben mit der in der horizontalen Lage gefundenen Neigung kann man dann die Correctionen erhalten, die man an die Neigung in der horizontalen Lage anzubringen hat, um die Neigung für die anderen Zenithdistanzen zu erhalten. Diese Correctionen kann man so für jeden 15. oder 30. Grad durch unmittelbare Beobachtung finden und daraus eine dieselben darstellende periodische Reihe ableiten, oder man kann einfacher die Zenithdistanzen als Abscissen auf eine gerade Linie auftragen, die beobachteten Correctionen der Neigung dagegen als die Ordinaten und durch die Endpunkte derselben, so gut es geht, eine Curve legen. Für die nicht beobachteten Zenithdistanzen nimmt man dann die Ordinaten dieser Curve für die Correction *).

---

*) Noch besser kann man die Zapfen mittelst eines Fühlniveaus untersuchen, indem man dasselbe so auf das Zapfenlager aufsetzt, dafs das Ende des Niveau's auf dem Zapfen ruht. Stellt man das Niveau zuerst auf den Zapfen am Kreisende, liest den Stand desselben in den verschiedenen Zenithdistanzen ab und zieht davon das Mittel der Ablesungen in den beiden horizontalen Lagen des Fernrohrs ab (vorausgesetzt, dafs die gewöhnlichen Nivellirungen immer in diesen beiden Lagen gemacht werden), so findet man, um wieviel höher der höchste Punkt des Zapfens in jeder Lage liegt als im Mittel in beiden horizontalen Lagen. Diese beobachteten Unterschiede seien u_z. Macht man nun dieselbe Reihe von Beobachtungen, nachdem man das Fühlniveau auf den anderen Zapfen aufgesetzt hat und findet dort die Werthe u'_z, so würde, wenn für jeden Werth von z immer $u'_z = u_z$ wäre, die Neigung der Linie durch die höchsten Punkte der Zapfen in allen Stellungen des Instruments dieselbe sein. Ist dies aber nicht der Fall, so wird $\frac{u_z - u'_z}{L}$ 206265, wo L die Länge der Axe ist, die gröfsere Erhöhung der Linie auf der Seite des Kreisendes in jeder Stellung des Fernrohrs geben.

B. Der Nonius oder Vernier und das Ablesungsmikroskop.

4. Der Nonius oder Vernier dient dazu, an der auf den Kreisen der astronomischen Instrumente befindlichen Theilung in Grade und deren Unterabtheilungen noch kleinere Theile abzulesen, und besteht aus einem mit der Theilung auf dem Kreise concentrisch sich bewegenden Gradbogen, welcher in andre Unterabtheilungen getheilt ist als ein gleicher Gradbogen auf dem Kreise. Das Verhältniſs der Theilung auf dem Nonius zu der auf dem Kreise bestimmt die Gröſse der vermittelst des Nonius noch abzulesenden Unterabtheilungen der Kreistheilung.

Hat man irgend einen in gleiche Theile getheilten Maaſsstab (für Kreisbögen bleibt die folgende Betrachtung dieselbe), von denen jeder Theil gleich a ist, so läſst sich der Ort eines jeden Theilstriches auf dem Maaſsstabe als ein Vielfaches von a ausdrücken. Es sei ferner y der Nullpunkt des Nonius, durch welchen man an den astronomischen Instrumenten die Richtung der Alhidade oder des damit verbundenen Fernrohrs angiebt. Trifft dieser Nullpunkt mit einem Striche der Theilung genau zusammen, so erhält man unmittelbar durch Ablesen an dem Kreise den Ort desselben. Liegt aber der Nullpunkt des Nonius zwischen zwei Theilstrichen auf dem Kreise, so muſs nothwendig wegen der verschiedenen Entfernungen der einzelnen Theilstriche auf dem Nonius und dem Kreise irgend einer der übrigen Striche des Nonius mit einem Striche des Kreises coincidiren oder wenigstens von einem solchen Theilstriche um weniger entfernt sein, als der Unterschied der Entfernungen der Striche auf dem Nonius und der Theilung oder als die Gröſse beträgt, welche man überhaupt durch den Nonius ablesen kann. Es stehe dieser coincidirende Strich p Striche von dem Nullpunkte des Nonius ab, so ist die Abscisse desselben, wenn die Gröſse eines Theilstrichs des Nonius a' ist:

$$y + pa'.$$

Ist dann qa die Abscisse desjenigen Theilstrichs des Kreises, welcher dem Nullpunkte des Nonius zunächst vor-

hergeht, so ist die Abscisse des coincidirenden Punktes des Kreises:

$$qa + pa.$$

Es ist also:

$$y + pa' = qa + pa,$$

also der gesuchte Ort des Nullpunkts des Nonius:

$$y = qa + p(a - a').$$

Ist dann:

$$ma = (m + 1)a',$$

d. h. sind m Theile des Kreises auf dem Nonius in $m + 1$ Theile getheilt, so ist:

$$a' = \frac{m}{m + 1} a,$$

also:

$$y = qa + \frac{pa}{m + 1}.$$

Der Ort des Nullpunkts auf dem Nonius ist also gleich der Anzahl der ganzen Hauptabtheilungen auf dem Kreise, welche dem Nullpunkte vorhergehen, plus p Theilen, von denen jeder der $m + 1$ste Theil der Hauptabtheilung ist und wo man die Zahl p findet, wenn man auf dem Nonius vom Nullpunkte ab die Anzahl der Striche bis zur Coincidenz zählt. Um nun diese Zählung zu erleichtern und zugleich die Multiplication mit $\frac{a}{m + 1}$ unnöthig zu machen, sind die Zahlen $p \frac{a}{m + 1}$ schon bei den Strichen des Nonius angegeben.

Man sieht übrigens, daſs wenn man die Zahl m nur groſs genug wählt, man so kleine Theile der Theilung vermittelst des Nonius ablesen kann, als man nur verlangt. Will man z. B. mit einem Instrumente, welches auf dem Kreise unmittelbar 10′ angiebt, noch 10″ ablesen, so hat man einen Bogen des Nonius, welcher gleich 590′ ist, in 60 Theile zu theilen, indem dann $\frac{a}{m + 1} = 10''$ ist. Um nun die Ablesung zu erleichtern, müſste neben dem ersten Striche auf dem Nonius 10″ stehen, neben dem zweiten 20″ etc.; statt dessen werden aber nur die Minuten angegeben, sodaſs bei dem sechsten Striche die Zahl 1, neben den zwölften die Zahl 2 steht.

Allgemein ergiebt sich die Zahl m aus der Gleichung:

$$a - a' = \frac{a}{m+1} \text{ oder } m = \frac{a}{a-a'} - 1,$$

wenn man für $a - a'$ die Gröſse setzt, welche man mittelst des Nonius noch ablesen will und für a den Werth des Abstandes zweier Theilstriche des Kreises, beide natürlich in derselben Einheit ausgedrückt.

Bisher ist angenommen worden, daſs:

$$m\,a = (m+1)\,a'$$

daſs also die Zwischenräume zwischen den Theilstrichen auf dem Nonius kleiner sind, als die auf dem Kreise. Man kann indessen den Nonius auch so einrichten, daſs die Theilstriche auf demselben weiter von einander abstehen, als auf dem Kreise, indem man:

$$(m+1)\,a = m\,a'$$

nimmt. In diesem Falle wird:

$$a' - a = \frac{a}{m}$$

und:

$$y = q\,a - p\,\frac{a}{m}\,.$$

Dann ist also alles dasselbe wie vorher nur mit dem Unterschiede, daſs man jetzt die Coincidenz in entgegengesetztem Sinne zu zählen hat.

Ist die Länge des Nonius um die Gröſse Δl fehlerhaft, so wird jetzt im ersten Falle:

$$m\,a = (m+1)\;a' - \Delta l,$$

mithin nach den vorher gebrauchten Bezeichnungen:

$$y = q\,a + \frac{p\,a}{m+1} - p\,\frac{\Delta l}{m+1}\,.$$

Wenn daher die Länge des Nonius um Δl zu groſs ist, so hat man zu jeder Ablesung die Correction hinzuzulegen:

$$-\frac{p}{m+1}\,\Delta l,$$

wo p die Zahl des coincidirenden Strichs des Nonius und $m+1$ die Anzahl aller Striche auf demselben bezeichnet. Findet man z. B. an einem Instrumente, dessen Kreis von 10 zu 10 Minuten getheilt ist und an dem man mittelst des Nonius noch 10″ ablesen kann, sodaſs 59 Theile des Kreises in 60 Theile getheilt sind, den Fehler:

$$\Delta l = +5'',$$

so hat man also zu jeder Ablesung die Correction $-\frac{p}{60}5''$ hinzuzufügen, oder, da der 6te Strich des Nonius eine Minute angiebt, an jede auf dem Nonius abgelesene Minute die Correction $-0''.5$ anzubringen.

Den Fehler selbst in der Länge des Nonius kann man aber immer mit Hülfe der Theilung des Kreises finden. Man stellt zu dem Ende den Nullstrich des Nonius nach einander auf verschiedene Theilstriche des Kreises ein und liest die Anzahl von Minuten und Secunden ab, welche dem letzten Hauptstriche auf dem Nonius entsprechen. Dann ist das arithmetische Mittel aus allen diesen Ablesungen die wahre Länge des Nonius.

5. Bei Instrumenten, mit welchen man sehr genaue Beobachtungen anstellen will z. B. bei den Meridiankreisen, bedient man sich zum Messen der Unterabtheilungen der Kreistheilung der Schraubenmikroskope, welche entweder an den Pfeilern oder an den die Zapfenlager tragenden Platten so befestigt sind, dafs sie unbeweglich und senkrecht über der Theilung des Kreises stehen. Die Ablesung geschieht dann durch einen im Mikroskope zu beobachtenden beweglichen Faden, den man auf den nächsten Theilstrich des Kreises einstellt, oder besser durch zwei parallele Fäden, zwischen denen man den Strich in die Mitte stellt, und deren Verschiebung man an dem getheilten Kopfe der bewegenden Schraube abliest. Der Nullpunkt dieses getheilten Schraubenkopfes entspricht also dem Nullpunkte beim Nonius, da man eigentlich immer den Abstand des beweglichen Fadens in der Stellung, wenn derselbe auf den Nullpunkt eingestellt ist, vom nächsten Theilstriche mifst. Der Werth einer Schraubenumdrehung ist vorher in Secunden bestimmt, und da man die Anzahl der ganzen Umdrehungen und deren Theile ablesen kann, so erhält man den Abstand des Nullpunkts vom Theilstriche in Secunden. Durch eine eigene Vorrichtung kann man es immer dahin bringen, dafs eine ganze Anzahl von Umdrehungen der Schraube genau gleich der Entfernung zweier zunächst liegender Theilstriche auf dem Kreise wird. Man kann nämlich zu dem Ende diese Mikroskope verlängern oder verkürzen und dadurch bewirken, dafs das Bild der Entfernung zweier Theil-

striche gleich ist dem Stücke, um welches man den beweglichen Faden durch eine ganze Anzahl von Schraubenrevolutionen bewegt. Ist die ganze Zahl von Schraubenrevolutionen gröfser als das Bild der Entfernung zweier Theilstriche, so mufs man das Objectiv des Mikroskopes dem Oculare näher bringen und dann, damit die Deutlichkeit des Sehens nicht gestört wird, das ganze Mikroskop wieder dem Kreise gehörig nähern.

Das Mikroskop mufs aufserdem so gestellt sein, dafs die parallelen Fäden auch den Strichen auf dem Kreise parallel sind; endlich mufs die Axe so gestellt sein, dafs sie dem Centrum des Kreises entweder zugekehrt oder abgekehrt ist, d. h. dafs sie in einer durch den Radius auf den Kreis senkrecht gelegten Ebene steht. Ist diese Berichtigung nicht gemacht, so wird man finden, dafs bei vorsichtigem Drücken an den Limbus des Kreises das nach und nach undeutlicher werdende Bild des Theilstrichs seitwärts rückt, sodafs also dann Fehler in der Ablesung erzeugt würden, wenn etwa der Limbus nicht genau laufen sollte. Ist diese Verschiebung des Bildes bemerkbar, so dreht man den das Objectiv haltenden Auszug des Mikroskops, bis das Bild durch den Druck gegen den Limbus seine Stellung nicht ändert.

Da die Entfernung der Mikroskope vom Kreise kleinen Aenderungen unterworfen ist, so mufs man den Fehler des Mikroskops, d. h. den Unterschied einer ganzen Anzahl von Schraubenumdrehungen und der Entfernung zweier Theilstriche *) von Zeit zu Zeit bestimmen und dann die Ablesungen der Mikroskope danach verbessern. Hierbei ist es aber nicht gleichgültig, welche zwei Striche man auf dem Kreise wählt, da die Entfernung wegen der Theilungsfehler

---

*) Bei den gröfseren Instrumenten ist gewöhnlich der Kreis von 2 zu 2 Minuten getheilt, und zwei Umdrehungen der Schraube sind gleich der Entfernung zweier Theilstriche. Eine Schraubenumdrehung entspricht daher einer Minute, und da der Kopf der Schraube in 60 Theile getheilt ist, so ist jeder dieser Theile eine Secunde, deren Zehntheile man noch bequem schätzen kann. Die Stellung der Fäden, in welcher man 0 Secunden abliest, ist durch eine Marke im Mikroskope bezeichnet, und je nachdem diese Marke nahe bei einem Minutenstriche auf dem Kreise oder über die Hälfte eines Intervals davon entfernt ist, wird man die auf dem Schraubenkopfe abgelesenen Secunden zu der durch den Strich bezeichneten Minute addiren, oder eine Minute dazulegen.

der Striche ein wenig von 2 Minuten verschieden sein kann; man mufs daher die Entfernung zweier bestimmten Striche in Secunden finden und die Schraube des Mikroskops immer mit diesen vergleichen. Endlich kann auch die Schraube Fehlern unterworfen sein, sodafs gleiche Theile der Umdrehung der Schraube die Fäden nicht um gleiche Entfernungen fortbewegen.

Um zuerst diese Fehler der Schraube zu bestimmen, kann man bei der Theilung des Kreises einen kurzen Hülfsstrich (sodafs derselbe nicht mit einem Theilstriche verwechselt werden kann) anbringen lassen, in einer Entfernung von einem Theilstriche, die einem aliquoten Theile der Entfernung der Striche gleich ist, z. B. in der Entfernung 10″ oder 15″, allgemein in der Entfernung α'', sodafs $120 = n\alpha$ ist. Stellt man dann die Schraube des Mikroskops auf 0 und bringt einen der beiden nahen Striche zwischen die Fäden, so kann man durch Bewegung der Schraube den andern Strich zwischen die Fäden bringen, also die Entfernung durch die Schraube messen. Bewegt man dann den Kreis so, dafs der erste Strich wieder zwischen den Fäden steht, so kann man wieder durch die Schraube den zweiten Strich zwischen die Fäden bringen und so fortfahren, bis man die Schraube um die zwei Umdrehungen bewegt hat, die man bei den Ablesungen des Kreises anwendet*). Sind dann die auf der Schraube gemessenen Entfernungen der Striche oder der Fäden:

von 0 bis α	a'
von α bis 2α	a''
⋮	⋮
von $(n-1)\alpha$ bis $n\alpha$	a^n,

so wird man das letzte Mal wieder sehr nahe Null auf der Schraube ablesen, man wird daher das Mittel aller a', a'', etc. als frei von den Fehlern der Schraube ansehen können. Diese

*) Hat man keinen Hülfstrich auf dem Kreise, so kann man hierzu die beiden parallelen Fäden benutzen, wenn deren Entfernung ein aliquoter Theil von 2 Minuten ist, indem man zuerst, wenn die Schraube 0 zeigt, einen Theilstrich unter den einen Faden bringt, und dann mittelst der Schraube den andern Faden auf denselben Strich bringt, u. s. f.

Beobachtungen mufs man mehrmals wiederholen, indem man auch von 120 statt 0 ausgeht und die Intervalle in entgegengesetzter Richtung mifst und dann die Mittel für die einzelnen a', a'' etc. nimmt. Setzt man daher:

$$\frac{a' + a'' + a''' + \ldots + a^n}{n} = a_0,$$

so wird der Fehler der Schraube, den man zur Ablesung a der Trommel hinzuzulegen hat, wenn man auch noch das Interval $-a$ bis 0, und na bis $(n+1)a$ mitnimmt und die dort gemessenen Entfernungen mit a^{-1} und a^{n+1} bezeichnet:

$$\begin{array}{ll}
\text{bei } -a & -a_0 + a^{-1} \\
0 & 0 \\
a & a_0 - a' \\
2a & 2a_0 - a' - a'' \\
\vdots & \vdots \\
(n-1)a = & (n-1)a_0 - a' - a'' - \ldots - a^{n-1} \\
na = & 0 \\
(n+1)a = & a_0 - a^{n+1}.
\end{array}$$

Danach kann man dann eine Tafel berechnen, die die zur Ablesung hinzuzulegende Correction von 10 zu 10 Secunden giebt und aus der man die Correction leicht für jede beliebige Ablesung interpoliren kann. Die so corrigirte Ablesung ist dann von den Fehlern der Schraube frei und giebt immer die Entfernung des Nullpunkts vom vorhergehenden Striche der Theilung in dem sechzigsten Theile einer Schraubenumdrehung ausgedrückt. Sind aber zwei Schraubenumdrehungen nicht gleich 2 Minuten, so würde dies noch nicht der richtige Abstand in Secunden sein.

Um dies zu untersuchen, wählt man zwei Striche aus, deren Abstand bekannt und gleich $120 + y$ ist. Stellt man dann die Schraube auf 0 und den folgenden der beiden Striche zwischen die Fäden (da hier vorausgesetzt ist, dafs die Ablesung der Schraube wächst, wenn man dieselbe von einem Striche nach einem vorhergehenden bewegt), bringt dann durch die Bewegung der Schraube den vorhergehenden Strich zwischen die Fäden, und ist die verbesserte Ablesung der Schraube $120 + p$, so würde $120 + p - y$ die Ablesung der Schraube gewesen sein, wenn man dieselbe von 0 durch 120 Secunden bewegt hätte, und man mufs daher noch alle

wegen der Fehler der Schraube verbesserten Ablesungen der Trommel mit

$$\frac{120}{120 + p - y}$$

multipliciren.

Es ist nun noch zu zeigen, wie man die Länge eines bestimmten Intervals zwischen zwei Strichen, wozu man z. B. die Striche 0° 0′ und 0° 2′ auswählt, bestimmen kann. Zu dem Ende bestimmt man zuerst die Länge des Intervals in Theilen der Micrometerschraube, indem man die Schraube auf 0 stellt und den Strich 0° 2′ unter die Fäden bringt, und dann den Strich 0° 0′ mittelst der Schraube zwischen die Fäden stellt. Die Länge des Intervals in Theilen der Schraube sei im Mittel aus mehren Messungen $120 + x$. Mifst man dann auf dieselbe Weise eine Anzahl von Intervallen in verschiedenen Gegenden des Kreises, so kann man annehmen, dafs unter den gemessenen Intervallen ebenso viele zu grofs als zu klein sind, sodafs das Mittel der wahre Werth eines Intervals von 120″ in Theilen der Schraube ist. Findet man für dies Mittel $120 + u$, so ist das erste Interval um $x - u = y$ zu grofs, oder gleich $120 + y$.

Diese Correction wegen der Abweichung einer Schraubenumdrehung von 2 Minuten kann man dann ebenfalls in eine Tafel bringen, deren Argument die Ablesung der Schraube ist, indem die so im Argumente vernachlässigte Correction wegen der Ungleichheit der Schraube in Folge der Kleinheit der Correction keinen Einflufs hat. Solange dann die Abweichung einer Schraubenumdrehung sich nicht ändert, kann man diese Tafel mit der vorigen für die Ungleichheit der Schraube verbinden.

C. Excentricitäts- und Theilungsfehler der Kreise.

6. Ein nicht zu vermeidender Fehler bei allen astronomischen Instrumenten ist der, dafs der Mittelpunkt der Drehung der Alhidade verschieden ist von dem Mittelpunkte des Kreises oder der Theilung. Es sei *C* Fig. 13 der Mittelpunkt

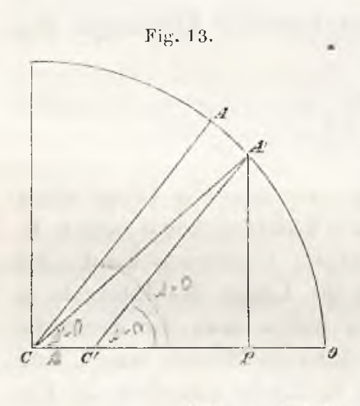


Fig. 13.

der Theilung, C' der der Alhidade und es sei die Richtung $C'A'$ oder der Winkel OCA' gemessen gleich $A'-O$, wenn man die Winkel von O zu zählen anfängt. Dann hätte man, wenn keine Excentricität vorhanden gewesen wäre, den Winkel $ACO = A'C'O$ abgelesen. Nennt man nun r den Radius des Kreises CO, und $A-O$ den Winkel $ACO = A'C'O$, so hat man:

$$A'P = r \sin(A'-O) \quad = A'C' \sin(A-O)$$
$$\text{und } C'P = r\cos(A'-O) - e = A'C' \cos(A-O),$$

wo e die Excentricität bezeichnet.

Multiplicirt man die erstere Gleichung mit $\cos(A'-O)$, die zweite mit $\sin(A'-O)$ und zieht die zweite von der ersteren ab, so erhält man:

$$A'C' \sin(A-A') = e \sin(A'-O).$$

Multiplicirt man dagegen die erstere Gleichung mit $\sin(A'-O)$, die zweite mit $\cos(A'-O)$ und addirt dieselben, so erhält man:

$$A'C' \cos(A-A') = r - e\cos(A'-O),$$

mithin ist:

$$\text{tang}(A-A') = \frac{\frac{e}{r}\sin(A'-O)}{1-\frac{e}{r}\cos(A'-O)}$$

oder nach Formel (12) in No. 11 der Einleitung:

$$A-A' = \frac{e}{r}\sin(A'-O) + \tfrac{1}{2}\frac{e^2}{r^2}\sin 2(A'-O)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{e^3}{r^3}\sin 3(A'-O) + \ldots$$

Da nun $\frac{e}{r}$ immer eine sehr kleine Gröfse ist, so kann man sich mit dem ersten Gliede der Reihe begnügen und es ist dann, wenn man $A-A'$ in Secunden haben will:

$$A-A' = \frac{e}{r}\sin(A'-O)\; 206265,$$

woraus man sieht, dafs der Fehler $A-A'$ in Secunden we-

gen des grofsen Factors immer beträchtlich werden kann, wenn e auch nur ein sehr kleiner Theil von r ist.

Um nun nicht die Kenntnifs der Gröfse der Excentricität nöthig zu haben und um nicht bei jedem gemessenen Winkel die Correction wegen der Excentricität anbringen zu müssen, hat man bei jedem Instrumente mehrere Nonien oder Mikroskope, welche so angebracht sind, dafs der Fehler der Excentricität sich in dem Mittel aus den Ablesungen an den verschiedenen Nonien aufhebt. Besteht nämlich die Alhidade aus zwei gegen einander festen, zunächst einen beliebigen Winkel mit einander bildenden Armen, so hat man für den andern Arm, an welchem man die Ablesung B' gemacht hat, einen analogen Correctionsausdruck, sodafs:

$$A = A' + \frac{e}{r} \sin (A' - O)$$

und

$$B = B' + \frac{e}{r} \sin (B' - O),$$

also:

$$\tfrac{1}{2}(A + B) = \tfrac{1}{2}(A' + B') + \frac{e}{r} \sin [\tfrac{1}{2}(A' + B') - O] \cos \tfrac{1}{2} [A' - B'].$$

Daraus folgt, dafs je geringer der Unterschied zwischen $\frac{1}{2}(A + B)$ und $\frac{1}{2}(A' + B')$ werden soll, desto näher der Winkel $A' - B'$ zwischen den Armen der Alhidade gleich 180^0 werden mufs. Ist $A' - B'$ genau gleich 180^0, so ist das arithmetische Mittel aus den Ablesungen gleich dem arithmetischen Mittel aus den wirklich visirten Richtungen. Man bringt daher immer an den Instrumenten einen vollen Alhidadenkreis mit zwei einander genau gegenüberliegenden Nonien an und vermeidet dann durch Ablesung an beiden den Excentricitätsfehler vollständig.

Um nun den wirklichen Betrag der Excentricität zu finden, braucht man nur die Ausdrücke für A und B von einander zu subtrahiren. Dann erhält man:

$$B - A = B' - A' + 2\,\frac{e}{r} \cos [\tfrac{1}{2}(A' + B') - O] \sin \tfrac{1}{2}(B' - A')$$

oder, wenn man annimmt, dafs die Alhidaden einen Winkel mit einander bilden, der um den kleinen Winkel α von 180^0 verschieden ist, sodafs:

$$B - A = 180 + \alpha,$$

$$B' - A' = 180^0 + \alpha + 2\frac{e}{r}\sin(A' - O)$$

$$= 180^0 + \alpha + 2\frac{e}{r}\cos O \sin A' - 2\frac{e}{r}\sin O \cos A'.$$

Setzt man nun:

$$B' - A' - 180^0 = [X_{A'}],\ 2\frac{e}{r}\cos O = z \text{ und } 2\frac{e}{r}\sin O = y,$$

so wird:

$$[X_{A'}] = \alpha + z\sin A' - y\cos A',$$

und die unbekannten Gröfsen α, z und y können durch Ablesungen an verschiedenen Punkten der Peripherie bestimmt werden.

Beispiel. An dem Meridiankreise der Berliner Sternwarte wurden für ein Paar einander gegenüberstehender Mikroskope die folgenden Gröfsen:

$$B' - A' - 180^0$$

beobachtet:

X_0	$= + 0''.3$	X_{180}	$= + 1''.5$
X_{30}	$= + 3\ .3$	X_{210}	$= - 0\ .6$
X_{60}	$= + 3\ .8$	X_{240}	$= + 0\ .7$
X_{90}	$= + 3\ .1$	X_{270}	$= + 0\ .7$
X_{120}	$= + 4\ .8$	X_{300}	$= - 2\ .5$
X_{150}	$= + 6\ .4$	X_{330}	$= - 4\ .8.$

Daraus erhält man zuerst die Summe aller dieser Gröfsen:

$$+ 16.7 = 12\,\alpha$$

also:

$$\alpha = + 1''.39.$$

Ferner erhält man nach No. 27 der Einleitung:

A	X_A +	X_A + −	X_A −	X_A − +
0°	+ 0 . 3	− 1 . 2		
30°	− 1 . 5	− 7 . 3	+ 8 . 1	+ 15 . 1
60	+ 1 . 3	− 4 . 2	+ 6 . 3	+ 10 . 4
90	+ 3 . 8		+ 2 . 4	+ 2 . 4
120	+ 5 . 5		+ 4 . 1	
150	+ 5 . 8		+ 7 . 0	
180	+ 1 . 5			

und hieraus:

$$\tfrac{1}{2}\,n\,y = + \ 9''.62$$
$$\tfrac{1}{2}\,n\,z = + 18.96,$$

also:

$$O = 26^0\ 54'.2 \text{ und } \frac{e}{r} = 1''.772.$$

7. Sind nun an einem Kreise mehrere Paare von Nonien oder Mikroskopen angebracht, wie dies in der Regel der Fall ist, so müfste das arithmetische Mittel aus jedem Paare Nonien von dem Mittel aus jedem andern Paare für alle Einstellungen um eine Constante verschieden sein, wenn es aufser den von der Excentricität herrührenden Fehlern keine anderen gäbe. Dies wird aber in der Regel nie der Fall sein, da die Theilung selbst immer fehlerhaft sein wird. Welcher Art nun aber auch diese Fehler der Theilung sein mögen, so werden sie doch immer durch eine periodische Reihe von folgender Form dargestellt werden können:

$$a + a_1 \cos A + a_2 \cos 2A + \ldots\ldots$$
$$+ b_1 \sin A + b_2 \sin 2A + \ldots\ldots$$

wo A die Ablesung an dem einzelnen Nonius oder Mikroskope bezeichnet.

Wendet man nun i durch die Peripherie gleichmäfsig vertheilte Nonien an, sodafs die Ablesungen bei einer Einstellung die folgenden werden:

$$A,\ A + \frac{2\pi}{i},\ A + 2 \cdot \frac{2\pi}{i}, \ldots .$$

und

$$A + (i - 1)\frac{2\pi}{i},$$

und nimmt das Mittel aus allen Nonien, so hebt eine grofse Anzahl von Gliedern der periodischen Reihe der Theilungsfehler einander auf, wie man leicht sieht, wenn man die trigonometrischen Functionen der zusammengesetzten Winkel auflöst und auf die in No. 26 der Einleitung gefundenen Gleichungen (1) bis (5) Rücksicht nimmt.

Bei i Nonien werden nur diejenigen Glieder übrig bleiben, bei denen das $i$fache des Winkels vorkommt. Man hebt also auch durch das Ablesen an mehreren Nonien einen grofsen Theil der Theilungsfehler auf und hierin besteht der wesentliche Nutzen von mehreren Paaren von Nonien oder Mikroskopen.

Die Bestimmung der Theilungsfehler geschieht durch die Vergleichung der Intervalle, welche aliquote Theile der Peripherie sind, unter einander. Wollte man z. B. die Fehler der Striche von 5 zu 5 Graden finden, so könnte man zwei Mikroskope in der Entfernung von nahezu 5 Graden über der

Theilung aufstellen, und indem man einen Strich durch die Bewegung des Kreises unter das eine, stets unverändert zu lassende, Mikroskop bringt, den Abstand des anderen Striches an der Schraube des zweiten Mikroskops messen, indem man einfach durch die Bewegung der Schraube des Mikroskops den Strich zwischen die parallelen Fäden bringt und den Schraubenkopf abliest. Bringt man dann durch die Bewegung des Kreises den zweiten Strich zwischen die Fäden des ersten Mikroskops, so wird der dritte 5° Strich unter dem zweiten Mikroskope sein und man kann seinen Abstand von dem zweiten Strich auf dieselbe Weise messen u. s. f., bis man zu dem ersten Strich wieder zurückkommt und dessen Entfernung von dem letzten Striche mifst. Diese Messungen kann man wiederholen, indem man den Kreis in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Nimmt man dann das Mittel aller Ablesungen der Schraube und bezeichnet dasselbe durch α_0, dagegen die Ablesungen, wenn der zweite, dritte, etc. Strich unter dem Mefsmikroskope ist mit α', α'', etc., so ist, wenn man den ersten Strich als richtig ansieht, der Fehler des zweiten Strichs $\alpha_0 - \alpha'$, der des dritten Strichs $2\alpha_0 - \alpha' - \alpha''$, etc. Wegen der Aenderungen, die der Kreis durch äufsere Einflüsse während einer so langen Reihe erfährt, ist es aber besser, die Fehler der Striche nach und nach zu bestimmen, indem man zuerst mit möglichster Sicherheit wenige Hauptpunkte der Theilung bestimmt und, indem man sich auf diese Correctionen stützt, durch Halbiren der Bögen neue Punkte bestimmt und so fort, immer auf die vorher gefundenen Correctionen gestützt, durch Halbiren oder Dreitheilen der Bögen zu kleineren fortgeht. Kleinere Intervalle von ein oder zwei Graden kann man auch wohl fünf- oder sechsmal repetiren, bei gröfseren ist es aber immer vorzuziehen, nur zu halbiren oder in drei Theile zu theilen. Diese Operationen lassen sich dann schnell ausführen und können zur Sicherheit beliebig oft wiederholt werden.

Um diese Untersuchung zu machen, braucht man also zwei Mikroskope, die man in beliebigen Abständen fest über dem Kreise befestigen kann. Wendet man eins der Mikroskope des Kreises an, so braucht man also nur noch eine Vorrichtung, um ein andres in jedem Abstande davon be-

festigen zu können. Für die sehr kleinen Intervalle z. B. von einem Grade kann man sich bequem eines Mikroskops mit getheiltem Objective bedienen. Vor dem Beginn dieser Beobachtungsreihe müssen die Mikroskope natürlich berichtigt werden, wie dies in No. 5 gezeigt ist, und man wird am besten thun, immer ein und dasselbe Mikroskop zur Messung anzuwenden und die Beobachtungen auch so einzurichten, daſs die Messung immer an derselben Stelle der Mikrometerschraube geschieht, was immer erreicht werden kann, wenn beim Beginn jeder Reihe das unverändert bleibende, nur als Nullpunkt dienende Mikroskop entsprechend verstellt wird.

Beispiel. Bei dem Meridiankreise zu Ann Arbor wurden zuerst zwei Mikroskope angewandt, deren Abstand 180° war. Wurde der Strich 0 der Theilung unter das erste Mikroskop gebracht, so las man am andern Mikroskope, nachdem dasselbe auf den Strich 180 eingestellt war, — 17″.9 ab; wurde aber der Strich 180 unter das erste Mikroskop gebracht, so las man am andern nach der Einstellung auf den Nullstrich — 2″.7 ab. Es ist somit das Mittel — 10″.3 und daher der Fehler des Striches 180° gleich + 7″.60. Im Mittel aus 10 Beobachtungen wurde + 7″.61 gefunden und dies als der Fehler des Striches 180 angesehen. Um nun die Fehler für 90 und 270 zu erhalten, wurden die Bögen 0 bis 180° und 180° bis 0 halbirt, indem zwei Mikroskope in der Entfernung von 90° benutzt wurden. Wurde der Strich 0 unter das erste Mikroskop gebracht, so las man am zweiten bei dem Striche 90 ab — 6″.5, ward dagegen der Strich 90 unter das erste Mikroskop gebracht, so las man am zweiten Mikroskop für den Strich 180 ab — 3″.5, oder wenn man dies wegen des Fehlers des Striches 180 verbessert, + 4″.11. Das Mittel aus — 6.5 und + 4.11 giebt — 1.19, daher ist der Fehler des Striches 90 gleich + 5″.31. Ebenso wurden durch Halbirung der Bögen von 90° die Fehler der Punkte 45, 135, 225 und 315 bestimmt. Daraus könnten dann die Theilungsfehler der Bögen von 15° bestimmt werden, indem man die Bögen von 45° in drei Theile theilt. Da man aber bei diesem Instrumente die Mikroskope nicht so nahe bringen kann, so wurden Bögen von 315 und 225 in 3 Theile getheilt. Zu dem Ende wurden die Mikroskope zuerst in 105° Entfernung

aufgestellt. Wurden die Striche 0, 105, 210 nach einander unter das feste Mikroskop gebracht, so las man an dem zweiten in den 3 Stellungen ab $-11''.9$, $-5''.6$ und $+2''.0$, oder wenn man zur letzten Ablesung den Fehler des Striches 315 gleich $-0''.48$ addirt, $-11''.9$, $-5''.6$ und $+1''.52$. Das Mittel aus allen ist $-5''.33$, daher der Fehler des Striches 105 gleich $+6''.57$, der von 210 gleich $2\alpha_0 - \alpha' - \alpha'' = +6''.84$. Geht man bei den Messungen nicht vom Nullstrich aus, sondern von einem andern Striche, dessen Fehler bestimmt sind, so mufs natürlich auch die erste Ablesung corrigirt werden, indem man den Fehler des ersten Strichs mit umgekehrtem Zeichen hinzufügt. Wenn z. B. das erste Mikroskop nach einander auf 90, 195, 300 gestellt war, so las man am zweiten Mikroskope bei 195, 300 und 45 ab $-6''.6$, $+2''.1$ und $-7''.9$. Da nun die Fehler von 90 und 45 respective $+5''.46$ und $+3''.36$ gefunden waren, so sind die verbesserten Ablesungen $-12''.06$, $+2''.10$, $-4''.54$. Das Mittel ist $-4''.83$ und daher der Fehler von 195 gleich $+7''.23$ und von 300 gleich $+0''.30$.

Die so gefundenen Fehler sind die Summen der Theilungsfehler und der von der Excentricität des Kreises und der Unregelmäfsigkeiten der Zapfen herrührenden Fehler. Endlich sind auch die von der Einwirkung der Schwere auf den Kreis hervorgebrachten Aenderungen der Striche, die Fehler der Biegung, darin enthalten. Die durch die letztere Ursache erzeugten Aenderungen eines Strichs werden sich mit der Lage des Strichs gegen die Verticallinie ändern, sodafs man allgemein die in Folge dieser Aenderung an den Strich anzubringende Correction durch eine Reihe von der Form

$$a' \cos z + b' \sin z + a'' \cos 2z + b'' \sin 2z + a''' \cos 3z + b''' \sin 3z + \ldots$$

ausgedrückt annehmen kann, wo die Coefficienten der Sinus und Cosinus für jeden einzelnen Strich verschieden sind und sich mit dem Abstande des Striches von einem im Kreise als fest angenommenen Anfangspunkte ändern. Bringt man daher einen Strich von der Zenithdistanz z in die Zenithdistanz $180^0 + z$, so werden alle ungeraden Glieder der Reihe gleich und im Zeichen entgegengesetzt sein. Wenn man also die Entfernung zweier Striche zuerst in einer Stellung des Kreises mifst, wo die Zenithdistanz des einen Strichs z ist,

dann aber auch in der entgegengesetzten Stellung, wenn die Zenithdistanz $180^0 + z$ ist, so ist die halbe Summe der gemessenen Entfernungen von den ungeraden Gliedern der Biegung frei und nur noch mit den von $2z$, $4z$, etc. abhängenden Gliedern behaftet. Beobachtet man in 4 um 90^0 verschiedenen Lagen des Kreises, so bleiben in dem Mittel nur die von $4z$, $8z$, etc. abhängenden Glieder. In der Regel werden die zweifachen Glieder schon sehr klein sein und man wird das Mittel aus zwei in entgegengesetzten Stellungen des Kreises beobachteten Entfernungen als frei von der Biegung annehmen können *).

Die Fehler der Excentricität verschwinden, wenn man das Mittel der Fehler zweier diametral gegenüberliegender Striche nimmt und ebenso verschwinden in dem Falle die Fehler, die von der unregelmäfsigen Figur der Zapfen herrühren. Denn solche Unregelmäfsigkeiten bewirken nur, dafs der Excentricitätsfehler des Kreises in den verschiedenen Lagen des Instruments ein wenig verschieden ist, da bei der Drehung des Instruments um die Axe der Mittelpunkt der Theilung in den verschiedenen Lagen des Kreises verschiedene Lagen gegen den Punkt erhält, in welchem die Zapfenlager zusammenstofsen **). Ist der Kreis, wie dies gewöhnlich der Fall ist, mit 4 Mikroskopen versehen, so nimmt man die Mittel der Theilungsfehler von je vier um 90^0 entfernten Strichen und diese sind dann die Correctionen, die man zu den vollständigen, durch das Mittel aus vier Mikroskopen gegebenen

---

*) Bessel hat in No. 577, 578 und 579 der astronomischen Nachrichten den Einflufs der Schwere auf einen Kreis theoretisch untersucht und für die Aenderung der Entfernung zweier Striche den Ausdruck $a' \cos z + b' \sin z$ gefunden, indessen kommt der dort betrachtete Fall eines vollkommen homogenen Kreises in der Wirklichkeit nicht vor. In der Regel werden die höheren Glieder immer sehr klein sein, aber es wird immer gut sein, sich davon durch eine eigene Untersuchung zu überzeugen.

**) Die von der Excentricität und den Unregelmäfsigkeiten der Zapfen abhängigen Glieder sind daher von der Form:

$$[e + e' \cos z + e'' \sin z + e'_2 \cos 2z + e''_2 \sin 2z] \sin (A - O_*),$$

wo A die am Kreise gemachte Ablesung, z die Zenithdistanz des Nullpunkts des Kreises und O_* die ebenfalls mit z veränderliche Richtung der Linie durch den Mittelpunkt des Kreises und der Drehung ist.

Ablesungen hinzuzufügen hat, um dieselben von den Theilungsfehlern zu befreien.

Man kann nun nach der obigen Methode die Fehler für die einzelnen Gradstriche, oder, wenn man will, für halbe Gradstriche bestimmen Zeigt sich ein regelmäfsiger Gang in den gefundenen Correctionen, die man den Ablesungen von $\frac{0+90+180+270}{4}$ bis $\frac{90+180+270+0}{4}$ hinzuzufügen hat, so kann man diese Correction durch eine periodische Reihe von der Form $a \cos 4z + b \sin 4z + a_1 \cos 8z + b_1 \sin 8z$ etc. darstellen und erhält dadurch die regelmäfsigen Theilungsfehler, die man dann in eine Tafel bringen und an jede am Kreise gemachte Ablesung anbringen kann. Die zufälligen Theilungsfehler der Striche müssen aber nach der vorigen Methode durch weitere Theilung der Bögen gefunden werden, und da dies, wenn man es für alle Striche ausführen wollte, eine ungeheure Arbeit erfordern würde, so hat Hansen eine eigenthümliche Construction des Kreises und Mefsapparats vorgeschlagen, bei welcher die Anzahl der Striche, für welche die Theilungsfehler zu bestimmen sind, bedeutend verkleinert wird. (Astronomische Nachrichten No. 388 und 389). Die Bestimmung der Theilungsfehler wird immer besonders wichtig sein für die Striche, die bei der Bestimmung der Polhöhe, der Declinationen der Hauptsterne und bei den Sonnenbeobachtungen vorkommen und wenn man einmal die Fehler für die Halben-Gradstriche bestimmt hat, so kann man leicht die Fehler einzelner Striche finden, indem man alle die Intervalle von zwei Minuten zwischen den Halben-Gradstrichen, zwischen denen der zu bestimmende Strich liegt, mittelst der Schraube des Mikroskops mifst. Zu dem Ende stellt man die Schraube des Mikroskops auf Null, und bringt den Halben-Gradstrich durch die Bewegung des Kreises unter die Fäden und mifst die Entfernung des nächsten Strichs durch die Schraube. Darauf dreht man die Schraube auf Null zurück, bringt durch die Bewegung des Kreises den Strich wieder unter die Fäden und mifst die Entfernung des folgenden Strichs u. s. f., bis man auf den nächsten Grad- oder Halben-Gradstrich kommt. Diese Messungen führt man auch in der entgegengesetzten Richtung aus und nimmt die Mit-

tel zwischen den für dasselbe Interval gemachten Messungen. Sind dann x und x' die Theilungsfehler des ersten und letzten Striches, α', α'', etc. die gemessenen Intervalle des ersten vom zweiten, zweiten vom dritten, etc., so ist:

$$\frac{\alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \ldots + x' - x}{15} = \alpha_0$$

gleich einem Interval von zwei Minuten an der Schraube gemessen, und es ist daher der Fehler des dem Hauptpunkte folgenden Strichs:

$$x + \alpha_0 - \alpha'$$

der des zweiten $x + 2\alpha_0 - \alpha' - \alpha''$

der des dritten $x + 3\alpha_0 - \alpha' - \alpha'' - \alpha'''$

und so fort.

Vergl. über die Bestimmung der Theilungsfehler: Bessel, Königsberger Beobachtungen Bd. I und VII, auch Astronomische Nachrichten No. 841. Struve, Astronomische Nachrichten No. 344 und 345 und Observ. Astron. Dorpat. Vol. VI sive novae seriae Vol. III; Peters, Bestimmung der Theilungsfehler des Ertelschen Verticalkreises der Pulcowaer Sternwarte.

D. Von der Biegung oder der Einwirkung der Schwere auf die Kreise und das Fernrohr.

8. Die Schwere ändert die Gestalt eines verticalen Kreises. Denkt man sich den Punkt, von dem die Theilung gezählt wird, nach dem Zenith gerichtet, so wird jeder Punkt der Theilung durch die Schwere eine kleine Verrückung gegen den Nullpunkt erleiden, die für einen bestimmten Punkt A gleich α_0 sein mag. Bewegt man nun den Nullpunkt des Kreises nach der Zenithdistanz z, oder so, daſs der Punkt z der Theilung nach dem Zenith gerichtet ist, so wird die Verrückung des Punktes A von α_0 verschieden sein. Bezeichnet man allgemein mit α_ζ die Verrückung des bestimmten Punktes A, wenn der Nullpunkt die Zenithdistanz ζ hat, die von 0 bis 360 herum gezählt werden soll, so wird sich α_ζ durch eine periodische Reihe darstellen lassen von der folgenden Form:

$$a' \cos\zeta + a'' \cos 2\zeta + a''' \cos 3\zeta + \ldots$$
$$+ b' \sin\zeta + b'' \sin 2\zeta + b''' \sin 3\zeta + \ldots$$

Geht man nun aber von einem bestimmten Punkte A zu einem andern über, so wird sich die Verrückung dieses Punktes durch eine ähnliche periodische Reihe ausdrücken lassen, in der nur die Coefficienten a', b', etc. verschieden sein werden. Für die verschiedenen Punkte wird sich der Coefficient a' durch eine periodische Reihe ausdrücken lassen, die von der Ablesung am Kreise abhängt, ebenso die andern Coefficienten, sodafs also allgemein die Verrückung des Punktes u der Theilung, wenn der Nullpunkt die Zenithdistanz ζ hat, sich ausdrücken läfst durch eine Reihe von der Form:

$$\begin{aligned} & a'_u \cos\zeta + a''_u \cos 2\zeta + a'''_u \cos 3\zeta + \ldots \\ & + b'_u \sin\zeta + b''_u \sin 2\zeta + b'''_u \sin 3\zeta + \ldots, \end{aligned}$$

wo a'_u, b'_u, etc. periodische Functionen von u sind. Das Zeichen dieses Ausdrucks soll so genommen werden, dafs man die durch den Ausdruck gegebene Verbesserung zu der Ablesung hinzuzulegen hat, um dieselbe frei von Biegung zu erhalten.

Eine vollständige Ablesung an einem Kreise ist nun das Mittel aus den Ablesungen an den verschiedenen Mikroskopen, deren gewöhnlich vier sind in einer Entfernung von 90 Graden von einander. Die Mikroskope seien so gegen den Kreis gestellt, dafs eins derselben 0 angiebt, wenn das Fernrohr nach dem Zenith gerichtet ist. Die Zenithdistanz dieses Mikroskops, an welchem man die Zenithdistanz des Fernrohrs abliest, sei m. Dreht man nun das Fernrohr nach der Zenithdistanz z, so wird der Strich z unter diesem Mikroskope sein, und da der Nullpunkt dann die Zenithdistanz $z + m$ hat, so wird in diesem Falle $u = z$, $\zeta = z + m$; die an die Ablesung an diesem Mikroskope anzubringende Correction ist daher:

$$\begin{aligned} & a'_z \cos(z+m) + a''_z \cos 2(z+m) + a'''_z \cos 3(z+m) + \ldots \\ & + b'_z \sin(z+m) + b''_z \sin 2(z+m) + b'''_z \sin 3(z+m) + \ldots \end{aligned}$$

Bei dem andern Mikroskop, an welchem man die Ablesung $90 + z$ erhält, wird aber $u = 90 + z$, $\zeta = z + m$; also werden jetzt die Coefficienten in dem Ausdruck der Biegung a'_{90+z}, b'_{90+z}, etc. Hat man also vier Miskroskope in Abständen von 90^0 und nimmt das Mittel aus allen 4 Ablesungen, so hat man an dies Mittel die Correction anzubringen:

$$\alpha'_z \cos(z+m) + \alpha''_z \cos 2(z+m) + \alpha'''_z \cos 3(z+m) + \ldots$$
$$+ \beta'_z \sin(z+m) + \beta''_z \sin 2(z+m) + \beta'''_z \sin 3(z+m) + \ldots,$$

wo die verschiedenen α und β periodische Functionen von z sind, die nur von dem 4fachen, 8fachen etc. des Winkels z abhängen, da die übrigen Glieder einander in der Summe der vier Ablesungen aufheben. Sind diese Glieder Null, so ist also der Einfluſs der Schwere auf das Mittel der Ablesungen an vier Mikroskopen Null; sind dieselben aber für eine oder die andre der Gröſsen vorhanden, so ist auch eine solche Biegung vorhanden. Da nun m constant ist, so kann man der an das Mittel aus 4 Mikroskopen anzubringenden Correction wieder allgemein die Form geben:

$$a' \cos z + a'' \cos 2z + a''' \cos 3z + \ldots$$
$$+ b' \sin z + b'' \sin 2z + b''' \sin 3z + \ldots. \qquad (A)$$

Die Schwere wirkt aber auch auf das Fernrohr ein, indem sowohl das Objectiv als auch das Ocularende herabgebogen wird, sobald das Fernrohr aus der verticalen Lage gebracht ist. Ist diese Biegung bei beiden Enden des Fernrohrs gleich, sodaſs der Mittelpunkt des Objectivs ebenso viel sinkt als der Mittelpunkt des Fadenkreuzes, so ist klar, daſs dieselbe keinen Einfluſs hat, da in dem Falle die beide Mittelpunkte verbindende gerade Linie (die Collimationslinie) einer festen Linie im Kreise immer parallel bleiben würde. Ist aber die Biegung an beiden Enden verschieden, so ändert die Collimationslinie ihre Lage gegen eine feste Linie am Kreise, und es entsprechen daher die Winkel, welche die Collimationslinie durchläuft, nicht den Winkeln, die man am Kreise abliest. Die deswegen an die Ablesungen anzubringende Correction wird sich aber wieder durch eine periodische Function von z ausdrücken lassen und man kann daher annehmen, daſs der Ausdruck (A) die beiden Biegungen, des Kreises sowohl als des Fernrohrs, darstellt.

Man hat zwei Methoden, nach welchen man die Beobachtungen so anordnen kann, daſs die Biegung zum gröſsten Theile wenigstens aus dem Resultate verschwindet. Beobachtet man nämlich einen Stern in der Zenithdistanz z, so wird das von einem künstlichen Horizonte reflectirte Bild desselben in der Zenithdistanz $180^0 - z$ gesehen, und diese Striche werden bei beiden Beobachtungen unter dem Mikroskope sein,

welches die Zenithdistanzen giebt. Legt man nun das Instrument um, sodafs der Kreis auf die andre Seite kommt, also die Theilung im entgegengesetzten Sinne läuft, so ist jetzt die Ablesung bei der directen Beobachtung $360^0 - z$ und bei der reflectirten $180^0 + z$. Bezeichnet man daher die 4 vollständigen, für die Theilungsfehler verbesserten Ablesungen für die 4 Beobachtungen mit z, z', z'' und z''', mit ζ die wahre von der Biegung befreite Zenithdistanz, so hat man für die 4 Beobachtungen, wenn N den Nadirpunkt bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\text{Direct}\quad \zeta &= z + a'\cos z + a''\cos 2z + a'''\cos 3z + \ldots + b'\sin z\\
&\quad + b''\sin 2z + b'''\sin 3z + \ldots - (180^0 + N) + a' - a'' + a''' \text{*)}\\
\text{Reflectirt}\quad 180^0 - \zeta &= z' - a'\cos z + a''\cos 2z - a'''\cos 3z + \ldots + b'\sin z\\
&\quad - b''\sin 2z + b'''\sin 3z - \ldots - (180^0 + N) + a' - a'' + a'''\\
\text{Direct}\quad 360^0 - \zeta &= z'' + a'\cos z + a''\cos 2z + a'''\cos 3z + \ldots - b'\sin z \qquad (B)\\
&\quad - b''\sin 2z - b'''\sin 3z - \ldots - (180^0 + N') + a' - a'' + a'''\\
\text{Reflectirt}\quad 180^0 + \zeta &= z''' - a'\cos z + a''\cos 2z - a'''\cos 3z + \ldots - b'\sin z\\
&\quad + b''\sin 2z - b'''\sin 3z + \ldots - (180^0 + N') + a' - a'' + a'''.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$90^0 - \zeta = \frac{z' - z}{2} - a'\cos z - a'''\cos 3z - \ldots - b''\sin 2z - \ldots$$

$$90^0 - \zeta = \frac{z'' - z'''}{2} + a'\cos z + a'''\cos 3z + \ldots - b''\sin 2z - \ldots,$$

also im Mittel:

$$90^0 - \zeta = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{z' - z}{2} + \frac{z'' - z'''}{2}\right\} - b''\sin 2z - \ldots,$$

sodafs also, wenn man einen Stern direct und reflectirt in beiden Lagen des Instruments beobachtet, im mittleren Resultate für die Höhe nur die von dem 2fachen, 4fachen u. s. w. abhängenden Sinusglieder übrig bleiben.

Das Mittel der beiden ersten Gleichungen (B) giebt auch:

$$90^0 = \frac{z + z'}{2} + a''\cos 2z + \ldots + b'\sin z + b'''\sin 3z + \ldots$$
$$- (180^0 + N) + a' - a'' + a''',$$

ebenso:

$$270^0 = \frac{z'' + z'''}{2} + a''\cos 2z + \ldots - b'\sin z - b'''\sin 3z - \ldots$$
$$- (180^0 + N') + a' - a'' + a''',$$

woraus folgt:

$$360^0 = \frac{z + z'}{2} + \frac{z'' + z'''}{2} + 2a''\cos 2z + \ldots - (N + N') + 2(a' - a'' + a''')$$

$$180^0 = \frac{z'' + z'''}{2} - \frac{z + z'}{2} - 2b'\sin z - 2b'''\sin 3z + \ldots + N - N'.$$

---

*) Die dem Nadirpunkt hinzuzufügende Correction ist nämlich $-a' + a'' - a''' + \ldots$

Beobachtet man also verschiedene Sterne in beiden Lagen des Kreises direct und reflectirt, so könnte man aus diesen Gleichungen die wahrscheinlichsten Werthe der geraden Cosinusglieder und der ungeraden Sinusglieder bestimmen.

Da diese Beobachtungen an verschiedenen Tagen gemacht werden, so müssen natürlich die Zenithdistanzen z, z', z'' und z''' auf eine bestimmte Epoche reducirt werden, am einfachsten auf den Anfang des Jahres, indem man die Reduction auf den scheinbaren Ort (IV, 1) mit umgekehrtem Zeichen nimmt und diese im richtigen Sinne an die Ablesung des Kreises anbringt. Da aufserdem sich die Lage der Mikroskope gegen den Kreis ändert, so mufs der Zenith- oder Nadirpunkt bei jeder Beobachtung nach No. 24 dieses Abschnitts bestimmt und durch die Anwendung des jedesmaligen Zenithpunkts die Aenderung der Mikroskope eliminirt werden. Ferner ist bei den reflectirten Beobachtungen noch darauf Rücksicht zu nehmen, dafs man den Stern reflectirt strenge genommen in einer anderen Polhöhe beobachtet, als die des Instruments, indem man die Zenithdistanz für den Punkt erhält, wo der künstliche Horizont steht. Da nun der Horizont immer in der Verlängerung der Axe des Fernrohrs steht, so ist seine Entfernung von dem Punkte senkrecht unter der Mitte des Instruments gleich $h \operatorname{tang} z$, wo h die Höhe der Axe des Instruments über dem Horizonte ist. Da nun in mittleren Breiten die Aenderung der Polhöhe für eine Toise gleich $0''.0631$ ist, so mufs man, wenn h in Pariser Fufs ausgedrückt ist, $0''.0105\, h \operatorname{tang} z$ zu der Zenithdistanz des reflectirten Bildes addiren.

Eine zweite Methode der Elimination der Biegung ist von Hansen vorgeschlagen und erfordert eine eigene Construction des Fernrohrs, sodafs man das Objectiv und Ocular desselben mit einander vertauschen kann. Sind die beiden Köpfe des Fernrohrs so construirt, dafs deren Schwerpunkte gleiche Entfernung von der Axe des Instruments haben, so wird bei der Vertauschung derselben das Gleichgewicht nicht gestört und man kann daher annehmen, dafs in beiden Fällen die Einwirkung der Schwere auf das Fernrohr dieselbe ist. Ist dann in einem Falle der Punkt 180 des Kreises nach dem Nadir gerichtet und liest man an

dem einen Mikroskope, welches das Hauptmikroskop heifsen soll, die Zenithdistanz ab, so wird im anderen Falle der Punkt 0 dem Nadir entsprechen und die Ablesung an demselben Mikroskop $180^0 +$ Zenithdistanz sein. Ist daher ζ die von der Biegung befreite Zenithdistanz und sind die wegen der Theilungsfehler verbesserten Ablesungen im ersten Falle z, im zweiten z', so hat man:

$$\zeta = z + a' \cos z + a'' \cos 2z + a''' \cos 3z + \ldots + b' \sin z + b'' \sin 2z + b''' \sin 3z \ldots - (180^0 + N) + a' - a'' + a''' - \ldots$$

$$\zeta = z' - a' \cos z + a'' \cos 2z - a''' \cos 3z + \ldots - b' \sin z + b'' \sin 2z - b''' \sin 3z \ldots - (180^0 + N') - a' - a'' - a''' - \ldots$$

Das Mittel aus beiden Gleichungen giebt daher, wenn man die Zenithpunkte $180^0 + N$ und $180^0 + N'$ mit Z und Z' bezeichnet:

$$\zeta = \frac{z - Z + z' - Z'}{2} + a'' \cos 2z \ldots + b'' \sin 2z - \ldots - a'' - \ldots$$

oder das Mittel der Zenithdistanzen in beiden Lagen ist von den ungeraden Gliedern der Biegung völlig frei und nur noch mit den geraden Gliedern behaftet, wenn solche vorhanden sind.

Ferner giebt die Differenz der beiden Gleichungen:

$$0^0 = \frac{z' - Z' - (z - Z)}{2} - a' \cos z - a''' \cos 3z - \ldots - b' \sin z \ldots - b''' \sin 3z - \ldots - a' - a''' - \ldots,$$

sodafs man also auf diese Weise durch Beobachtung von Sternen in verschiedenen Zenithdistanzen oder eines in verschiedenen Zenithdistanzen aufgestellten Collimators die ungeraden Glieder der Biegung bestimmen kann.

Diese erhält man überhaupt immer, wenn man das Fernrohr in zwei genau um 180^0 verschiedene Lagen bringt. Stellt man zu dem Ende zwei Collimatoren so auf, dafs deren Axen durch die Mitte der Axe des Instruments gehen und richtet dieselben durch Oeffnungen, welche zu dem Ende in dem Würfel der Axe des Instruments angebracht werden, so auf einander, dafs ihre Fadenkreuze zusammenfallen, so beschreibt das Fernrohr, wenn man dasselbe zuerst auf den einen, dann auf den anderen Collimator richtet, genau 180^0 und wenn man daher den Kreis in beiden Lagen abliest und die wahre Zenithdistanz des Collimators ζ ist, so ist in der einen Lage:

$$\zeta = z + a' \cos z + a'' \cos 2z + a''' \cos 3z + \ldots + b' \sin z + b'' \sin 2z + b''' \sin 3z + \ldots - Z + a' - a'' + a'''$$

und in der andern

$$180 + \zeta = z' - a' \cos z + a'' \cos 2z - a''' \cos 3z + \ldots - b' \sin z + b'' \sin 2z - b''' \sin 3z + \ldots - Z + a' - a'' + a''',$$

also:

$$0 = \frac{z' - z - 180}{2} - a' \cos z - a''' \cos 3z - \ldots - b' \sin z - b''' \sin 3z - \ldots$$

und da man bei diesen Beobachtungen beide Mal dieselben Striche nur bei verschiedenen Mikroskopen benutzt, so sind diese Gleichungen für die ungeraden Glieder der Biegung von den Theilungsfehlern ganz unabhängig. Macht man die Beobachtungen für verschiedene z, also in verschiedenen Neigungen des Fernrohrs, so erhält man eine Anzahl solcher Gleichungen, aus denen man die wahrscheinlichsten Werthe der Coefficienten bestimmen kann.

In der horizontalen Lage des Fernrohrs haben diese Beobachtungen keine Schwierigkeiten, bei beträchtlicher Neigung des Fernrohrs würde aber der eine der Collimatoren sehr hoch zu stehen kommen und es könnte daher die feste Aufstellung desselben Schwierigkeiten haben. Man kann aber statt dieses Collimators einen Planspiegel anwenden, den man in einiger Entfernung vor dem Objective des Fernrohrs aufstellt oder am besten an einem Arme so an einem der Pfeiler in der Verlängerung der Axe des Instrumentes befestigt, dafs man denselben durch Drehen des Arms leicht in eine beliebige Lage bringen kann *). Befestigt man dann aufserhalb des Oculars des Collimators eine Glasplatte unter einem Winkel von 45° **), durch welche man Licht in das Fernrohr reflectirt, und die man, wenn man sie nicht benutzt, zurückschlagen kann, so wird man, wenn man das Fernrohr nahe senkrecht auf den Spiegel richtet und durch das Planglas hindurch in das Fernrohr sieht, nicht allein die Fäden auf

*) Der Spiegel mufs so gestellt werden können, dafs eine horizontale Linie in seiner Ebene senkrecht auf der Axe des Fernrohrs ist.

**) Dies Glas mufs so befestigt sein, dafs man die Neigung gegen das Ocular ändern und dasselbe um die Axe des Fernrohrs drehen kann, damit man immer das Licht gehörig auf den Spiegel reflectiren kann. Auch ist es besser, wenn man zu dem Zwecke ein Ocular mit nur einer Linse anwendet, weil man dann das reflectirte Bild deutlicher sieht.

hellem Grunde, sondern auch die von dem Planspiegel reflectirten Bilder derselben sehen, und man kann daher dadurch, daſs man Bilder und Fäden zur Coincidenz bringt, den Collimator senkrecht auf den Spiegel stellen. Stellt man durch dieselbe Methode das Fernrohr des Instruments senkrecht auf den unverrückt gebliebenen Spiegel und stellt dasselbe nachher auf den Collimator ein, so durchläuft dasselbe genau 180° und man kann daher durch Ablesung des Kreises in beiden Stellungen wie vorher die ungeraden Glieder der Biegung finden. Diese Beobachtungen werden am Besten in einem dunklen Zimmer angestellt, indem man das Licht von einer Lampe ins Fernrohr reflectirt, und die einzige Schwierigkeit ist die Herstellung eines Planspiegels, der starke Vergröſserungen erträgt. Da aber der Spiegel nur von der Gröſse der Oeffnung des Collimators zu sein braucht und derselbe immer nur für senkrechte Reflexion angewandt wird, so wird die Herstellung eines solchen Spiegels nicht unmöglich sein.

Die Cosinusglieder der Biegung kann man auch durch Beobachtung der Zenithdistanz eines Objects in beiden Lagen des Kreises bestimmen, wozu man sich eines Collimators oder besser des Spiegels bedient, den man in verschiedene Lagen bringt, und auf welchen das Fernrohr senkrecht gestellt wird. Aus der ersten und dritten der Gleichungen (B) folgt nämlich:

$$180^0 = \frac{z - Z + z'' - Z'}{2} + a' \cos z + a'' \cos 2z + a''' \cos 3z + \ldots + a' - a'' + a''',$$

wo $Z = 180 + N$, $Z' = 180 + N'$ und z und z'' die in beiden Lagen gemachten Ablesungen, wegen der Theilungsfehler corrigirt, bezeichnen.

Es lassen sich mithin alle Glieder durch einfache Beobachtungen leicht bestimmen bis auf die geraden Sinusglieder. Um diese zu bestimmen, müſste man Mittel haben, das Fernrohr genau um bestimmte Winkel zu bewegen, die nicht 90° oder 180° sein müssen. Eine Vorrichtung, welche die Bewegung um einen beliebigen Winkel möglich macht, ist bis jetzt nicht bekannt, indessen kann man durch den vorher beschriebenen Spiegel und zwei Collimatoren das Fernrohr auf die Zenithdistanz von 45° richten, was die Bestimmung der von dem doppelten Winkel abhängigen Sinusglieder möglich macht. Man stelle zu dem Ende den Spiegel so, daſs,

wenn das Fernrohr senkrecht darauf gestellt wird, es nahe 45° von dem Nadir entfernt ist und stelle in dieser Lage des Spiegels ein Fernrohr vertical über dem Spiegel und einen Collimator horizontal davor auf, so dafs die Axen der beiden Fernröhre nach der Mitte des Spiegels gerichtet sind, was man leicht dadurch erreicht, dafs man die Objective bis auf eine sehr kleine Oeffnung in der Mitte bedeckt und ebenso den Spiegel bis auf einen kleinen Kreis um den Mittelpunkt und die Fernröhre so lange verrückt, bis das Licht von dem unbedeckten Theile des Spiegels in die Oeffnungen des Objectivs reflectirt wird. Nachdem dies geschehen, dreht man den Spiegel fort und stellt die Collimationslinie des verticalen Fernrohrs genau vertical mittelst eines darunter gestellten künstlichen Horizonts, den Collimator dagegen genau horizontal durch ein Niveau, nachdem man sich davon überzeugt hat, dafs die Collimationslinie desselben mit der Umdrehungsaxe zusammenfällt. In dem Falle machen die Collimationslinien der beiden Fernröhre einen rechten Winkel. Dreht man dann den Spiegel zu seiner früheren Stellung zurück, so giebt es eine Stellung desselben, bei welcher die von dem Fadenkreuze des einen Collimators auffallenden Strahlen auf das andre reflectirt werden und wenn dies der Fall ist, macht der Spiegel einen Winkel von 45° mit der Verticallinie. Richtet man dann das Fernrohr senkrecht auf den Spiegel und nachher senkrecht auf den Nadirhorizont, so bewegt man das Fernrohr genau um 45 Grade. Nur ist auch hier in aller Strenge eine kleine Correction anzubringen, wegen der verschiedenen Polhöhen in denen sich die Collimatoren befinden. Ist y der Winkel, den der verticale Collimator mit der Verticallinie des Instruments macht, x dagegen der Winkel, welchen der horizontale Collimator mit dem Horizonte des Instruments macht, so ist der Winkel, welchen das auf dem Spiegel senkrechte Fernrohr mit der Richtung nach dem Nadir macht:

$$45^0 + \tfrac{1}{2}(x - y),$$

wenn die beiden Collimatoren auf verschiedenen Seiten der Axe des Instruments aufgestellt sind, oder wenn h und h' die Entfernung des horizontalen und verticalen Collimators von der Verticallinie des Instruments ist, und wenn aufserdem b

die am Niveau bestimmte Neigung des horizontalen Collimators ist, positiv, wenn das dem Instrumente nähere Ende das höhere ist, so ist der Winkel gleich:

$$45^\circ + 0''.0052\,(h - h') + \tfrac{1}{2}\,b.$$

Bezeichnet man diesen Winkel mit ζ, dagegen die Ablesung am Kreise für den Nadirpunkt und für die Richtung senkrecht auf den Spiegel, also für die Zenithdistanz 180° und 135° mit z' und z so ist:

$$\zeta = z' - z - a'\,(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) + a'' - a'''\,(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - b'\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + b'' - b'''\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Macht man dieselbe Beobachtung auch für 225° Zenithdistanz, und ist z' wieder der Nadirpunkt, z'' die Ablesung, wenn das Fernrohr senkrecht auf den Spiegel gerichtet ist, so ist in dem Falle:

$$\zeta' = z'' - z' + a'(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - a'' + a'''\,(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - b'\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + b'' - b'''\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

mithin ist:

$$\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') = \frac{z'' - z}{2} - b'\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + b'' - b'''\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ldots,$$

vorausgesetzt, daſs der Nadirpunkt bei beiden Beobachtungen derselbe war.

E. Von der Untersuchung der Fehler der Mikrometerschrauben.

9. Die Messung der Entfernung zweier Punkte mittelst einer Mikrometerschraube setzt voraus, daſs das lineare Fortrücken der Schraube und des mittelst derselben bewegten Theiles des Mikrometerapparats z. B. des Mikrometerfadens den Angaben des Schraubenkopfs und der Scale, welche die ganzen Umdrehungen der Schraube angiebt, proportional ist. Diese Bedingung ist aber nie strenge erfüllt, indem theils die Windungen einer Schraube an verschiedenen Stellen derselben nicht von gleicher Gröſse sind und daher ein ungleiches Fortrücken durch eine ganze Umdrehung der Schraube bewirken, theils auch gleiche Theile derselben Umdrehung einer verschiedenen linearen Fortbewegung entsprechen. Im Vorigen war schon angegeben, wie man die Ungleichheiten der Schrauben der Ablesungsmikroskope bestimmen kann, in welchem Falle man indeſs immer nur von wenigen, gewöhnlich nur zwei Umdrehungen der Schraube Gebrauch macht. Es soll daher hier noch der Fall behandelt werden, wo man

die Umdrehungen der Schraube ihrer ganzen Länge nach zu Messungen benutzt.

Die Gröſsen, die man den Theilen einer einzelnen Umdrehung der Schraube hinzuzufügen hat, um daraus die wahre Fortbewegung der Schraube zu erhalten, kann man sich wieder durch eine periodische Function der Angabe des Schraubenkopfes dargestellt denken, sodaſs, wenn u die am Schraubenkopfe gemachte Ablesung bezeichnet, die daran anzubringende Correction von der Form:

$$a_1 \cos u + b_1 \sin u + a_2 \cos 2u + b_2 \sin 2u + \ldots$$

ist. Diese Unregelmäſsigkeiten werden sich bei den einzelnen Schraubengängen nahe wiederholen, sodaſs man die Coefficienten a_1, b_1 etc. für die verschiedenen Schraubengänge als gleich ansehen kann. Man wird diese Annahme wenigstens für mehrere auf einander folgende Schraubengänge machen können und die Coefficienten aus dem Mittel der bei mehreren solchen Schraubengängen gemachten Beobachtungen bestimmen und dann diese Bestimmung für verschiedene Theile der Schraube wiederholen.

Miſst man nun eine lineare Entfernung, deren wahrer Werth gleich f sein soll (z. B. die Entfernung der Fäden eines Collimators), mittelst Einstellung des Mikrometerfadens auf die beiden Endpunkte des Objects, so hat man, wenn u und u' die Angaben der Schraube für den Anfang und das Ende sind:

$$f = u' - u + a_1 (\cos u' - \cos u) + b_1 (\sin u' - \sin u) + a_2 (\cos 2u' - \cos 2u) + b_2 (\sin 2u' - \sin 2u) + \ldots$$

Miſst man nun dieselbe Entfernung von verschiedenen Stellungen der Schraube aus, indem man zuerst mit der Stellung $0^r.00$ anfängt (d. h. die Beobachtung so einrichtet, daſs man am Schraubenkopfe $0^r.00$ abliest, wenn der Mikrometerfaden den Anfangspunkt des Objects deckt) dann von $0^r.10$, $0^r.20$, und so fort für jeden Zehntheil durch die ganze Umdrehung der Schraube, so kann man annehmen, wenn die Coefficienten a_1, b_1, etc. wie es immer der Fall ist, klein sind, daſs f gleich dem Mittel aller beobachteten Werthe von $u - u'$ ist, ebenso kann man sich auch erlauben $u + f$ statt u' zu setzen. Bezeichnet dann f dieses Mittel, so giebt jeder beobachtete Werth von $u' - u$ die Gleichung:

$$u' - u - f = 2a_1 \sin\tfrac{1}{2}f \sin(u + \tfrac{1}{2}f) - 2b_1 \sin\tfrac{1}{2}f \cos(u + \tfrac{1}{2}f)$$
$$+ 2a_2 \sin f \sin(2u + f) - 2b_2 \sin f \cos(2u + f)$$
$$\ldots\ldots$$

und man erhält dann aus allen 10 Gleichungen dieser Beobachtungsreihe, da die Werthe von u die ganze Peripherie durchlaufen:

$$10\, a_1 \sin\tfrac{1}{2}f = \Sigma(u' - u - f) \sin(u + \tfrac{1}{2}f)$$
$$10\, b_1 \sin\tfrac{1}{2}f = -\Sigma(u' - u - f) \cos(u + \tfrac{1}{2}f)$$
$$10\, a_2 \sin f = \Sigma(u' - u - f) \sin(2u + f)$$
$$10\, b_2 \sin f = -\Sigma(u' - u - f) \cos(2u + f),$$

aus welchen Gleichungen man die Werthe der Coefficienten bestimmen kann.

Bessel beobachtete z. B. am Königsberger Heliometer mittelst der Mikrometerschraube die Länge eines Zwischenraums, nahe gleich einer halben Umdrehung der Schraube, von verschiedenen Anfangspunkten der Schraube aus und fand im Mittel aus den Beobachtungen für 10 einzelne Umgänge der Schraube *):

	Gemessener Zwischenraum $u' - u$
Anfang 0 Zehntheile	0r. 50045
1	0 . 49690
2	0 . 49440
3	0 . 49240
4	0 . 49260
5	0 . 49555
6	0 . 49905
7	0 . 50140
8	0 . 50340
9	0 . 50350
	$f = 0 . 497965 = 179^\circ\ 16'.0.$

Daraus erhält man z. B.:

$u' - u - f$	$(u' - u - f) \sin(u + \frac{1}{2}f)$
+ 0 . 002485	+ 0 . 002485
— 0 . 001065	— 0 . 000865
— 0 . 003565	— 0 . 001123
— 0 . 005565	+ 0 . 001686
— 0 . 005365	+ 0 . 004320
— 0 . 002415	+ 0 . 002415
+ 0 . 001085	— 0 . 000882
+ 0 . 003435	— 0 . 001083
+ 0 . 005435	+ 0 . 001646
+ 0 . 005535	+ 0 . 004457
	Summe + 0 . 013056.

*) Astronomische Untersuchungen Bd. 1, pag. 79.

Danach wird, da $\sin \frac{1}{2} f = 1$ ist:

$$10\, a_1 = +0.013056$$

Ebenso: $$10\, b_1 = -0.024874$$

$$0.128\, a_2 = +0.000147$$

$$0.128\, b_2 = +0.000337.$$

Bessel machte dann eine ähnliche Beobachtungsreihe, indem er eine Entfernung nahe gleich einem Viertel der Umdrehung der Schraube maafs, und fand:

$$7.339\, a_1 = +0.015915$$
$$7.339\, b_1 = -0.016126$$
$$9.970\, a_2 = -0.004987$$
$$9.970\, b_2 = -0.000576,$$

woraus durch die Verbindung der beiden Bestimmungen nach No. 24 der Einleitung Anm. 2 folgt:

$$a_1 = +0^r.001608$$
$$b_1 = -0.002386$$
$$a_2 = -0.000499$$
$$b_2 = -0.000057.$$

Diese periodischen Ausgleichungen der Schraube mufs man dann an alle Ablesungen des Schraubenkopfes anbringen. Man kann aber auch die Beobachtungen so anordnen, dafs man dadurch diese periodischen Glieder ganz eliminirt. Mifst man nämlich eine Entfernung, wenn die Schraube zu Anfang die Stellung $-0^r.25$, dann aber auch, wenn diese Stellung $+0^r.25$ ist, sodafs also u bei beiden Beobachtungen -90^0 und $+90^0$ wird, so heben in den beiden Ausdrücken für f die in den Sinus und Cosinus der einfachen Winkel multiplicirten Glieder einander auf, sodafs also das Mittel aus beiden Beobachtungen frei von diesen Gliedern wird. Ebenso erhält man f von diesen sowohl als den vom zweifachen Winkel abhängenden Gliedern frei, wenn man die Messung fünfmal wiederholt, indem man nach einander von den Stellungen der Schraube $-0^r.4$, $-0^r.2$, 0, $+0^r.2$ und $+0^r.4$ ausgeht.

Um nun die Gleichheit der Schraubengänge zu prüfen, kann man dieselbe Entfernung, die nahe gleich einem Schraubenumgange oder einem Vielfachen eines Schraubenumgangs ist, an verschiedenen Stellen der Schraube messen und man wird am besten thun, diese Beobachtungen nach dem Vori-

gen so anzuordnen, dafs die periodischen Ungleichheiten der Schraube eliminirt werden.

Bessel maafs mit derselben Schraube eine Entfernung, die nahe gleich zehn Umdrehungen der Schraube war, indem er nach einander von den Stellungen der Scale der Schraube 0^r, 10^r, 20^r, etc. ausging. Auf diese Weise fand er:

Anfang der Schraube 0ʳ	10.0142
10	20.0147
20	30.0131
30	40.0122
40	50.0107

etc.,

wo jede Zahl das Mittel aus 5 Messungen ist, die zweite z. B. bei den Stellungen der Schraube $9^r.6$, $9^r.8$, 10, 10.2 und 10.4. Ist dann die wahre Entfernung $10^r + x_1$ und sind die Ausgleichungen der Schraube für die Stellungen 10, 20, etc. f_{10}, f_{20}, etc. so hat man, da man $f_0 = 0$ nehmen kann*):

$$x_1 = +0.0142 + f_{10}$$
$$x_1 = +0.0147 + f_{20} - f_{10}$$
$$x_1 = +0.0131 + f_{30} - f_{20}$$
etc.,

Ebenso maafs er auch eine Entfernung, die gleich $20^r + x_2$ war, indem er wieder von verschiedenen Stellungen der Schraube ausging, und erhielt dadurch ein System von Gleichungen:

$$x_2 = a + f_{20}$$
$$x_2 = a + f_{40} - f_{20}$$
etc.

Aehnliche Systeme erhielt er dann auch, indem er Entfernungen gleich $30^r + x_3$ etc. maafs und aus allen diesen Gleichungen wurden dann die Werthe von x_1, x_2, x_3 etc., sowohl als auch die Ausgleichungen der Schraube in den Stellungen 10, 20 etc. oder f_{10}, f_{20}, etc. bestimmt.

---

*) Ebenso wie f_0 willkührlich ist, also gleich Null angenommen werden kann, so ist dies auch mit der Ausgleichung des letzten Scalentheils, welchen man benutzt, der Fall.

II. Das Azimutal- und Höheninstrument.

10. Bei dem Azimutalinstrument stellt der eine der beiden Kreise die Ebene des Horizonts vor und soll daher genau horizontal liegen. Er ruht deshalb auf drei Schrauben, durch welche man seine Lage gegen den wahren Horizont vermittelst eines Niveau's, wie man nachher sehen wird, berichtigen kann. Da indessen diese Berichtigung selten ganz genau geschehen wird, so wird immer noch eine kleine Neigung des Kreises gegen den Horizont vorhanden sein. Es sei daher P der Pol dieses Kreises des Instruments, während der Pol des wahren Horizonts das Zenith Z ist und es sei i der Winkel, welchen die Ebene des Kreises mit der Ebene des Horizonts macht oder der Bogen des gröfsten Kreises zwischen P und Z. Durch den Mittelpunkt dieses, in Grade und deren Unterabtheilungen getheilten, horizontalen Kreises des Instruments geht nun ein Zapfen, welcher die Nonien trägt, die in der Regel auf einem vollen, mit dem ersteren concentrischen Kreise angebracht sind. Der Nonienkreis trägt zwei Stützen, welche möglichst gleich sind, und die an ihrem oberen Ende Pfannenlager haben, von denen man das eine vermittelst einer Schraube höher und niedriger stellen kann. In diesen Lagern liegt nun die horizontale Axe, welche das Fernrohr und den Höhenkreis trägt. Der Nonienkreis ist fest mit dem Lager verbunden, dagegen läfst sich das Fernrohr zugleich mit dem, dem ersteren Kreise concentrischen Höhenkreise um die Axe bewegen. Da man nun auch den Nonienkreis des Azimutalkreises um seine Axe bewegen kann, so kann man das Fernrohr auf jedes beliebige Object einstellen und die demselben entsprechenden sphärischen Coordinaten an den Kreisen des Instruments ablesen. Der Winkel, welchen die Linie durch die beiden Zapfenlager mit dem horizontalen Nonienkreis macht, sei nun i' und es sei K der Punkt, in welchem diese Linie nach der Seite des Kreisendes zu die scheinbare Himmelskugel trifft, ferner sei b die Höhe dieses Punktes über dem wahren Horizonte. Da man nun mit dem Instrumente immer nur Azimutalunterschiede mifst (wenn man für jetzt noch die Ablesungen an dem Höhen-

kreise aufser Acht läfst), so wird es gleichgültig sein, wo man die Azimute auf dem Instrumente zu zählen anfängt. Es wird aber bequem sein, den Anfangspunkt derselben so anzunehmen, dafs er Bezug auf das Instrument hat und da nun P und Z sich nicht ändern, so lange man das Instrument nicht verrückt, K dagegen volle 360° durchlaufen kann, wenn man den Nonienkreis um seine Axe bewegt, so kann man als Anfangspunkt der Zählung der Azimute auf dem Instrumente diejenige Ablesung nehmen, welche man macht, wenn K mit P uud Z in einem Verticalkreise liegt. Diese Ablesung sei a_0. Für jede andre Ablesung nimmt man dann immer denjenigen Punkt der Theilung, in welchem der verlängerte Bogen PK die Ebene des Kreises trifft und dies wird immer erlaubt sein, weil dieser Punkt von den durch die Nonien angegebenen Punkten immer nur um einen constanten Winkel verschieden ist. Endlich soll mit A das auf dem wahren Horizonte, aber von demselben Anfangspunkte gezählte Azimut bezeichnet werden.

Denkt man sich nun drei auf einander senkrechte Coordinatenaxen, von denen eine senkrecht auf der Ebene des wahren Horizonts ist, die beiden andern aber in der Ebene desselben liegen und zwar so, dafs die Axe der y nach dem Punkte gerichtet ist, von welchem aus die Azimute nach der vorher gemachten Annahme gezählt werden, so sind die drei Coordinaten des Punktes K auf diese Axen bezogen:

$$z = \sin b,\ \ y = \cos b \cos A$$

und

$$x = \cos b \sin A.$$

Ferner sind die Coordinaten von K, bezogen auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen, von denen eine senkrecht auf der horizontalen Ebene des Instruments steht, während die beiden andern in dieser horizontalen Ebene liegen und zwar so, dafs die Axe der x mit derselben Axe im vorigen System zusammenfällt:

$$z = \sin i',\ y = \cos i' \cos (a - a_0),\ x = \cos i' \sin (a - a_0).$$

Da nun die Axe der z im ersten System mit der Axe der z des andern Systems den Winkel i macht, so hat man nach der Formel (1) für die Transformation der Coordinaten:

$$\begin{aligned} \sin b &= \cos i \sin i' - \sin i \cos i' \cos (a - a_0) \\ \cos b \sin A &= \cos i' \sin (a - a_0) \\ \cos b \cos A &= \sin i \sin i' + \cos i \cos i' \cos (a - a_0). \end{aligned}$$

Man erhält diese Gleichungen auch durch die Betrachtung des Dreiecks zwischen dem Zenith Z, dem Pole des Azimutalkreises P und dem Punkte K, dessen Seiten PZ, PK und ZK bezichlich i, $90^0 - i'$ und $90^0 - b$ sind, während die den Seiten PK und ZK gegenüberstehenden Winkel A und $180^0 - (a - a_0)$ sind.

Da nun b, i und i', wenn das Instrument nahe berichtigt ist, kleine Gröfsen sind, so wird es erlaubt sein, die Cosinus dieser Winkel gleich Eins zu setzen und die Sinus mit den Bogen zu vertauschen, sodafs man erhält:

$$b = i' - i \cos(a - a_0) \qquad (a)$$
$$A = a - a_0.$$

Das Fernrohr ist nun senkrecht auf der horizontalen Axe des Instruments befestigt. Die Gesichtslinie desselben sollte ebenfalls senkrecht auf dieser Axe sein, es soll indessen vorausgesetzt werden, dafs dies nicht der Fall ist, sondern dafs dieselbe mit der Seite der Axe nach dem Kreisende zu den Winkel $90^0 + c$ macht, wo der kleine Winkel c der Collimationsfehler genannt wird. Diese Gesichtslinie wird bezeichnet durch die Linien von der Mitte des Objectivs nach einem im Brennpunkte des Fernrohrs befindlichen Fadenkreuze, welches sich vermittelst Schrauben senkrecht gegen die Gesichtslinie verschieben läfst, sodafs man den Winkel c beliebig ändern kann.

Es sei nun das Fernrohr nach einem Punkte O des Himmels gerichtet, dessen Zenithdistanz z und dessen Azimut e ist. Dann sind die Coordinaten desselben bezogen auf die Axen der z und y nach I No. 2: $\cos z$ und $\sin z \cos e$. Nun gehe die Theilung auf dem Kreise von der Linken zur Rechten, d. h. in derselben Richtung, in welcher man die Azimute im Horizonte herum zählt. Ist also das Kreisende links, so zeigt das Fernrohr nach einem Punkte, dessen Azimut gröfser ist als das des Punktes K, und wenn man also die Axe der y nach dem Punkte gedreht denkt, wo sie in einem Verticalkreise mit K liegt, so werden dann die Coordinaten: $\cos z$ und $\sin z \cos(e - A)$. Dies gilt für Kreis links, während man für Kreis rechts $A - e$ statt $e - A$ nehmen mufs. Denkt man sich nun den Punkt O auch auf ein Coordinatensystem bezogen, von dem die Axen der x und y in

der Ebene des Instruments liegen und wo die Axe der y nach dem Punkte K gerichtet ist, so ist die Coordinate y des Punktes O gleich $-\sin c$, und da die Axen der z in beiden Systemen den Winkel b mit einander bilden, so hat man nach den Formeln für die Transformation der Coordinaten:

$$-\sin c = \cos z \sin b + \sin z \cos b \cos (e - A).$$

Man erhält diese Gleichung auch durch die Betrachtung des Dreiecks zwischen dem Zenith Z, dem Punkte K und dem Punkte O, auf den die Gesichtslinie des Fernrohrs gerichtet ist, indem die Seiten ZO, ZK und OK beziehlich gleich z, $90^0 - b$ und $90^0 + c$ sind und der Winkel $KZO = PZO - PZK = e - A$ ist.

Da nun b und c kleine Gröſsen sind, so erhält man:

$$-c = b \cos z + \sin z \cos (e - A),$$

oder endlich, wenn man für A seinen vorher gefundenen Werth aus den Gleichungen (a) setzt:

$$0 = c + b \cos z + \sin z \cos [e - (a - a_0)].$$

Daraus folgt, daſs

$$\cos [e - (a - a_0)]$$

eine sehr kleine Gröſse von der Ordnung der Gröſsen b und c ist. Schreibt man also dafür:

$$\sin [90^0 - e + (a - a_0)],$$

so kann man den Sinus mit dem Bogen vertauschen und man erhält:

$$0 = c + b \cos z + \sin z [90^0 - e + (a - a_0)].$$

Diese Formel gilt, wie schon oben bemerkt ist, für Kreisende links. Wäre das Kreisende rechts, so hätte man $A - e$ statt $e - A$ nehmen müssen und dann erhalten:

$$0 = c + b \cos z + \sin z [90^0 - (a - a_0) + e].$$

Man erhält daher das wahre Azimut e durch die Formeln:

$$e = a - a_0 + 90^0 + \frac{c}{\sin z} + b \operatorname{cotang} z \quad \text{für Kreis links}$$

und

$$e = a - a_0 - 90^0 - \frac{c}{\sin z} - b \operatorname{cotang} z \quad \text{für Kreis rechts,}$$

oder, wenn man A das an den Nonien des Instruments abgelesene Azimut und ΔA den Indexfehler der Nonien nennt, sodaſs $A + \Delta A$ das vom Meridianpunkte des Kreises auf demselben gezählte Azimut ist:

$$e = A + \Delta A \pm c \operatorname{cosec} z \pm b \operatorname{cotang} z,$$

wo das obere Zeichen wieder für Kreis links, das untere für Kreis rechts gilt.

11. Man kann diese Formeln einfach geometrisch ableiten. Es sei Fig. 14 der Horizont in der Ebene des Papiers, dann wird der Verticalkreis, in welchem das Object liegt, durch eine gerade Linie vorgestellt werden, in deren Mitte das Zenith Z liegt. Nimmt man nun an, dafs sich das Fernrohr um eine Axe bewegt, welche um b gegen den Horizont geneigt ist, so wird dasselbe jetzt einen gröfsten Kreis beschreiben, welcher zwar noch durch die Punkte A und B des Horizonts geht, aber um den Bogen b vom Zenith absteht. Nimmt man nun an, dafs man das Azimut des Verticalkreises AZ abliest, so wird das mit dem Fehler der Neigung behaftete Fernrohr nach O zeigen, also wird man, wenn das Fernrohr rechts oder der Kreis links ist, ein zu kleines Azimut ablesen und man wird haben:

Fig. 14.

B P Z' Z O O' A

$$\sin O O' = \sin A O \sin b$$
$$= \cos z \,.\, \sin b.$$

Man liest nun aber einen Azimutalwinkel ab, d. h. den Winkel, unter welchem OO' von Z aus erscheint, mithin ist der Winkel OZO' die gesuchte Correction ΔA des Azimuts und da

$$\sin O O' = \sin Z O \sin \Delta A,$$

also

$$\sin \Delta A = \text{cotang}\, z \sin b,$$

so hat man also bei Kreisende links zum abgelesenen Azimute die Correction wegen der Neigung b hinzuzufügen:

$$+ b \text{ cotang } z.$$

Fig. 15.

B Z O' O A

Ebenso kann man nun auch die durch den Collimationsfehler hervorgebrachte Correction des Azimuts finden. Es sei wieder AB der Verticalkreis, welchen die Gesichtslinie des Fernrohrs beschreiben würde, wenn der Collimationsfehler Null wäre. Ist aber $90 + c$ der Winkel, welchen die Gesichtslinie mit der Seite der Axe nach dem Kreisende zu macht, so beschreibt die Gesichtslinie bei der Umdrehung um die Axe einen Kegel, welcher auf der scheinbaren Himmelskugel einen kleinen

Kreis abschneidet, dessen Abstand vom gröfsten Kreise AB gleich c ist. Fig. 15. Dann liest man wieder bei Kreisende links ein zu kleines Azimut ab und wenn man wieder den Winkel AZO mit ΔA bezeichnet, so ist:

$$\sin \Delta A = \frac{\sin c}{\sin z}$$

oder:

$$\Delta A = + c \operatorname{cosec} z.$$

12. Es soll nun gezeigt werden, wie man die Gröfse der einzelnen Fehler des Instruments bestimmt, damit man ein jedes an einem solchen Instrument beobachtetes Azimut vermittelst der vorher gegebenen Formeln auf das wahre Azimut reduciren kann.

Den Fehler b findet man unmittelbar nach den in No. 1 dieses Abschnitts gegebenen Vorschriften, indem man ein Niveau auf die Zapfen der horizontal liegenden Axe des Instruments aufsetzt. Es war aber nach den Gleichungen (a) in No. 10:

$$b = i' - i \cos (a - a_0),$$

wo i die Neigung der Ebene des Horizontalkreises gegen den Horizont, i' dagegen die Neigung der horizontalen, das Fernrohr tragenden Axe gegen den Horizontalkreis ist. Diese Gleichung enthält drei Unbekannte, nämlich i', i und a_0, zu deren Bestimmung daher drei Nivellirungen in verschiedenen Stellungen der Axe gemacht werden müssen. Man nehme an, dafs man das Instrument auf einen beliebigen Werth a bei irgend einem Nonius eingestellt, und dafs man in dieser Lage die Neigung der Umdrehungsaxe b gefunden hat. Dann stelle man nach einander auf $a + 120''$ und $a + 240''$ ein und es seien b_1 und b_2 die Neigungen, welche man in diesen beiden Lagen beobachtet. Substituirt man nun diese Werthe in die obige Formel, löst die Cosinus auf und bedenkt, dafs:

$$\cos 120^0 = -\tfrac{1}{2}$$

und

$$\sin 120^0 = +\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

ferner:

$$\cos 240^0 = -\tfrac{1}{2}$$

und

$$\sin 240^0 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

so erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$b = i' - i\cos(a - a_0)$$
$$b_1 = i' + \tfrac{1}{2}\, i\cos(a - a_0) + \tfrac{1}{2}\, i\sin(a - a_0)\sqrt{3}$$
$$b_2 = i' + \tfrac{1}{2}\, i\cos(a - a_0) - \tfrac{1}{2}\, i\sin(a - a_0)\sqrt{3}.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so findet man:

$$i' = \frac{b + b_1 + b_2}{3}.$$

Zieht man aber die dritte Gleichung von der zweiten ab, so wird:

$$i\sin(a - a_0) = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{3}}$$

und, wenn man die zweite und dritte Gleichung addirt und davon die doppelte erste Gleichung abzieht:

$$i\cos(a - a_0) = \frac{b_1 + b_2 - 2b}{3}.$$

Nivellirt man also die horizontale Axe in drei Stellungen, welche die Peripherie in gleiche Theile theilen, so kann man durch diese Formeln die Gröſsen i, i' und a_0 und damit die Neigung b für jede andere Einstellung nach der Formel:

$$b = i' - i\cos(a - a_0)$$

finden.

Um nun den Collimationsfehler zu finden, beobachtet man dasselbe entfernte irdische Object sowohl bei Kreis rechts als auch bei Kreis links und liest beide Mal das Azimut ab. Ist a die Ablesung bei Kreis links, a' die bei Kreis rechts gemachte Ablesung, so hat man die beiden Gleichungen:

$$e = A + \Delta A + b \text{ cotang } z + c \text{ cosec } z$$
$$e = A' + \Delta A - b' \text{ cotang } z - c \text{ cosec } z,$$

aus denen man erhält:

$$c \text{ cosec } z = \frac{A' - A}{2} - \frac{b' + b}{2} \text{ cotang } z.$$

Kennt man also die Neigungen b und b' in beiden Lagen und liest man am Höhenkreise die Zenithdistanz z des Objects ab, so kann man durch Beobachtung desselben Objects bei verschiedenen Lagen des Kreises den Collimationsfehler finden.

Hierbei ist aber vorausgesetzt, daſs sich das Fernrohr im Mittelpunkte der Theilung befindet oder daſs man, wenn dasselbe an dem einen Ende der Axe angebracht ist, ein unendlich entferntes Object beobachtet hat. Ist dies nun aber

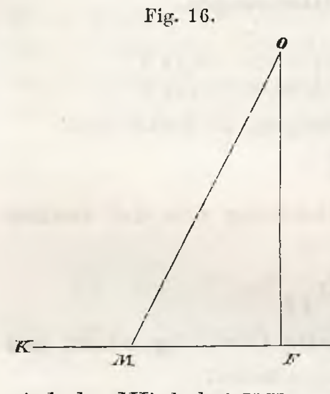


Fig. 16.

nicht der Fall, so mufs man an den gefundenen Collimationsfehler noch eine Correction anbringen. Wenn man nämlich ein Object O Fig. 16 mit dem Fernrohr, welches sich an dem Ende F der Axe befindet, beobachtet, so steht dies in der Richtung OF. Der Winkel OFK sei $90^0 + c_0$. Denkt man sich nun im Mittelpunkte des Kreises M ein Fernrohr nach O hin gerichtet, so wird der Winkel OMK nach dem Vorigen gleich $90^0 + c$ sein. Ist O unendlich weit entfernt, sodafs MO parallel OF wird, so wird man $90^0 + c_0$ statt $90^0 + c$ setzen können; ist dies aber nicht der Fall, so wird man haben:

$$c = c_0 + MOF.$$

Da nun aber, wenn c_0 sehr klein ist,

$$\text{tang}\, MOF = \frac{\varrho}{d}$$

ist, wenn man die Entfernung OM des Objects mit d und die halbe Axe des Instruments mit ϱ bezeichnet, so ist:

$$c = c_0 + \frac{\varrho}{d}.$$

Ist also das Fernrohr an einem Ende der Axe und liest man das Azimut des Objects bei Kreis links ab, so wird man dasselbe um den Winkel $\frac{\varrho}{d}$ zu klein, bei Kreis rechts daher um denselben Winkel zu grofs erhalten. Bezeichnet man daher die erste Ablesung mit A, den Collimationsfehler mit c_0, so hat man die zwei Gleichungen:

$$e = A + \Delta A + b \,\text{cotang}\, z + \left(c_0 + \frac{\varrho}{d}\right) \text{cosec}\, z$$

$$e = A' + \Delta A - b' \,\text{cotang}\, z - \left(c_0 + \frac{\varrho}{d}\right) \text{cosec}\, z,$$

aus denen man, wenn d anderweitig bekannt ist, den Collimationsfehler bestimmen kann.

Wenn das Fernrohr an einem Ende der Axe befestigt ist, so bewirkt dies eine Durchbiegung der Axe, die den Collimationsfehler mit der Zenithdistanz veränderlich macht. Ist das Fernrohr horizontal, so hat die Biegung der Axe kei-

nen Einflufs auf den Collimationsfehler, da die Axe des Fernrohrs dann nur erniedrigt wird und der Lage, die sie ohne eine Biegung der Axe haben würde, parallel bleibt. Ist aber das Fernrohr vertical, so bewirkt die Biegung der Axe, dafs der Winkel, welchen die Collimationslinie des Fernrohrs nach der Seite des Objectivs zu mit der Axe macht, vergröfsert wird, sodafs sich also der Collimationsfehler in dem Falle durch einen Ausdruck von der Form $c + a \cos z$ darstellen läfst. Man mufs dann, um c und a zu finden, den Collimationsfehler in der horizontalen, sowie in der verticalen Lage des Fernrohrs bestimmen, wozu die Methoden in No. 22 dieses Abschnitts gegeben werden.

Wenn man kein irdisches Object zur Beobachtung anwenden kann, so kann man den Collimationsfehler auch durch einen Stern, z. B. den Polarstern, bestimmen. Stellt man nämlich zu einer Zeit t auf den Polarstern ein und liest das Azimut ab, kehrt man dann das Instrument um und bringt den Polarstern wieder zur Zeit t' auf das Fadenkreuz, so hat man die beiden Gleichungen:

$$e = A + \Delta A + b \operatorname{cotang} z + c \operatorname{cosec} z$$

und

$$e' = A' + \Delta A - b' \operatorname{cotang} z - c \operatorname{cosec} z,$$

und da nun

$$e' = e + \frac{dA}{dt}(t' - t)$$

ist, wo $\frac{dA}{dt}$ die Aenderung des Azimuts in der Einheit der Zeit für die Zeit $\frac{t'+t}{2}$ bezeichnet, so erhält man:

$$c \operatorname{cosec} z = \frac{A' - A}{2} - \frac{dA}{dt} \cdot \frac{t' - t}{2} - \frac{b' + b}{2} \operatorname{cotang} z.$$

Um endlich den Indexfehler ΔA zu bestimmen, stellt man wieder auf einen bekannten Stern, gewöhnlich den Polarstern ein und liest das Azimut A ab. Ist dann t der Stundenwinkel des Sterns, so erhält man das wahre Azimut e durch die Formeln:

$$\sin z \sin e = \cos \delta \sin t$$
$$\sin z \cos e = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t,$$

und hat dann

$$\Delta A = e - A \mp b \operatorname{cotang} z \mp c \operatorname{cosec} z,$$

wo das obere Zeichen für Kreisende links, das untere für Kreisende rechts gilt.

13. Dient das Instrument nur zum Messen von Azimutalwinkeln, so heifst dasselbe Theodolith. Oft ist nun aber ein solches Instrument noch mit einem Höhenkreise verbunden, sodafs man mit demselben sowohl Azimute als auch Höhen beobachten kann. Dann ist an dem einen Ende der Axe, wie schon vorher angegeben, ein innerer, die Nonien tragender Kreis festgeklemmt, und um diesen dreht sich der getheilte Kreis, welcher mit der Umdrehungsaxe fest verbunden ist. Hat man dann zuerst in einer Lage des Instruments auf ein Object eingestellt und die Nonien des Höhenkreises abgelesen, so dreht man das Instrument um 180° im Azimut und stellt wieder auf dasselbe Object ein. Zieht man nun die Ablesung in der zweiten Lage von der in der ersten ab, oder umgekehrt, je nachdem die Richtung der Theilung ist und halbirt diesen Unterschied, so erhält man die Zenithdistanz des gemessenen Gegenstandes, oder streng genommen die Entfernung von demjenigen Punkte, in welchem die senkrechte Umdrehungsaxe des Instruments die Himmelskugel trifft, oder von dem früher mit P bezeichneten Punkte. Dies setzt aber voraus, dafs die Winkel i und i', sowie der Collimationsfehler c gleich Null sind. Man kann nämlich wieder annehmen, dafs die Ablesung am Höhenkreise da geschieht, wo eine Ebene, durch die Gesichtslinie des Fernrohrs senkrecht auf den Kreis gelegt, hintrifft. Das Fernrohr wird dann auf P eingestellt sein, wenn die gröfsten Kreise KO und KP zusammenfallen. (Vergl. No. 10 dieses Abschnitts.)

Von dieser Ablesung aus durchläuft das Fernrohr den Winkel PKO, bis die Gesichtslinie nach einem aufserhalb KP liegenden Punkte O gerichtet ist. Man liest also dann am Kreise den Winkel PKO ab, der nur dann durch die Seite PO gemessen wird oder gleich dem Abstande von O von P ist, wenn die Seiten OK und PK gleich 90° sind. In dem Falle aber, dafs diese Seiten $90^0 + c$ und $90^0 - i'$ sind, hat man aber, wenn man PO mit ζ und den abgelesenen Winkel PKO mit ζ' bezeichnet:

$$\cos\zeta = -\sin c \sin i' + \cos c \cos i' \cos\zeta'$$
$$= \cos(i' + c)\cos\tfrac{1}{2}\zeta'^2 - \cos(i' - c)\sin\tfrac{1}{2}\zeta'^2.$$

Zieht man auf beiden Seiten $\cos\zeta'$ ab und bedenkt, dafs

man wegen der Kleinheit von $\zeta - \zeta'$ statt $\cos\zeta - \cos\zeta'$ $(\zeta' - \zeta)\sin\zeta'$ setzen kann, so erhält man:

$$\zeta = \zeta' + \sin\tfrac{1}{2}(c + i')^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\zeta' - \sin\tfrac{1}{2}(i' - c)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta'$$

oder auch:

$$\zeta = \zeta' + \frac{c^2 + i'^2}{2}\operatorname{cotg}\zeta' + i'c \operatorname{cosec}\zeta';$$

ζ ist dann die auf den Pol P bezogene Zenithdistanz. Wenn aber P nicht mit dem Zenith zusammenfällt, so ist ZO und nicht PO die wahre Zenithdistanz. In diesem Falle bleibt aber Alles dasselbe wie vorher, nur hat man statt der Neigung i' der horizontalen Axe des Instruments gegen die Ebene des Azimutalkreises jetzt die Neigung desselben gegen den Horizont

$$i' - i\cos(a - a_0) = b$$

zu nehmen und von der Ablesung am Höhenkreise noch die Projection von PZ auf den Höhenkreis oder den Winkel PKZ abzuziehen, der gleich $i\sin(a - a_0)$ ist. Diesen Winkel bestimmt man immer durch ein am Nonienkreise befestigtes Niveau. Bezeichnet man die Ablesung des Niveau's auf der Seite, auf welcher die Theilung des Kreises vom höchsten Punkte ausgehend wächst, mit p, auf der entgegengesetzten mit n und den Punkt des Kreises, welcher der Mitte der Blase entspricht, mit Z, so wird der Zenithpunkt des Kreises gleich $Z + \frac{1}{2}(p - n)$ in der einen und gleich $Z + \frac{1}{2}(p' - n')$ in der andern Lage des Kreises. Man erhält daher, wenn man die beiden Ablesungen mit ζ' und ζ'_1 bezeichnet, in der einen Lage für die Zenithdistanz:

$$\zeta' - Z - \tfrac{1}{2}(p - n)\,\varepsilon,$$

wo ε den Werth eines Niveautheils in Secunden bezeichnet, und in der andern:

$$Z - \zeta'_1 + \tfrac{1}{2}(p' - n')\,\varepsilon,$$

also im Mittel für die Zenithdistanz, frei von dem Fehler der Neigung des Niveau's:

$$z' = \frac{\zeta' + \zeta'_1}{2} - \frac{\frac{1}{2}(p - n)\,\varepsilon \mp \frac{1}{2}(p' - n')\,\varepsilon}{2}$$

und zu diesem z' hat man, um die wahre Zenithdistanz zu erhalten, noch hinzuzulegen:

$$+ \sin\tfrac{1}{2}(b + c)^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}z' - \sin\tfrac{1}{2}(b - c)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z'$$

oder:

$$+ \frac{c^2 + b^2}{2}\operatorname{cotg} z' + b\,c \operatorname{cosec} z'.$$

Setzt man der Einfachheit wegen $b = 0$, da man es immer in der Gewalt hat, diesen Fehler klein zu machen, so hat man einfach hinzuzufügen:

$$+\frac{c^2}{2}\operatorname{cotg} z'.$$

Ist nun z. B. $c = 10'$, so wird $\frac{c^2}{2} = 0''.87$; wenn daher z' ein kleiner Winkel ist, also das Object nahe am Zenith steht, so kann diese Correction sehr bedeutend werden. Es gilt daher die Regel, daſs wenn man Zenithdistanzen, welche weit kleiner als 45° sind, zu nehmen hat, man sehr sorgfältig in der Mitte des Gesichtsfeldes, also so nahe als möglich am Fadenkreuze einzustellen hat.

14. Aus den Formeln für das Azimutal- und Höheninstrument kann man die Formeln für die übrigen Instrumente leicht herleiten. Das Aequatoreal unterscheidet sich von diesem Instrumente nur dadurch, daſs statt des Horizonts eine andere Ebene, nämlich die des Aequators zum Grunde liegt. Ueberträgt man also die Gröſsen, welche man vorher auf den Horizont bezogen hatte, in Bezug auf den Aequator, so erhält man unmittelbar die Formeln für das Aequatoreal. Die Gröſse a wird dann der an dem Instrumente abgelesene Stundenwinkel, i' wird die Neigung der Umdrehungsaxe, an welcher das Fernrohr befestigt ist, gegen die Ebene des dem Aequator parallelen Kreises, welcher der Stundenkreis des Instruments genannt wird. Ferner wird i die Neigung des Stundenkreises gegen den Aequator und $90^0 + c$ ist wieder der Winkel, unter welchem die Gesichtslinie des Fernrohrs gegen die Umdrehungsaxe geneigt ist.

Ebenso leicht erhält man nun die Formeln für diejenigen Instrumente, mit welchen man nur in bestimmten Coordinatenebenen beobachtet. Das Mittagsfernrohr z. B. wird immer nur in der Ebene des Meridians gebraucht, also wird für dies Instrument die Gröſse $a - a_0 + 90^0$ nothwendig nur wenig von Null verschieden sein. Bezeichnet man die kleine Gröſse, um welche dieselbe von Null abweicht, durch $-k$, so gehen die in No. 10 für das Azimutalinstrument gegebenen Formeln über in:

$$e = -k + b \operatorname{cotang} z + c \operatorname{cosec} z \quad \text{Kreis links}$$
$$e = -k - b \operatorname{cotang} z - c \operatorname{cosec} z \quad \text{Kreis rechts.}$$

Dies e wird nun bewirken, daſs man das Gestirn nicht genau in der Ebene des Meridians, sondern etwas entfernt davon beobachtet und zwar wird man das Gestirn, wenn e negativ ist, vor der Culmination beobachten. Es sei nun τ die Zeit, welche man zur Beobachtungszeit hinzuzulegen hat, um die Durchgangszeit durch den Meridian zu erhalten, so ist τ der Stundenwinkel des Gestirns im Augenblicke der Beobachtung, aber östlich positiv genommen. Da nun:

$$\sin \tau = -\sin e \,.\, \frac{\sin z}{\cos \delta}$$

oder

$$\tau = -e \,.\, \frac{\sin z}{\cos \delta},$$

so gehen die vorigen Formeln über in:

$$\tau = -b\,\frac{\cos z}{\cos \delta} + k\,\frac{\sin z}{\cos \delta} - c \sec \delta \quad \text{Kreis links (Ost)}$$

und

$$\tau = +b\,\frac{\cos z}{\cos \delta} + k\,\frac{\sin z}{\cos \delta} + c \sec \delta \quad \text{Kreis rechts (West).}$$

Dies sind die Formeln für das Mittagsfernrohr. Die Gröſse b bedeutet hier die Neigung der horizontalen Umdrehungsaxe gegen den Horizont, und k ist das Azimut des Instruments, um welches dasselbe zu weit nach Osten gerichtet ist.

Auf ganz ähnliche Weise erhält man die Formeln für das Passageninstrument im ersten Vertical. Es ist nämlich nach No. 7 des ersten Abschnitts:

$$\operatorname{cotang} A \sin t = -\cos \varphi \operatorname{tang} \delta + \sin \varphi \cos t$$

oder, wenn man das Azimut e vom ersten Verticale ab zählt, sodaſs $A = 90^0 + e$ ist:

$$\operatorname{tang} e \,.\, \sin t = \cos \varphi \operatorname{tang} \delta - \sin \varphi \cos t.$$

Ist nun Θ die Zeit, zu welcher der Stern wirklich im ersten Verticale war, so wird:

$$0 = \cos \varphi \operatorname{tang} \delta - \sin \varphi \cos \Theta$$

oder, wenn man beide Formeln von einander abzieht:

$$\operatorname{tang} e \sin t = 2 \sin \varphi \sin \tfrac{1}{2}(t - \Theta) \sin \tfrac{1}{2}(t + \Theta).$$

Hieraus erhält man, wenn e sehr klein, also t nahe gleich Θ ist:

$$e = (t - \Theta) \sin \varphi$$

oder

$$\Theta = t - \frac{e}{\sin \varphi}.$$

Setzt man nun hier für e den vorher gefundenen Ausdruck:

$$e = -k \pm b \operatorname{cotang} z \pm c \operatorname{cosec} z,$$

so erhält man für das Passageninstrument im ersten Vertical die Formel:

$$\Theta = t + \frac{k}{\sin\varphi} \mp b \frac{\operatorname{cotang} z}{\sin\varphi} \mp c \frac{\operatorname{cosec} z}{\sin\varphi}.$$

Diese Formeln werden in der Folge noch direct abgeleitet werden. Hier kam es nur darauf an, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Instrumenten zu zeigen.

III. Das Aequatoreal.

15. Wie das Höhen- und Azimutalinstrument dem ersten Coordinatensysteme der Höhen und Azimute entspricht, so hat man auch ein dem zweiten Coordinatensysteme der Stundenwinkel und Declinationen entsprechendes Instrument, das Aequatoreal, welches sich von dem ersteren nur dadurch unterscheidet, daſs der früher horizontal liegende Kreis jetzt dem Aequator parallel ist. Es sei nun P der Weltpol und Π der Pol des Aequator- oder Stundenkreises des Instruments, es sei ferner λ der Bogen des gröſsten Kreises, welcher zwischen diesen beiden Polen enthalten ist, und h der Stundenwinkel des Poles des Instruments. Endlich sei i' der Winkel, welchen die den Declinationskreis tragende Axe (die Declinationsaxe) mit dem Stundenkreise macht, und K der Punkt in welchem die Verlängerung dieser Axe nach der Seite des Kreisendes zu die scheinbare Himmelskugel trifft und D die Declination dieses Punktes. Man nehme dann wieder als Anfangspunkt der Zählung der Stundenwinkel auf dem Instrumente diejenige Ablesung t_0, welche man macht, wenn K mit P und Π in einem Declinationskreise liegt. Ferner nehme man für jede andere Ablesung immer denjenigen Punkt der Theilung, in welchem dieselbe von dem verlängerten Bogen ΠK getroffen wird, ein Punkt, der immer um einen constanten Winkel von dem durch die Nonien angegebenen Punkte verschieden ist. Der Stundenwinkel, auf dem wahren Aequator aber von demselben Anfangspunkte gezählt, sei T.

Denkt man sich nun wieder drei auf einander senkrechte Coordinatenaxen, von denen die eine senkrecht auf der Ebene des wahren Aequators steht, während die beiden anderen in der Ebene desselben liegen, und zwar so, daſs die Axe der y nach dem Punkte gerichtet ist, von dem aus die Stundenwinkel gezählt werden sollen, so sind die drei Coordinaten des Punktes K auf diese Axen bezogen:

$$z = \sin D, \quad y = \cos D \cos T, \quad x = \cos D \sin T.$$

Ferner sind die Coordinaten von K, bezogen auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen, von denen die eine senkrecht auf dem Stundenkreise des Instruments steht, während die beiden anderen in der Ebene desselben liegen, und wo die Axe der x mit derselben Axe des vorigen Systems zusammenfällt:

$$z = \sin i', \quad y = \cos i' \cos (t - t_0), \quad x = \cos i' \sin (t - t_0).$$

Da nun die Axen der z in beiden Systemen den Winkel λ mit einander bilden, so hat man nach den Formeln für die Transformation der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin D &= \cos \lambda \sin i' - \sin \lambda \cos i' \cos (t - t_0) \\ \cos D \sin T &= \cos i' \sin (t - t_0) \\ \cos D \cos T &= \sin \lambda \sin i' + \cos \lambda \cos i' \cos (t - t_0). \end{aligned}$$

Da nun λ, i' und D, wenn das Instrument nahe berichtigt ist, sehr kleine Gröſsen sind, so erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} D &= i' - \lambda \cos (t - t_0) \\ T &= t - t_0. \end{aligned}$$

Das Fernrohr ist nun an der Axe, welche den Declinationskreis trägt, befestigt, und man nehme an, daſs die Richtung der Gesichtslinie desselben nach dem Objective zu mit der Seite der Axe nach dem Kreisende zu den Winkel $90^0 + c$ macht, wo c wieder der Collimationsfehler genannt wird. Ist nun das Fernrohr auf einen Punkt des Himmels gerichtet, dessen Declination δ und dessen Stundenwinkel von dem angenommenen Anfangspunkte gezählt, τ_1 ist, so sind die Coordinaten dieses Punktes:

$$z = \sin \delta, \; y = \cos \delta \cos \tau_1 \; \text{ und } \; x = \cos \delta \sin \tau_1.$$

Nun geht die Theilung auf dem Kreise von Süden durch Westen, Norden, Osten von 0^0 bis 360^0, oder von 0^h bis 24^h. Geht also das Kreisende in der Rectascension dem Fernrohre voran, so zeigt dieses nach einem Punkte, dessen Stunden-

winkel kleiner ist als der des Punktes K. Denkt man also die Axe der y nach dem Punkte gedreht, wo dieselbe in einem Declinationskreise mit K liegt, wenn das Fernrohr auf das Object gerichtet ist, so werden dann die Coordinaten:

$$z = \sin\delta,\ y = \cos\delta\cos(T - \tau_1),\ x = \cos\delta\sin(T - \tau_1).$$

Folgt dagegen das Kreisende dem Fernrohre in der Rectascension, so mufs man für die Coordinaten nehmen:

$$z = \sin\delta,\ y = \cos\delta\cos(\tau_1 - T),\ x = \cos\delta\sin(\tau_1 - T).$$

Denkt man sich nun den Punkt O, nach welchem das Fernrohr gerichtet ist, auf ein Axensystem bezogen, von welchem die Axe der y parallel der Declinationsaxe des Instruments, also nach K gerichtet ist und die Axe der x mit der entsprechenden Axe des vorigen Systems zusammenfällt, so sind die drei Coordinaten des Punktes O, wenn man mit δ' die am Kreise abgelesene Declination bezeichnet:

$$z = \sin\delta'\cos c,\quad y = -\sin c$$

und

$$x = \cos\delta'\cos c.$$

Da nun die Axen der z in beiden Systemen den Winkel D mit einander bilden, so hat man nach den Formeln für die Transformation der Coordinaten:

$$-\sin c = \cos\delta\cos(\tau_1 - T)\cos D + \sin\delta\sin D,$$

oder

$$-c = \cos\delta\cos(\tau_1 - T) + D\,.\,\sin\delta,$$

mithin, wenn man für D und T die vorher gefundenen Werthe setzt:

$$-c = [i - \lambda\cos(t - t_0)]\sin\delta + \cos\delta\cos[\tau_1 - (t - t_0)].$$

Daraus folgt, dafs

$$\cos[\tau_1 - (t - t_0)]$$

eine kleine Gröfse ist. Schreibt man also

$$\sin[90^0 - \tau_1 + (t - t_0)]$$

statt

$$\cos[\tau_1 - (t - t_0)],$$

so kann man den Sinus mit dem Bogen vertauschen und erhält dann den wahren Stundenwinkel:

$$\tau_1 = 90^0 + (t - t_0) - \lambda\cos(t - t_0)\operatorname{tang}\delta + i'\operatorname{tang}\delta + c\sec\delta,$$

wenn das Kreisende dem Fernrohre folgt, und

$$\tau_1 = (t - t_0) - 90^0 + \lambda\cos(t - t_0)\operatorname{tang}\delta - i'\operatorname{tang}\delta - c\sec\delta,$$

wenn das Kreisende dem Fernrohre vorangeht.

Addirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen h, so werden die Winkel vom Meridiane ab gerechnet. Es wird

dann $\tau_1 + h$ der wahre, vom Meridiane gerechnete, Stundenwinkel τ und es sind

$$h + t - t_0 + 90^0$$
$$\text{und } h + t - t_0 - 90^0$$

die durch das Instrument in beiden Lagen gegebenen Stundenwinkel. Führt man also die Ablesung der Nonien ein, sodafs t' die Ablesung des Nonius, Δt der Fehler desselben ist, und wo man 180^0 von der Angabe des Nonius abziehen mufs, wenn diese nicht den Stundenwinkel selbst, sondern $180^0 +$ den Stundenwinkel giebt, so wird:

$$\tau = t' + \Delta t - \lambda \sin [t' + \Delta t - h] \operatorname{tang} \delta \pm c \sec \delta \pm i' \operatorname{tang} \delta,$$
$$\text{oder auch } \tau = t' + \Delta t - \lambda \sin (\tau - h) \operatorname{tang} \delta \pm c \sec \delta \pm i' \operatorname{tang} \delta,$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem das Kreisende dem Fernrohr folgt oder demselben vorangeht.

Man erhält diese Gleichungen und die entsprechenden für die Declination auch durch die Betrachtung des sphärischen Dreiecks zwischen dem Pole P, dem Pole des Instruments Π und dem Punkte O, auf welchen die Gesichtslinie des Fernrohrs gerichtet ist, sowie des Dreiecks zwischen Π, O und dem Punkte K, in welchem die Verlängerung der Declinationsaxe die Himmelskugel schneidet.

In dem ersteren Dreiecke sind die Seiten OP, $O\Pi$ und $P\Pi$ beziehlich die wahre Poldistanz $90^0 - \delta$ des in der Gesichtslinie befindlichen Punktes, die Distanz vom Pole des Instruments $90^0 - \delta'$, und λ und die den ersten beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel $180^0 - (\tau' - h)$ und $\tau - h$, wo $\tau - h$ der auf den Meridian des Instruments bezogene Stundenwinkel, $\tau' - h$ der von demselben Anfangspunkt gezählte, aber auf den Pol des Instruments bezogene Stundenwinkel ist. Man hat daher die strengen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\cos \delta \cos (\tau - h) &= \sin \delta' \sin \lambda + \cos \delta' \cos \lambda \cos (\tau' - h) \\
\cos \delta \sin (\tau - h) &= \cos \delta' \sin (\tau' - h) \\
\sin \delta &= \sin \delta' \cos \lambda - \cos \delta' \sin \lambda \cos (\tau' - h),
\end{aligned}$$

woraus man für den Fall, dafs λ eine kleine Gröfse ist, erhält:

$$\tau = \tau' - \lambda \operatorname{tang} \delta' \sin (\tau' - h)$$
$$\delta = \delta' - \lambda \cos (\tau' - h),$$

τ' und δ' aber nur unter der Bedingung die am Instrumente abgelesenen Gröfsen sind, dafs i' und c sowie auch die Indexfehler der Nonien Null sind. Zuvörderst ist wieder klar, dafs der am Declinationskreise abgelesene Winkel $90^0 - \delta'' - \Delta \delta$

(wo $\Delta\delta$ der Indexfehler des Nonius ist) gleich dem Winkel an K im Dreiecke HKO ist. Der Winkel SHO, wo S ein Punkt in der Verlängerung von HP ist, ist $\tau'-h$; der Winkel, den man am Instrumente abliest, ist der Winkel, um den sich HK bewegt von der Stellung, wo HP mit HS zusammenfällt, bis zu der jetzigen Stellung. Wären die obigen Bedingungen erfüllt, so würde dieser Winkel gleich $\tau'-h$ und der Winkel SHK gleich $90^0+\tau'-h$ sein, wenn die Axe vorangeht und gleich $\tau'-h-90^0$, wenn die Axe folgt. Bezeichnet man den letzten Winkel im allgemeinen Falle mit $90^0+\tau''-h+\Delta t$ und $\tau''-h+\Delta t-90^0$, so ist also der Winkel OHK gleich $90^0+\tau''+\Delta t-\tau'$, wenn die Axe vorangeht, und $\tau'-(\tau''+\Delta t-90^0)$, wenn die Axe folgt, oder $90^0\mp(\tau'-\tau''-\Delta t)$. Da die gegenüberstehende Seite im Dreiecke gleich 90^0+c ist, ferner die dem Winkel $90^0-\delta''-\Delta\delta$ gegenüberstehende Seite HO gleich $90^0-\delta'$ und $HK=90^0-i'$ ist, so hat man:

$$\begin{aligned}
\cos\delta'\cos(\tau'-\tau''-\Delta t) &= \cos c\cos(\delta''+\Delta\delta),\\
\pm\cos\delta'\sin(\tau'-\tau''-\Delta t) &= -\sin c\cos i'-\cos c\sin i'\sin(\delta''+\Delta\delta),\\
\sin\delta' &= -\sin c\sin i'+\cos c\cos i'\sin(\delta''+\Delta\delta),
\end{aligned}$$

woraus man erhält:

$$\tau'=\tau''+\Delta t\mp c\sec(\delta''+\Delta\delta)\mp i'\operatorname{tang}(\delta''+\Delta\delta),$$

und ebenso wie in No. 13 dieses Abschnitts:

$$\begin{aligned}
\delta'=\delta''+\Delta\delta-\sin\tfrac{1}{2}(i'+c)^2\operatorname{tang}[45^0+\tfrac{1}{2}(\delta''+\Delta\delta)]\\
+\sin\tfrac{1}{2}(i'-c)^2\operatorname{cotang}[45^0+\tfrac{1}{2}(\delta''+\Delta\delta)],
\end{aligned}$$

oder auch $\delta'=\delta''+\Delta\delta-\tfrac{1}{2}(i'^2+c^2)\operatorname{tang}(\delta''+\Delta\delta)-i'c\sec(\delta''+\Delta\delta)$,

wodurch man durch Einsetzen in die obigen Ausdrücke erhält:

$$\begin{aligned}
\tau &= \tau''+\Delta t-\lambda\operatorname{tang}\delta\sin(\tau'-h)\mp c\sec\delta\mp i'\operatorname{tang}\delta\\
\delta &= \delta''+\Delta\delta-\lambda\cos(\tau'-h)-\tfrac{1}{2}(i'^2+c^2)\operatorname{tang}\delta-i'c\sec\delta,
\end{aligned}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Axe vorangeht oder dem Fernrohre folgt. Bei der letzten Formel ist vorausgesetzt, dafs die Theilung des Kreises in demselben Sinne wie die Declination geht, im entgegengesetzten Falle wird:

$$\delta=360^0-\delta''_1-\Delta\delta-\lambda\cos(\tau-h)-\tfrac{1}{2}(i'^2+c^2)\operatorname{tang}\delta-i'c\sec\delta.$$

16. Es ist nun zu zeigen, wie man die Fehler des Instruments durch Beobachtungen bestimmen kann. Zuvörderst ergiebt sich aus den beiden letzten Gleichungen für δ:

$$\Delta\delta=180^0-(\delta''_1+\delta''),$$

woraus man sieht, daſs man den Indexfehler des Declinationskreises einfach durch Einstellung des Instruments in beiden Lagen auf denselben festen Punkt erhält, wozu man einen Stern in der Nähe des Meridians, am besten den Polarstern, nehmen kann, da man annehmen kann, daſs sich die scheinbare Declination desselben während der Zwischenzeit der Beobachtungen nicht ändert.

Die Fehler i' und c kann man durch die Beobachtung zweier Sterne, von denen der eine dem Pole und der andere dem Aequator nahe steht und von denen jeder in beiden Lagen des Kreises beobachtet wird, finden. Dann erhält man nämlich für jeden Stern die beiden Gleichungen:

$$\tau = \tau' + \Delta\tau - \lambda \sin(\tau - h) \operatorname{tang} \delta + i' \operatorname{tang} \delta + c \sec \delta,$$

wenn der Kreis folgt, und:

$$\tau_1 = \tau'_1 + \Delta\tau - \lambda \sin(\tau_1 - h) \operatorname{tang} \delta - i' \operatorname{tang} \delta - c \sec \delta,$$

wenn der Kreis vorangeht. Folgen nun die beiden Beobachtungen schnell auf einander, sodaſs $\tau_1 - \tau$ eine kleine Gröſse ist, so erhält man, wenn man die Sternzeiten der beiden Beobachtungen mit Θ und Θ_1 bezeichnet:

$$i' \operatorname{tang} \delta + c \sec \delta = \frac{[\tau - \tau'] - [\tau_1 - \tau'_1]}{2}$$

$$= \frac{[\Theta - \tau'] - [\Theta_1 - \tau'_1]}{2}$$

und aus dieser Gleichung wird man in Verbindung mit der ähnlichen Gleichung, welche die Beobachtungen des zweiten Sterns geben, i' und c bestimmen können.

Kennt man so die Fehler i' und c, sowie den Fehler der Nonien $\Delta\delta$, so erhält man die Fehler der Aufstellung des Instruments λ und h, sowie die Fehler der Nonien Δt durch die Beobachtung zweier bekannten Sterne. Man hat nämlich, wenn man die Ablesungen schon wegen der Fehler i' und c und des Fehlers der Nonien $\Delta\delta$ verbessert annimmt:

$$\tau = \tau' + \Delta t - \lambda \sin(\tau - h) \operatorname{tang} \delta$$
$$\delta = \delta' - \lambda \cos(\tau - h),$$

und ebenso für einen zweiten Stern:

$$\tau_1 = \tau'_1 + \Delta t - \lambda \sin(\tau_1 - h) \operatorname{tang} \delta_1$$
$$\delta_1 = \delta'_1 - \lambda \cos(\tau_1 - h).$$

Daraus erhält man leicht:

$$\lambda \sin\left[\frac{\tau_1+\tau}{2}-h\right]=\frac{\delta-\delta'-(\delta_1-\delta'_1)}{2\sin\frac{\tau-\tau_1}{2}}$$

$$\lambda \cos\left[\frac{\tau_1+\tau}{2}-h\right]=\frac{-\{\delta-\delta'+(\delta_1-\delta'_1)\}}{2\cos\frac{\tau-\tau_1}{2}},$$

woraus man λ und h findet.

Die Fehler der Nonien des Stundenkreises findet man dann aus einer der Gleichungen für τ oder τ_1.

Da nun die am Instrumente abgelesenen Gröfsen τ', τ'_1, δ' und δ'_1 alle mit der Refraction behaftet sind, so mufs man auch für τ, τ_1, δ und δ_1 die scheinbaren, durch die Refraction geänderten Stundenwinkel und Declinationen anwenden. Hat man aber nicht sehr nahe am Horizonte beobachtet, so kann man für die Refraction den einfachen Ausdruck setzen:

$$dh=\alpha \operatorname{cotang} h,$$

und erhält dann die entsprechenden Aenderungen des Stundenwinkels und der Declination durch die Formeln:

$$dt=-\alpha \operatorname{cotang} h\,.\,\frac{\sin p}{\cos\delta}$$

$$d\delta=+\alpha \operatorname{cotang} h\,.\,\cos p,$$

wo p der parallactische Winkel ist, welcher durch die Formeln gefunden wird (I No. 8):

$$\cos\varphi\cos t=n\sin N$$

$$\sin\varphi=n\cos N$$

$$\operatorname{tang} p=\frac{\cos\varphi\sin t}{n\cos(N+\delta)},$$

oder:

$$\cos h\sin p=\cos\varphi\sin t$$

$$\cos h\cos p=n\cos(N+\delta).$$

Die Höhe h findet man dann durch die Gleichung:

$$\sin h=n\sin(N+\delta).$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke für dt und $d\delta$, so erhält man auch:

$$dt=-\frac{\alpha\cos\varphi\sin t}{n\cos\delta\sin(N+\delta)}$$

$$d\delta=+\alpha \operatorname{cotang}(N+\delta).$$

Da nun $\sin p$ immer das Zeichen von $\sin t$ hat, so wird der Stundenwinkel der Sterne durch die Refraction immer vermindert im ersten und zweiten Quadranten, dagegen vergröfsert oder der absolute Werth ebenfalls vermindert im dritten und vierten Quadranten.

Ist $\delta < \varphi$, so ist $\sin\delta\cos\varphi$ immer kleiner als $\cos\delta\sin\varphi$ also ist dann $\cos p$ immer positiv. Dann wird also die Declination durch die Refraction stets vergröſsert. Ist dagegen $\delta > \varphi$, so ist $\cos p$ im zweiten und dritten Quadranten von t immer positiv, dort wird also die Declination durch die Refraction immer vergröſsert. Im ersten und vierten Quadranten wird die Declination aber auch verkleinert und zwar ist dies der Fall für alle Stundenwinkel, welche kleiner sind als der der gröſsten Digression, oder für welche

$$\cos t > \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\delta}.$$

Hat man nun die Fehler h und λ durch die Beobachtungen bestimmt und will dieselben wegschaffen, so kann man dies einfach durch die Verstellung der Rotationsaxe des Instruments in horizontaler und verticaler Richtung bewerkstelligen. Ist nämlich y der Bogen eines gröſsten Kreises, welcher vom Pole des Instruments senkrecht auf den Meridian gefällt ist und x die Entfernung der Projection auf den Meridian vom Weltpole, so ist:

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\lambda\cos h$$

und

$$\sin y = \sin\lambda\sin h.$$

Man braucht also nur das eine Ende der Rotationsaxe durch die zu diesem Zwecke angebrachten Stellschrauben in horizontaler Richtung um y und in verticaler Richtung um x zu ändern.

Die oben gegebenen Formeln für die Bestimmung von λ und h setzen voraus, daſs das Instrument schon so nahe berichtigt ist, daſs λ eine kleine Gröſse ist. Man erlangt dies aber leicht, wenn man das Instrument auf die Declination eines culminirenden Sterns stellt (wozu man also die Kenntniſs von $\Delta\delta$ nöthig hat) und dann den Stern durch diejenigen der Fuſsschrauben, die eine Drehung des Instruments in der Ebene des Meridians bewirken (oder bei der Aufstellung des Instruments auf einen Stein, durch die verticalen Correctionsschrauben der Platte, auf welcher die Stundenaxe ruht), in die Mitte des Gesichtsfeldes bringt; dann aber dasselbe bei einem 6 Stunden vom Meridiane entfernten Stern wiederholt, indem man jetzt das Instrument um die in der Richtung des

Meridians liegende horizontale Linie mittelst der Fufsschrauben dreht oder den Stern durch die horizontalen Correctionsschrauben der Platte in die Mitte des Gesichtsfeldes bringt.

In dem Vorigen ist auf die Einwirkung der Schwere auf die einzelnen Theile des Instruments keine Rücksicht genommen, die eine Biegung des Fernrohrs sowohl als auch der Declinations- und Stundenaxe hervorbringen kann. Die Biegung der Stundenaxe braucht man nicht zu berücksichtigen, wenn der Schwerpunkt aller Theile des Instruments, die sich um die Axe drehen, in derselben liegt, wie dies sehr nahe wenigstens immer der Fall sein mufs, wenn das Instrument in allen Lagen im Gleichgewichte sein soll. Der Pol des Instruments wird durch eine solche Biegung nur einen anderen Ort am Himmel einnehmen, als er ohne dieselbe haben würde, aber diese Lage wird unverändert dieselbe bleiben in jeder Stellung des Instruments. Die Biegung des Fernrohrs, deren Ausdruck man einfach gleich $\gamma \sin z$ nehmen kann, kann durch die in No. 8 gegebene Methode bestimmt werden und da dieselbe immer in gleicher oder entgegengesetzter Richtung wie die Refraction wirkt, so kann dieselbe am einfachsten mit derselben in Rechnung gezogen werden, indem man in den vorher für die Refraction gegebenen Formeln $\alpha \tang z + \gamma \sin z$ statt $\alpha \tang z$ anwendet. Es bleibt also nur noch die Biegung der Declinationsaxe zu berücksichtigen. Diese bewirkt, dafs der Winkel i' mit der Zenithdistanz des Punktes K veränderlich ist. Aendert nun die Schwere die Zenithdistanz des Punktes K um $\beta \sin z$, so wird die Declination D von K um $\beta \sin z \cos p$ geändert und der Stundenwinkel T von K um $-\beta \frac{\sin z \sin p}{\cos D}$ oder, da in diesem Falle D sehr nahe Null ist, so wird die Aenderung der Declination $\beta \sin \varphi$ und die des Stundenwinkels $\beta \cos \varphi \sin T$. Da aber:

$$T = 90^\circ + \tau'', \quad \text{wenn das Kreisende vorangeht}$$
$$\text{und} \quad = \tau'' - 90^\circ, \quad \text{wenn das Kreisende folgt,}$$

so hat man also statt dieses Stundenwinkels zu nehmen:

$$90^\circ + \tau'' - \beta \cos \varphi \cos \tau''$$
$$\text{oder } \tau'' - 90^\circ + \beta \cos \varphi \cos \tau'',$$

und man hat daher in den früher gefundenen Formeln $\tau'' \mp \beta \cos \varphi \cos \tau''$ statt τ'' und ebenso $i' + \beta \sin \varphi$ statt i' zu

setzen, da jetzt $\Pi K = 90^0 - i' - \beta \sin\varphi$ wird, sodaſs man erhält:

$$\tau = \tau'' + \Delta t - \lambda \operatorname{tg}\delta \sin(\tau - h) \mp c \sec\delta \mp i' \operatorname{tg}\delta \mp \beta \operatorname{tg}\delta [\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotg}\delta \cos\tau]$$

oder i' ist in diesem Falle nicht constant, sondern gleich

$$i' + \beta [\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotang}\delta \cos\tau].$$

Die Beobachtung eines Sterns in beiden Lagen des Instruments giebt dann eine Gleichung von der Form:

$$c \sec\delta + i' \operatorname{tang}\delta + \beta \operatorname{tang}\delta [\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotg}\delta \cos\tau] = \frac{\Theta - \tau' - (\Theta_1 - \tau'_1)}{2},$$

sodaſs man durch die Beobachtung von wenigstens 3 Sternen in verschiedenen Punkten der Himmelskugel und in beiden Lagen des Instruments die drei Fehler c, i' und β bestimmen kann.

17. Ist das Aequatoreal fest gebaut, sodaſs man sich auf die Unveränderlichkeit der Aufstellung wenigstens während kurzer Zeiträume verlassen kann und sind die Kreise fein getheilt und mit Ablesungsmikroskopen versehen, so kann man sich eines solchen Instruments mit Vortheil zur Bestimmung von Rectascensions- und Declinationsunterschieden bedienen, also dasselbe zur Bestimmung der Oerter der Planeten und Cometen anwenden. Dazu muſs das Fernrohr mit einem Fadenkreuze versehen sein, das aus zwei nahen, der Bewegung der Sterne parallelen Fäden und einem darauf senkrechten Faden besteht. Man bringt dann das zu bestimmende Object durch die Declinationsbewegung des Fernrohrs zwischen die parallelen Fäden und beobachtet die Durchgangszeit durch den verticalen Faden oder, wenn mehrere senkrechte Fäden vorhanden sind, durch alle Fäden, indem man die Zeiten, wie in No. 20 gezeigt wird, auf den Mittelfaden reducirt, und liest dann die beiden Kreise des Instruments ab. Dieselbe Beobachtung macht man auch für einen bekannten Stern. Verbessert man dann die Ablesungen der Kreise wegen der Fehler des Instruments und bringt an dieselben die Refraction in Declination und im Stundenwinkel an, so erhält man die Rectascensions- und Declinationsunterschiede des unbekannten Objects und des Sterns und indem man diese zum scheinbaren Ort des Sterns hinzufügt, den scheinbaren Ort des unbekannten Objects. Diese Methode hat den Vortheil, daſs man nie wegen eines Vergleichsterns in Verlegenheit ist

und immer solche Sterne auswählen kann, deren Ort gut bestimmt ist. Häufig wird man sogar unter den in den Ephemeriden gegebenen Hauptsternen (Standard stars) einen oder mehrere finden, die man als Vergleichssterne anwenden kann, sodafs man dann selbst der Berechnung der scheinbaren Oerter der Vergleichssterne überhoben ist, indem man diese unmittelbar aus den Ephemeriden entnimmt. Die Vergleichssterne müssen aber doch nicht zu weit ab genommen werden, damit nicht Irrthümer in der Bestimmung der Fehler des Instruments zu viel Einflufs auf das Resultat haben. Ist der Stern aber nur einigermafsen nahe, so werden solche Fehler wenig Einflufs haben, da hier nur der Unterschied des Einflusses auf die beiden Beobachtungen in Betracht kommt.

Gewöhnlich ist das Aquatoreal aber nicht vollkommen genug, um dasselbe unmittelbar zur Bestimmung der Rectascensions- und Declinationsunterschiede zu gebrauchen, vielmehr werden die eigentlichen Beobachtungen an dem Mikrometerapparate des Fernrohrs gemacht und die parallactische Aufstellung dient nur zur Erleichterung der mikrometrischen Beobachtungen. Diese Mikrometer, deren Theorie später gegeben wird, gebraucht man unter Anderem zur Bestimmung der Distanzen und Positionswinkel d. h. der Winkel, welche die Verbindungslinie beider Objecte mit dem durch das eine oder durch die Mitte der Verbindungslinie gehenden Declinationskreise macht. Dieser Winkel wird an einem besonderen Kreise, dem Positionskreise, dessen Mittelpunkt in der Axe des Fernrohrs liegt, abgelesen. Ist das Aequatoreal vollkommen berichtigt, so entspricht derselbe Punkt des Positionskreises der Richtung des Declinationskreises desjenigen Punktes, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist, in allen Lagen des Instruments. Ist aber die Aufstellung fehlerhaft, so ändert sich dieser Punkt und die am Positionskreise abgelesenen Winkel müssen dann um den Winkel verbessert werden, den der gröfste Kreis von dem Objecte nach dem Pole des Instruments mit dem Declinationskreise macht. Nennt man diesen Winkel π, so hat man in dem Dreiecke zwischen dem Object, dem Pole und dem Pole des Instruments:

$$\cos\delta\sin\pi = \sin\lambda\sin(\tau' - h)$$

$$\text{oder}\quad \pi = \lambda\sin(\tau' - h)\sec\delta,$$

sodaſs man also aus dem am Kreise abgelesenen Positionswinkel P', wenn man denselben in der gewöhnlichen Weise von Norden durch Osten herum zählt, den wahren Positionswinkel P durch die Gleichung erhält:

$$P = P' + \Delta P + \lambda \sin(\tau' - h) \sec \delta,$$

wo ΔP der Indexfehler des Positionskreises ist.

Vergl. über das Aequatoreal: Hansen, die Theorie des Aequatoreals, Leipzig 1855 und Bessel, Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatoreals im ersten Bande seiner astronomischen Untersuchungen.

IV. Das Mittagsfernrohr und der Meridiankreis.

18. Das Mittagsfernrohr ist ein Azimutalinstrument, welches in der Ebene des Meridians aufgestellt ist. Die horizontale Drehungsaxe des Instruments ist daher jetzt von Ost nach West gerichtet, damit das darauf senkrechte Fernrohr sich in der Ebene des Meridians bewegt.

Ruht diese Axe wieder auf zwei Stützen, welche auf einem Azimutalkreise befestigt sind, so hat man die Einrichtung eines tragbaren Passageninstruments. Bei den fest aufgestellten, gröſseren Instrumenten fällt dagegen dieser Azimutalkreis fort, und die Zapfenlager der Drehungsaxe sind an zwei steinernen und von dem Beobachter isolirt aufgestellten Pfeilern befestigt. Das eine Zapfenlager ruht dann auf Schrauben, vermittelst welcher man dasselbe höher oder niedriger stellen kann, um die Horizontalität der Drehungsaxe zu berichtigen, das andre Zapfenlager läſst sich dagegen durch Schrauben parallel mit der Ebene des Meridians verschieben, sodaſs man hierdurch das Instrument so genau als möglich in den Meridian bringen kann.

Das eine Ende der Axe trägt einen Kreis, welcher bei einem blos zur Beobachtung der Meridiandurchgänge bestimmten Instrumente (Mittagsfernrohre oder Passageninstrumente) zum Auffinden der Sterne dient. Ist der Kreis so genau getheilt, daſs man damit auch die Meridianhöhen der Sterne beobachten kann, so heiſst das Instrument ein Meridiankreis. Die neueren Instrumente haben der Symmetrie

wegen einen Kreis auf beiden Seiten der Axe. Mitunter haben diese beiden Kreise eine feine Theilung, gewöhnlich ist aber nur einer derselben fein getheilt und der andere nur mit einer rohen Theilung zur Einstellung des Instruments versehen. In der Folge soll der Höhenkreis des Instruments zuerst aufser Acht gelassen und dasselbe als blofses Passageninstrument betrachtet werden.

Die Umdrehungsaxe treffe die scheinbare Himmelskugel nach der Seite des Kreisendes zu, welches auf der Westseite angenommen wird, in einem Punkte, dessen Höhe über dem Horizonte b und dessen Azimut $90^0 - k$, wo die Azimute wie gewöhnlich von Süden durch Westen herum von 0^0 bis 360^0 gezählt werden. Dann sind die drei rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf ein Axensystem, dessen Axe der z senkrecht auf der Ebene des Horizonts ist, während die Axen der x und y in der Ebene desselben liegen und zwar so, dafs die positive Seite der Axen der x und y respective nach dem Süd- und dem Westpunkte gerichtet ist:

$$z = \sin b$$
$$y = \cos b \cos k$$
$$x = \cos b \sin k.$$

Nennt man dann die Declination dieses Punktes n, den Stundenwinkel dagegen $90^0 - m$, so sind die Coordinaten desselben, bezogen auf ein Axensystem, dessen Axe der z senkrecht auf der Ebene des Aequators ist, während die Axe der y mit derselben Axe des vorigen Systems zusammenfällt:

$$z = \sin n$$
$$y = \cos n \cos m$$
$$x = \cos n \sin m.$$

Da nun die Axen der z in beiden Systemen den Winkel $90^0 - \varphi$ mit einander bilden, so hat man die Gleichungen:

$$\sin n = \sin b \sin \varphi - \cos b \sin k \cos \varphi$$
$$\cos n \sin m = \sin b \cos \varphi + \cos b \sin k \sin \varphi$$
$$\cos n \cos m = \cos b \cos k.$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus der Betrachtung des Dreiecks zwischen dem Pole, dem Zenith und dem Punkte Q, in welchem der östliche Theil der Umdrehungsaxe verlängert die Himmelskugel trifft. In diesem Dreieck ist nämlich $ZP = 90^0 - \varphi$, $ZQ = 90^0 + b$, $PQ = 90^0 + n$ und Winkel $PZQ = 90^0 - k$, $ZPQ = 90^0 + m$.

Ist das Instrument nahe berichtigt, sind also b und k und ebenso m und n kleine Gröfsen, deren Sinus man mit dem Bogen vertauschen und deren Cosinus man gleich Eins setzen kann, so erhält man hieraus die Näherungsformeln:

$$n = b \sin \varphi - k \cos \varphi$$
$$m = b \cos \varphi + k \sin \varphi,$$

oder auch die umgekehrten Formeln:

$$b = n \sin \varphi + m \cos \varphi$$
$$k = - n \cos \varphi + m \sin \varphi.$$

Nimmt man nun an, dafs die Gesichtslinie des Fernrohrs mit der Seite der Umdrehungsaxe nach dem Kreisende zu den Winkel $90^0 + c$ bildet, und dafs dasselbe auf ein Object gerichtet ist, dessen Declination δ und dessen Rectascension um τ gröfser als die des culminirenden Punktes des Aequators ist, sodafs für obere Culminationen τ der östliche Stundenwinkel des Sterns ist, oder die Zeit, welche der Stern braucht, um vom beobachteten Orte zum Meridiane zu gelangen, so sind die Coordinaten des Sterns in Bezug auf die Ebene des Aequators, wenn die Axe der x im Meridiane angenommen wird:

$$z = \sin \delta, \quad y = - \cos \delta \sin \tau$$

und

$$x = \cos \delta \cos \tau,$$

oder, wenn man die Axe der x in der Ebene des Aequators senkrecht auf der Umdrehungsaxe des Instruments annimmt:

$$z = \sin \delta, \quad y = - \cos \delta \sin (\tau - m)$$

und

$$x = \cos \delta \cos (\tau - m).$$

Dann ist $\tau - m$ die Zeit, welche der Stern braucht, um von dem beobachteten Orte in den Meridian des Instruments zu gelangen, d. h. in die Ebene, welche senkrecht auf der Umdrehungsaxe steht.

Denkt man sich nun ein zweites Coordinatensystem, und zwar die Axe der x mit der vorigen zusammenfallend, die Axe der y dagegen nicht mehr in der Ebene des Aequators, sondern parallel der Umdrehungsaxe des Instruments, so wird

$$y = - \sin c,$$

und da die Axen der z in beiden Systemen den Winkel n

mit einander bilden, so hat man nach den Formeln für die Transformation der Coordinaten:

$$\sin c = -\sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (\tau - m).$$

Für untere Culminationen fällt zwar $\tau - m$ auf dieselbe Seite des Meridians des Instruments, da aber dann der Stern eher in den Meridian des Instruments kommt als an den Ort, an welchem derselbe beobachtet wird, so ist $\tau - m$ negativ zu nehmen, sodaſs man dann für die Coordinaten des Punktes, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist, erhält:

$$z = \sin \delta, \quad y = + \cos \delta \sin (\tau - m),$$

mithin:

$$\sin c = -\sin n \sin \delta - \cos n \cos \delta \sin (\tau - m).$$

Für untere Culminationen hat man also nur das Zeichen des zweiten Gliedes in der Formel für c zu verändern; man kann daher auch als allgemeine Formel

$$\sin c = -\sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (\tau - m)$$

nehmen und hat dann nur für untere Culminationen $180^0 - \delta$ statt δ zu nehmen. Diese Formeln ergeben sich auch aus dem Dreiecke zwischen P, Q und dem Sterne O, in welchem die Seiten $PO = 90^0 - \delta$, $PQ = 90^0 + n$, $OP = 90^0 - c$ sind und der Winkel $OPQ = 90^0 + m - \tau$ für obere Culminationen und gleich $90^0 - m + \tau$ für untere Culminationen ist.

Aus der obigen Gleichung folgt nun:

$$\cos n \sin (\tau - m) = \sin n \operatorname{tang} \delta + \sin c \sec \delta,$$

und, wenn man hierzu die identische Gleichung addirt:

$$\cos n \sin m = \cos n \sin m,$$

so erhält man:

$$2 \cos n \sin \tfrac{1}{2} \tau \cos [\tfrac{1}{2} \tau - m] = \cos n \sin m + \sin n \operatorname{tang} \delta + \sin c \sec \delta. \quad (a)$$

Nimmt man nun an, daſs n, m und τ kleine Gröſsen sind, daſs also das Instrument in seinen Theilen nahe berichtigt ist, so erhält man die Näherungsformel:

$$\tau = m + n \operatorname{tang} \delta + c \sec \delta \text{*)}.$$

Dies ist die von Bessel vorgeschlagene Formel zur Berechnung der Beobachtungen am Passageninstrumente.

Kennt man nun τ und ist T die Uhrzeit der Beobachtung des Sterns, so ist die Uhrzeit, zu welcher der Stern im Meridiane war $T + \tau$. Ist dann Δt der Stand der Uhr gegen Sternzeit, so ist $T + \tau + \Delta t$ die Sternzeit, zu welcher der Stern

*) Wie man auch unmittelbar aus der Gleichung für $\cos n \sin (\tau - m)$ findet.

im Meridiane war oder die Rectascension des Sterns. Nennt man diese α, so ist also:

$$\alpha = T + \Delta t + m + n \operatorname{tang} \delta + c \sec \delta.$$

Kennt man also Δt, so kann man die Rectascension α des Sterns bestimmen und umgekehrt findet man, wenn man die Rectascension des Sterns kennt, durch die Beobachtung desselben am Passageninstrumente den Stand der Uhr.

Man kann nun auch τ durch b und k ausdrücken, indem man die früher gefundenen Relationen:

$$\cos n \sin m = \sin b \cos \varphi + \cos b \sin \varphi \sin k$$
$$\sin n = \sin b \sin \varphi - \cos b \cos \varphi \sin k$$

in die Gleichung (a) substituirt. Man erhält dann:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} \tau \cos n \cos [\tfrac{1}{2} \tau - m] = \sin b \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta}$$
$$+ \cos b \sin k \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta,$$

und hieraus die Näherungsformel:

$$\tau = b \frac{\cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta.$$

Diese Formel heifst die Mayersche, weil sich Tobias Mayer derselben zur Reduction seiner Meridianbeobachtungen bediente. Es ist dieselbe Formel, welche vorher aus den Formeln für das Azimutalinstrument hergeleitet wurde.

Hansen hat noch eine dritte Form der Gleichung für τ vorgeschlagen, welche für die Rechnung eigentlich am bequemsten ist. Addirt man nämlich die beiden Gleichungen:

$$\sin n \operatorname{tang} \varphi = \sin b \frac{\sin \varphi^2}{\cos \varphi} - \cos b \sin k \sin \varphi$$

und

$$\cos n \sin m = \sin b \cos \varphi + \cos b \sin k \sin \varphi,$$

so findet man:

$$\cos n \sin m = \sin b \sec \varphi - \sin n \operatorname{tang} \varphi$$

und, wenn man diesen Werth von $\cos n \sin m$ in die Gleichung (a) substituirt, so erhält man die Näherungsformel:

$$\tau = b \sec \varphi + n [\operatorname{tang} \delta - \operatorname{tang} \varphi] + c \sec \delta.$$

Die gegebenen Formeln gelten alle, wenn das Kreisende nach Westen zu liegt. Für den Fall, dafs das Kreisende nach Osten gerichtet ist, wird die Höhe des westlichen Endes der Umdrehungsaxe gleich $-b$ und der Winkel, welchen die Gesichtslinie mit dem nach Westen gerichteten Ende der Axe macht $90^0 - c$, während k dasselbe bleibt. Man hat also

für diesen Fall nur die Zeichen von b und c zu ändern und es ist nach der Mayerschen Formel

für obere Culminationen:

$$\text{Kreis-Ende West } \alpha = T + \Delta t + b \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta$$

$$\text{Kreis-Ende Ost } \alpha = T + \Delta t - b \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - c \sec \delta$$

Für untere Culminationen hat man nur $180^0 - \delta$ statt δ zu setzen, sodaſs man erhält:

$$\text{Kreis-Ende West } \alpha + 12^h = T + \Delta t + b \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos \delta} - c \sec \delta$$

$$\text{Kreis-Ende Ost } \alpha + 12^h = T + \Delta t - b \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta.$$

Hat man viele Sterne auf einmal zu berechnen, so ist die Mayersche Form nicht die bequemste, sondern man wendet dann mit mehr Vortheil die beiden anderen Formeln an. Wählt man dann die Besselsche Form, so hat man

$$n \operatorname{tang} \delta + c \sec \delta$$

an jede Beobachtung anzubringen und erhält dann den Uhrstand gleich:

$$\alpha - T - m.$$

Bei der Hansenschen Formel hat man

$$n [\operatorname{tang} \delta - \operatorname{tang} \varphi] + c \sec \delta$$

anzubringen und erhält dann den Uhrstand gleich:

$$\alpha - T - b \sec \varphi.$$

19. Die Näherungsformeln kann man nun auch direct ableiten. Ist das Kreisende im Westen und um b über dem Horizonte, so wird das Fernrohr sich nicht im Meridiane bewegen, sondern den gröſsten Kreis $A Z' B$ Fig. 14 pag. 465 beschreiben. Hat man dann den Stern O beobachtet, so muſs man zu der Zeit der Beobachtung noch den Stundenwinkel

$$\tau = O P O'$$

addiren. Es ist aber:

$$\sin \tau = \frac{\sin O O'}{\cos \delta}$$

und

$$\operatorname{tang} O O' = \operatorname{tang} b \cos O' Z = \operatorname{tang} b \cos(\varphi - \delta),$$

also auch:

$$\tau = b \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta}.$$



Steht ferner das Instrument in dem Azimute k, so wird sich das Fernrohr in dem Verticalkreise ZA Fig. 17 bewegen. Man hat aber wieder, wenn O der beobachtete Stern ist:

$$\sin OPO' = \sin \tau = \frac{\sin OO'}{\cos \delta}$$

und

$$\operatorname{tang} OO' = \operatorname{tang} k \sin O'Z,$$

mithin:

$$\tau = k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}.$$

Macht endlich die Gesichtslinie des Fernrohrs mit der Seite der Axe nach dem Kreisende zu den Winkel $90^0 + c$, so wird sich dieselbe in einem kleinen Kreise parallel mit der Ebene des Meridians bewegen, sodafs man dann zur beobachteten Zeit den Stundenwinkel:

$$\tau = \frac{OO'}{\cos \delta} = c \sec \delta$$

hinzuzulegen hat. (s. Fig. 15 pag. 465.)

Für die untere Culmination findet man die Formeln leicht auf dieselbe Weise.

20. Die Gesichtslinie des Fernrohrs des Passageninstruments ist wie immer durch die Richtung vom Mittelpunkte des Objectivs nach der Mitte des Fadenkreuzes bestimmt. Der senkrechte Faden stellt dann den Meridian dar, und an ihm werden die Durchgänge der Sterne beobachtet. Um nun aber den Beobachtungen eine gröfsere Sicherheit zu geben, beobachtet man die Antritte der Sterne nicht allein an diesem Mittelfaden, sondern man hat zu jeder Seite desselben noch eine Anzahl mit demselben paralleler Fäden, an denen man ebenfalls die Durchgänge nimmt. Damit man nun die Durchgänge immer an denselben Stellen der Fäden beobachtet, ist noch ein horizontaler, also gegen die vorigen senkrechter Faden eingezogen, in dessen Nähe man die Durchgänge nimmt. Diesen Faden stellt man dadurch genau horizontal, dafs man einen dem Aequator nahen Stern an demselben entlang durch das Feld gehen läfst und das Fadenkreuz mittelst zweier zu dem Zwecke angebrachten Schrauben so lange um die Axe des Fernrohrs bewegt, bis der Stern den Faden

bei seinem Durchgange durch das Feld nicht mehr verläfst. Stehen nun die Fäden zu beiden Seiten des Mittelfadens immer gleich viel von demselben ab, so wird das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen an allen Fäden die Zeit des Durchgangs durch den Mittelfaden sein. Gewöhnlich sind aber die Distanzen der Fäden etwas ungleich: überdies hat es ein Interesse aus jedem einzelnen Faden die Zeit des Durchgangs durch den Mittelfaden zu erhalten, indem man in der gröfseren oder geringeren Uebereinstimmung dieser Zeiten eine Prüfung der Güte der Beobachtungen hat. Man mufs daher auch die an den einzelnen Seitenfäden beobachteten Durchgangszeiten auf den Mittelfaden reduciren können, und dazu also die Distanzen der Fäden vom Mittelfaden kennen. Diese Distanz f eines Fadens vom Mittelfaden ist aber der Winkel am Mittelpunkte des Objectivs, welcher von der Richtung nach dem Mittelfaden und von der nach dem Seitenfaden gebildet wird. Nun war:

$$\sin(\tau - m)\cos n = \sin n \operatorname{tang} \delta + \sin c \sec \delta.$$

Hat man nun an einem Seitenfaden beobachtet, so ist jetzt der Winkel, welchen die Richtung von der Mitte des Objectivs nach diesem Seitenfaden mit der Axe nach dem Kreisende zu macht, gleich:

$$90^0 + c + f\text{*)},$$

wo f positiv oder negativ ist, je nachdem der Stern früher oder später an den Seitenfaden kommt als an den Mittelfaden. Ist dann τ' der östliche Stundenwinkel des Sterns zur Zeit seines Durchgangs durch den Seitenfaden, so hat man:

$$\sin(\tau' - m)\cos n = \sin n \operatorname{tang} \delta + \sin(c + f)\sec \delta,$$

und, wenn man von dieser Formel die erstere abzieht:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(\tau - \tau') \cos\left[\tfrac{1}{2}(\tau' + \tau) - m\right] \cos n = 2 \sin \tfrac{1}{2} f \cos\left[c + \tfrac{1}{2} f\right] \sec \delta.$$

Ist das Instrument nahe berichtigt, sodafs c, n und m kleine Gröfsen sind, so erhält man hieraus die folgende Näherungsformel, wenn man die Zeit $\tau - \tau'$, welche man zur Beobachtungszeit an einem Seitenfaden hinzuzulegen hat, um die Durchgangszeit durch den Mittelfaden zu erhalten, mit t bezeichnet:

$$\sin t = \sin f \sec \delta.$$

---

*) Siehe Fig. 16 pag. 468, wo O den Mittelpunkt des Objectivs, M den Ort des Mittelfadens und F den des Seitenfadens bezeichnet.

Für Sterne in der Nähe des Pols, für welche sec δ einen sehr grofsen Werth hat, mufs man sich dieser Formel bedienen; für Sterne, welche weiter vom Pole entfernt sind, reicht es dagegen hin, einfach

$$t = f \sec \delta$$

zu nehmen.

Will man die Zeiten des Durchgangs durch den Mittelfaden nicht aus den einzelnen Seitenfäden haben, so kann man auch einfach so verfahren. Sind f', f'', f''', etc. die Distanzen der auf der Seite des Kreisendes stehenden Fäden, φ', φ'', φ''', etc. dagegen die Distanzen der auf der andern Seite des Mittelfadens stehenden Fäden, so berechne man ein- für allemal:

$$\frac{f' + f'' + f''' \ldots - \varphi' - \varphi'' - \varphi''' \ldots}{n} = a,$$

wo n die Anzahl aller Fäden ist. Dann hat man zu dem arithmetischen Mittel aus den Beobachtungszeiten an allen Fäden die Gröfse

$$\pm a \sec \delta$$

hinzuzulegen, wo das obere Zeichen für Kreisende West, das untere für Kreisende Ost gilt. Für untere Culminationen hat man die Zeichen umgekehrt zu nehmen.

Die Gleichung

$$\sin t = \sin f \sec \delta$$

dient auch dazu, die Fädendistanzen selbst zu bestimmen, indem man die Durchgänge eines dem Pole nahen Sterns durch die Fäden beobachtet und dann

$$f = \sin t \cos \delta$$

berechnet, wo t der Unterschied der Durchgangszeiten durch den Seitenfaden und Mittelfaden, in Bogen verwandelt, ist. Auf diese Weise erhält man die Werthe der Fädendistanzen sehr genau. Für den Polarstern z. B. ist

$$\cos \delta = 0.02609,$$

also bringt ein Fehler von einer Zeitsecunde in dem Unterschiede der Durchgangszeiten erst einen Fehler von etwa $0^s.03$ Zeit in der Fädendistanz hervor.

Gaufs hat eine andre Methode, die Abstände der Fäden in Fernröhren zu bestimmen, vorgeschlagen.

Da nämlich Strahlen, welche parallel auf das Objectiv eines Fernrohres fallen, in dem Brennpunkte desselben ver-

einigt werden, so treten nach dem Reciprocitätsgesetze des Lichts Strahlen, welche von einem im Brennpunkte des Objectivs befindlichen leuchtenden Punkte kommen, parallel aus dem Objective aus. Gehen die Strahlen von verschiedenen Punkten aus, welche alle dem Brennpunkte nahe liegen, so sind dieselben nach ihrem Durchgange durch das Objectiv gegen einander so geneigt, wie die von jenen Punkten nach dem Mittelpunkte des Objectivs gezogenen geraden Linien. Stellt man nun vor dem Objectiv des Fernrohrs ein zweites auf, durch welches man Gegenstände, die unendlich weit entfernt sind, deren Strahlen also das Objectiv parallel treffen, deutlich sieht, so wird man durch dies zweite Fernrohr einen im Brennpunkte des ersteren befindlichen leuchtenden Punkt deutlich sehen. Ist daher im Brennpunkte des ersteren Fernrohrs ein System von Fäden, wie im Mittagsfernrohre, angebracht, so sieht man dasselbe durch das zweite Fernrohr deutlich, wenn die Fäden nur gehörig beleuchtet sind. Dies kann man aber immer einfach dadurch bewirken, daſs man das Ocular des ersteren Fernrohrs gegen den Himmel oder irgend einen hellen Gegenstand richtet. Ist dann das zweite Fernrohr mit einem Winkelinstrumente verbunden, durch welches man horizontale Winkel messen kann, so kann man damit die scheinbare Gröſse des Abstandes der Fäden ebenso wie andre Winkel messen.

Um das Fadenkreuz genau in den Brennpunkt des Objectivs zu bringen, ändert man zuerst die Stellung des Oculars gegen das Fadenkreuz so lange, bis man dasselbe vollkommen scharf sieht. Dann ist das Fadenkreuz in dem Brennpunkte des Oculars. Darauf stellt man das Fernrohr auf einen Stern ein und ändert die Stellung des ganzen das Fadenkreuz und das Ocular enthaltenden Theils des Instruments so lange gegen das Objectiv, bis man den Gegenstand deutlich sieht. Ist dies der Fall, so ist das Fadenkreuz im Brennpunkte. Um sich vollkommen davon zu überzeugen, stellt man einen Faden auf ein sehr entferntes irdisches Object ein und bewegt das Auge vor der Ocularöffnung nach rechts oder links. Dann darf das Bild des Objects das Fadenkreuz nicht verlassen. Ist dies aber nicht der Fall, so ist es ein Zeichen, daſs das Fadenkreuz nicht genau im

Brennpunkte steht, und zwar steht dasselbe zu weit vom Objectiv, wenn bei der Bewegung des Auges das Auge und das Bild des Gegenstandes sich nach derselben Seite vom Fadenkreuze entfernen. Gehen aber das Auge und das Bild nach verschiedenen Seiten, so ist das Fadenkreuz dem Objective zu nahe *).

Den 20sten Juni 1850 wurde der Polarstern bei seiner untern Culmination an dem Passageninstrumente der Bilker Sternwarte beobachtet, und es wurden die folgenden Durchgangszeiten durch die einzelnen Fäden erhalten:

Kreis West.

I	*II*	*III*	*IV*	*V*
$13^h\,32^m\,7^s$	$19^m\,4^s$	$13^h\,5^m\,7^s$	$52^m\,7^s$	$12^h\,38^m\,9^s$.

Es waren also die Unterschiede der Zeiten:

I — III	*II — III*	*III — IV*	*III — V*
$27^m\,0^s$	$13^m\,57^s$	$13^m\,0^s$	$26^m\,58^s$.

Da die Declination des Polarsterns an dem Tage

$$88^0\,30'\,18''.01$$

war, so findet man durch die Formel

$$f = \sin t \cos \delta$$

die folgenden Werthe der Fädendistanzen für den Aequator:
$I-III = 42^s.17$, $II-III = 21^s.84$, $III-IV = 20^s.34$, $III-V = 42^s.12$.

An demselben Tage wurde der Stern η Ursae majoris beobachtet:

		I	*II*	*III*	*IV*	*V*
η Urs. maj.	Obere Culm.	18.5	50.3	$13^h\,41^m\,24^s.3$	56.0	30.0.

Die Declination des Sterns ist $50^0\,4'$. Damit erhält man also die Fädendistanzen nach der Formel:

$$t = f \sec \delta$$

$I-III = 65^s.70$, $II-III = 34^s.02$, $III-IV = 31^s.69$, $III-V = 65^s.62$.

Da der Stern zuerst an den ersten Faden trat, so hat man die Fädendistanzen zu den Beobachtungen an den beiden ersten Fäden zu addiren und von den Beobachtungen

---

*) Besser noch beobachtet man hierzu den Polarstern in der Nähe des Fadenkreuzes. Da übrigens die Fädendistanzen nur so lange dieselben bleiben, als die Entfernung des Fadenkreuzes von der Mitte des Objectivs nicht geändert wird, so mufs man das Fadenkreuz vor der Bestimmung der Fädendistanzen genau in den Brennpunkt des Fernrohrs bringen und dann unverrückt in dieser Stellung lassen.

an den beiden letzten Fäden abzuziehen; man erhält also aus den Beobachtungen der einzelnen Fäden:

$$\begin{array}{r} 13^h\ 41^m\ 24^s.20 \\ 24\ .32 \\ 24\ .30 \\ 24\ .31 \\ 24\ .38 \\ \hline 13^h\ 41^m\ 24^s.30. \end{array}$$

Das Mittel aus allen Fädendistanzen für den Aequator, wenn man dieselben für Faden *I* und *II* (die auf der Seite des Kreisendes stehen) positiv, für Faden *IV* und *V* negativ nimmt, ist:

$$a = +0^s.31.$$

Nimmt man nun das Mittel aus den Beobachtungen des Sterns η Ursae majoris an den einzelnen Fäden, so erhält man:

$$13^h\ 41^m\ 23^s.82,$$

und wenn man dazu die Gröſse

$$a \sec\delta = +0^s.48$$

legt und zwar mit dem positiven Zeichen, weil der Stern bei Kreis West beobachtet wurde, so findet man für die Durchgangszeit durch den Mittelfaden im Mittel aus allen Fäden wie vorher:

$$13^h\ 41^m\ 24^s.30.$$

21. Hat das Gestirn eine eigne Bewegung, so muſs hierauf bei der Reduction von dem Seitenfaden auf den Mittelfaden Rücksicht genommen werden. Da aber ein solches Gestirn auch einen meſsbaren Durchmesser und eine Parallaxe hat, so soll jetzt der allgemeine Fall betrachtet werden, daſs man den Rand eines solchen Gestirns an einem Seitenfaden beobachtet hat und daraus die Durchgangszeit des Mittelpunkts des Gestirns durch den Meridianfaden herleiten will.

Es war vorher die Gleichung gefunden, welche für Kreis West gilt:

$$\sin c = -\sin n \sin\delta + \cos n \cos\delta \sin(\tau - m).$$

Ist nun das Gestirn an einem Seitenfaden beobachtet, dessen Distanz vom Mittelfaden f ist und wo f positiv zu nehmen ist, wenn sich der Faden auf der Seite des Kreisendes befindet, so hat man wie vorher $c+f$ statt f zu setzen. Wenn man aber nicht den Mittelpunkt, sondern den einen

Rand eines Gestirns beobachtet, dessen scheinbarer Halbmesser h' ist, so hat man in der vorigen Gleichung

$$c + f \pm h'$$

statt c zu nehmen, wo das obere Zeichen gilt, wenn der vorangehende, das untere, wenn der nachfolgende Rand beobachtet ist*). Ist dann Θ die Sternzeit des Antritts an den Faden und α' die scheinbare Rectascension des Gestirns, so ist der östliche Stundenwinkel

$$\tau = \alpha' - \Theta,$$

und man hat daher, wenn δ' die scheinbare Declination des Gestirns bezeichnet, die folgende Gleichung:

$$\sin[c + f \pm h'] = -\sin n \sin \delta' + \cos n \cos \delta' \sin[\alpha' - \Theta - m],$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn man den dem Mittelpunkte vorangehenden, das untere, wenn man den nachfolgenden Rand beobachtet hat. Bezeichnet man mit Δ die Entfernung des Gestirns vom Beobachter, wobei als Einheit die Entfernung vom Mittelpunkt der Erde zum Grunde liegt, so hat man auch:

$$\begin{aligned}\Delta \sin[c + f \pm h'] = &-\Delta \sin n \sin \delta' \\ &- \Delta \cos n \cos m \cos \delta' \sin(\Theta - \alpha') \\ &- \Delta \cos n \sin m \cos \delta' \cos(\Theta - \alpha'),\end{aligned}$$

oder da

$$c,\ n,\ m,\ f,\ h',$$

also auch $\Theta - \alpha'$ kleine Gröfsen sind, deren Sinus man mit dem Bogen vertauschen und deren Cosinus man gleich Eins setzen kann:

$$\Delta \cos \delta' (\alpha' - \Theta) = + \Delta . f \pm \Delta . h' + m \Delta . \cos \delta' + n \Delta . \sin \delta' + c \Delta.$$

Die scheinbaren Gröfsen kann man nun durch geocentrische ausdrücken. Man erhält nämlich nach den Formeln (a) in No. 4 des dritten Abschnitts, wenn man statt der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde die Horizontalparallaxe einführt:

$$\begin{aligned}\Delta \cos \delta' \cos \alpha' &= \cos \delta \cos \alpha - \varrho \sin \pi \cos \varphi' \cos \Theta \\ \Delta \cos \delta' \sin \alpha' &= \cos \delta \sin \alpha - \varrho \sin \pi \cos \varphi' \sin \Theta \\ \Delta \sin \delta' &= \sin \delta - \varrho \sin \pi \sin \varphi',\end{aligned}$$

woraus man leicht findet:

$$\begin{aligned}\Delta \cos \delta' \cos(\Theta - \alpha') &= \cos \delta \cos(\Theta - \alpha) - \varrho \sin \pi \cos \varphi' \\ \Delta \cos \delta' \sin(\Theta - \alpha') &= \cos \delta \sin(\Theta - \alpha)\end{aligned}$$

*) Hätte man nämlich den vorangehenden Rand am Mittelfaden beobachtet, so würde der Mittelpunkt an einem Seitenfaden, dessen $f = + h'$ wäre, in dem Augenblicke beobachtet sein.

oder, wenn $\Theta - \alpha$ ein kleiner Winkel ist:

$$\begin{aligned}\Delta \cos \delta' (\Theta - \alpha') &= \cos \delta (\Theta - \alpha) \\ \Delta \cos \delta' &= \cos \delta - \varrho \sin \pi \cos \varphi' \\ \Delta \sin \delta' &= \sin \delta - \varrho \sin \pi \sin \varphi'.\end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man noch mit einer für diesen Fall vollkommen genügenden Annäherung:

$$\Delta = 1 - \varrho \sin \pi \cos (\varphi' - \delta).$$

Zuletzt hat man noch, wenn man mit h den wahren, aus dem Mittelpunkte der Erde gesehenen Halbmesser des Gestirns bezeichnet:

$$\Delta h' = h.$$

Substituirt man nun diese Ausdrücke für die scheinbaren Gröſsen in die oben gefundene Gleichung für:

$$\Delta \cos \delta' (\alpha' - \Theta),$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}\cos \delta (\alpha - \Theta) = f [1 - \varrho \sin \pi \cos (\varphi' - \delta)] \pm h \\ + [\cos \delta - \varrho \sin \pi \cos \varphi'] [m + n \operatorname{tang} \delta' + c \sec \delta']\end{aligned}$$

oder

$$\alpha = \Theta \pm \frac{h}{\cos \delta} + f \frac{1 - \varrho \sin \pi \cos (\varphi' - \delta)}{\cos \delta} + \left[1 - \varrho \sin \pi \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta'}\right] [m + n \operatorname{tang} \delta' + c \sec \delta'], \qquad (a)$$

wo im letzten Gliede δ' statt δ beibehalten ist, weil dasselbe in dieser Form bequemer ist. Die scheinbare Declination δ' kann man aber immer mit einer hier völlig genügenden Genauigkeit von einigen Minuten an dem Einstellungskreise des Instruments ablesen. Ist dies nicht der Fall, so muſs man auch im letzten Gliede die wahren geocentrischen Gröſsen anwenden. Es ist aber das letzte Glied in der Gleichung für $\Delta \cos \delta' (\alpha' - \Theta)$:

$$+ m \Delta \cos \delta' + n \Delta \sin \delta' + c \Delta.$$

Setzt man hier für $\Delta \cos \delta'$, $\Delta \sin \delta'$ und Δ die vorher gefundenen Ausdrücke und führt dann folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}m' &= m - c \cos \varphi' \varrho \sin \pi \\ n' &= n - c \sin \varphi' \varrho \sin \pi \\ c' &= c - [m \cos \varphi' + n \sin \varphi'] \varrho \sin \pi,\end{aligned}$$

so werden die drei Glieder jetzt:

$$\cos \delta [m' + n' \operatorname{tang} \delta + c' \sec \delta],$$

mithin:

$$\alpha = \Theta \pm \frac{h}{\cos\delta} + f\,\frac{1 - \varrho \sin\pi \cos(\varphi' - \delta)}{\cos\delta} + m' + n' \operatorname{tang}\delta + c' \sec\delta. \quad (b)$$

Hat nun das Gestirn eine eigene Bewegung, so erhält man die Zeit, zu welcher das Gestirn im Meridiane war, aus der beobachteten Durchgangszeit Θ durch einen Seitenfaden, wenn man zu Θ die Zeit hinzulegt, die das Gestirn braucht, um den Stundenwinkel $\alpha - \Theta$ zu durchlaufen. Diese Zeit ist aber gleich diesem Stundenwinkel selbst dividirt durch $1 - \lambda$, wenn λ die Zunahme der Rectascension in Zeit in einer Secunde Sternzeit bedeutet. Setzt man nun:

$$\frac{1 - \varrho \sin\pi \cos(\varphi' - \delta)}{(1 - \lambda)\cos\delta} = F,$$

so wird also die Reduction auf den Meridian:

$$= \pm \frac{h}{(1 - \lambda)\cos\delta} + fF + \frac{m' + n' \operatorname{tang}\delta + c' \sec\delta}{1 - \lambda}$$

oder auch

$$= \pm \frac{h}{(1 - \lambda)\cos\delta} + fF + \frac{1 - \varrho \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta'}{1 - \lambda}\,[m + n \operatorname{tang}\delta' + c \sec\delta'].$$

Läfst man das Glied $\dfrac{h \sec\delta}{1 - \lambda}$ fort, so erhält man die Zeit der Culmination nicht für den Mittelpunkt, sondern für den beobachteten Rand. Läfst man dagegen auch im letzten Gliede den Nenner $1 - \lambda$ fort, so gilt die Rectascension des Randes des Gestirns, welche man durch die auf diese Weise gefundene Sternzeit der Culmination erhält, nicht für die Zeit der Culmination selbst, sondern für die beobachtete Zeit des Durchgangs durch den Mittelfaden. Da

$$1 - \varrho \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta'$$

immer nur wenig von der Einheit verschieden ist, so kann man unter der Voraussetzung, dafs m, n und c sehr klein sind, diesen Factor auch mit 1 vertauschen *).

In den Tabulis Regiomontanis hat nun Bessel eine Tafel gegeben, welche die Berechnung der Gröfse F für den Mond, auf welchen das Vorige hauptsächlich Anwendung findet, erleichtert. Diese Tafel giebt nämlich den Logarithmen von

$$1 - \varrho \sin\pi \cos(\varphi' - \delta)$$

mit dem Argumente:

$$\log \varrho \sin\pi \cos(\varphi' - \delta),$$

---

*) Vergl. über das Vorige: Bessel, Tabulae Regiomontanae pag. LII.

und das Complement der Logarithmen von $1 - \lambda$ mit dem Argumente der Aenderung der Rectascension in 12 Stunden mittlerer Zeit. Eine andere Tafel giebt den Logarithmen von F für die Sonne und die Gröfse $\frac{h}{(1-\lambda)\cos\delta}$, beide für jeden Tag des Jahres.

Hat man übrigens ein Gestirn, welches eine eigene Bewegung hat, an allen Fäden beobachtet und stehen diese in nahe gleichen Abständen zu beiden Seiten des Mittelfadens, so braucht man den Werth F nicht zu kennen, indem man einfach das Mittel der Fäden nimmt und dazu die kleine Correction legt, welche von der Ungleichheit der Fäden abhängt.

Beispiel. Am 13ten Juli 1848 wurden in Bilk die Antritte des ersten Mondrands an die fünf Fäden des Passageninstruments bei Kreis West beobachtet:

I	17^h	25^m	$42^s.9$
II		26	5 .0
III			28 .8
IV			51 .0
V		27	14 .8.

Die Distanzen der Fäden sind im Mittel aus vielen Beobachtungen:

I $42^s.23$ *II* $21^s.96$ *IV* $20^s.32$ *V* $42^s.30$.

Um nun aus den einzelnen Fäden die Zeit des Durchgangs durch den Mittelfaden zu haben, ist zuerst F zu berechnen. Es war aber an dem Tage:

$$\delta = -18^{\circ}\ 10'.6,$$

die Aenderung der Rectascension in einer mittleren Stunde:

$$129^s.8,\quad \pi = 55'\ 11''.0,\quad h = 60^s.15;$$

ferner ist für Bilk:

$\varphi' = 5$[illegible]$^{\circ}\ 1'.2$, $\log \varrho = 9.99912$.

Da nun eine Stunde mittlere Zeit gleich $3609^s.86$ Sternzeit, so erhält man:

$$\lambda = 0.03596,$$

und damit:

$$F = 0.03565.$$

Multiplicirt man mit diesem Factor die Fädendistanzen, so werden diese:

$45^s.84$ $23^s.84$ $22^s.06$ $45^s.92$.

Es werden also die Durchgangszeiten durch den Mittelfaden aus den einzelnen Seitenfäden:

$$17^h\,26^m\,28^s.74$$
$$28\ .84$$
$$28\ .80$$
$$28\ .94$$
$$28\ .88$$

im Mittel $17^h\,26^m\,28^s.84.$

Das Glied
$$+\frac{h}{(1-\lambda)\cos\delta}$$
wird gleich
$$+\,65^s.67,$$
also wird die Zeit des Durchgangs des Mittelpunkts des Mondes durch den Mittelfaden:
$$17^h\,27^m\,34^s.51.$$

An dem Tage war nun b und k, also auch m und $n = 0$, aber:
$$c = +\,0^s.09.$$
Nimmt man daher den Factor
$$\frac{1-\varrho\sin\pi\cos\varphi'\sec\delta'}{1-\lambda}$$
gleich 1, so erhält man die Zeit des Durchgangs des Mittelpunkts des Mondes durch den Meridian gleich:
$$17^h\,27^m\,34^s.60.$$

Ist die Parallaxe des Gestirns gleich Null oder doch sehr klein, wie z. B. bei der Sonne, so wird die Formel für die Reduction auf den Meridian einfacher. Dann wird nämlich:
$$F = \frac{1}{(1-\lambda)\cos\delta}.$$

Gewöhnlich beobachtet man bei der Sonne auch die Antritte der beiden Ränder an die einzelnen Fäden, und nimmt dann zuletzt das Mittel aus den Beobachtungen beider Ränder, sodafs man das Glied $\frac{h}{(1-\lambda)\cos\delta}$ nicht weiter zu berechnen hat.

22. Es ist nun noch zu zeigen, wie man die Fehler des Passageninstruments durch die Beobachtungen bestimmt.

Zuerst mufs man das Instrument nahe zu berichtigen suchen nach den in No. 5 des vierten Abschnitts gegebenen Methoden. Der Fehler der Neigung kann dann durch das Niveau nach No. 1 dieses Abschnitts genau bestimmt werden, nachdem man die Ungleichheit der Zapfen durch wiederholte Nivellirungen in beiden Lagen des Instruments ermittelt hat. Man kann die Neigung der Axe der Zapfen auch durch directe und reflectirte Beobachtungen eines dem Pole nahen Sternes bestimmen, z. B. des Polarsterns. Beob-

achtet man nämlich einen solchen Stern an mehreren Fäden und nennt T das Mittel aller auf den Mittelfaden reducirten Antrittszeiten, so hat man nach dem Vorigen für die obere Culmination die Gleichung:

$$\alpha = T + \Delta t + i\frac{\cos z}{\cos \delta} + k\frac{\sin z}{\sin \delta} \pm c \sec \delta,$$

wo für Kreisende West $i = b$, für Kreisende Ost $i = -b'$, wenn b und b' die Erhöhung des Kreisendes in beiden Lagen bezeichnet. Beobachtet man dagegen den Stern von einem künstlichen Horizonte reflectirt, wo also die Zenithdistanz $180^{\circ} - z$ ist, so hat man, wenn man das Mittel der auf den Mittelfaden reducirten Antrittszeiten mit T' bezeichnet:

$$\alpha = T' + \Delta t - i\frac{\cos z}{\cos \delta} + k\frac{\sin z}{\cos \delta} \pm c \sec \delta,$$

woraus sich ergiebt:

$$i = \frac{T' - T}{2} \cdot \frac{\cos \delta}{\cos z}.$$

Wegen des kleinen Factors $\cos \delta$ kann i durch solche Beobachtungen mit grofser Genauigkeit bestimmt werden.

Um nun den Fehler c zu finden, beobachtet man denselben Stern bei Kreis West und Kreis Ost, und zwar wählt man hierzu ebenfalls immer einen dem Pole sehr nahen Stern, α, δ oder λ Ursae minoris, einmal weil man bei anderen sich schneller bewegenden Sternen keine Zeit hat, um das Instrument zwischen den Beobachtungen der einzelnen Fäden umzulegen, dann aber auch, weil für solche Sterne der Coefficient $\sec \delta$ von c sehr grofs ist, also Fehler in den beobachteten Zeiten nur einen kleinen Einflufs auf die Bestimmung von c haben. Beobachtet man nun den Stern bei Kreis West an einigen Fäden, so hat man, wenn t die hieraus im Mittel gefundene Durchgangszeit durch den mittleren Faden bezeichnet, die schon wegen der Neigung corrigirt ist:

$$\alpha = t + \Delta t + k\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + c \sec \delta.$$

Legt man das Instrument um und beobachtet wieder denselben Stern bei Kreis Ost an einigen Fäden, so ist, wenn t' jetzt das Mittel der auf den mittleren Faden reducirten Beobachtungszeiten bezeichnet, und zwar wieder wegen der Neigung corrigirt:

$$\alpha = t' + \Delta t + k\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - c \sec \delta.$$

Aus beiden Gleichungen erhält man daher:

$$c = \frac{t' - t}{2} \cos \delta.$$

Hat man in der Richtung des Meridians im Horizonte des Fernrohrs ein sehr entferntes irdisches Object (Meridianzeichen), an welchem eine Scale angebracht ist, so kann man auch, wenn man die Gröfse der einzelnen Scalentheile in Secunden kennt, durch die Beobachtung des Objects in beiden Lagen des Kreises, den Collimationsfehler finden, da derselbe gleich der Hälfte der zwischen dem Mittelfaden in beiden Beobachtungen befindlichen Scalentheile ist. Besser ist zu diesem Zwecke noch ein Collimator. Ist das Fernrohr aufser den verticalen Fäden, die zur Beobachtung der Antritte der Sterne dienen, noch mit einem, denselben parallelen, beweglichen Mikrometerfaden versehen, dessen jedesmalige Stellung abgelesen werden kann, indem die Theile einer Umdrehung der Mikrometerschraube am Schraubenkopfe, die ganzen Umdrehungen dagegen durch eine am Ocularkopfe befindliche Scale gegeben werden, so kann man das Fernrohr in beiden Lagen des Instruments auf das Fadenkreuz des Collimators richten und den beweglichen Faden mit diesem Fadenkreuze zur Coincidenz bringen. Liefst man dann in den beiden Lagen für den beweglichen Faden die Stellungen a und b ab, so sieht man leicht, dafs $\frac{1}{2}(a+b)$ diejenige Stellung des beweglichen Fadens ist, in der die Linie von demselben nach dem Mittelpunkte des Objectivs senkrecht auf der Umdrehungsaxe des Fernrohrs ist. Beobachtet man daher auch die Coincidenz des beweglichen Fadens mit dem Mittelfaden und hat dafür die Ablesung C, so ist $C - \frac{1}{2}(a+b)$ oder $\frac{1}{2}(a+b) - C$ der Collimationsfehler, und das Zeichen desselben ist positiv zu nehmen, wenn der bewegliche Faden in der Stellung $\frac{1}{2}(a+b)$ vom Mittelfaden nach der dem Kreisende entgegengesetzten Seite absteht.

Hat man zwei einander gegenüber stehende Collimatoren, einen im Norden, den anderen im Süden des Fernrohrs, so kann man auch den Collimationsfehler mittelst dieser ohne Umlegung des Fernrohrs finden. Richtet man nämlich die beiden Collimatoren auf einander *) und bringt die Fadenkreuze zur

*) Damit dies möglich ist, wenn die Collimatoren im Horizonte des In-

Coincidenz, so sind die Axen der beiden Collimatoren parallel. Richtet man dann das Fernrohr des Kreises nach einander auf die beiden Collimatoren, bringt in jeder Lage den beweglichen Faden zur Coincidenz mit dem Fadenkreuze des Collimators und liefst wieder in beiden Lagen für die Stellungen des beweglichen Fadens a und b ab, so ist wie vorher $\frac{1}{2}(a+b) - C$ oder $C - \frac{1}{2}(a+b)$ der Collimationsfehler, und man entscheidet über das Zeichen desselben wie vorher.

Eine andre Methode zur Bestimmung des Collimationsfehlers setzt den Gebrauch des Collimations-Oculars voraus. Zu dem Ende stellt man unter das nach dem Nadir gerichtete Fernrohr einen künstlichen Horizont, wozu man sich gewöhnlich einer mit Quecksilber gefüllten Schaale, oder eines sogenannten Quecksilberhorizonts bedient*), weil sich die Oberfläche desselben von selbst horizontal stellt. Fällt nun die Collimationslinie des Fernrohrs nicht mit der Verticalen zusammen, so wird man neben dem Mittelfaden ein gespiegeltes Bild desselben erblicken, dessen Abstand vom Faden gleich der doppelten Abweichung der Collimationslinie von der Verticalen ist, die theils von dem Collimationsfehler, theils von der Neigung der Axe herrührt. Diese Abweichung kann man dann leicht finden, dadurch, dafs man den Abstand des gespiegelten Bildes vom Mittelfaden mittelst des beweglichen Fadens mifst**). Hierzu ist es am Besten den beweglichen

---

struments aufgestellt sind, werden nach Airy's Vorschlage, wie schon bei der Bestimmung der Biegung erwähnt war, in dem Würfel der Axe zwei einander gegenüberstehende Oeffnungen angebracht, durch die hindurch man bei verticaler Stellung des Instruments die beiden Collimatoren auf einander richten kann.

*) Am Besten ist es hierzu einen angequickten Horizont zu gebrauchen. Dieser besteht aus einer flachen kupfernen Schaale, die nach einer Kugelfläche von grofsem Radius ausgedreht ist. Nachdem man dieselbe mit einigen Tropfen Salpetersäure befeuchtet und mittelst etwas Baumwolle abgerieben hat, giefst man das Quecksilber hinein, das dann eine horizontale Oberfläche annimmt, die bei weitem ruhiger ist als die von reinem Quecksilber. Das sich auf der Oberfläche bildende Oxyd kann leicht vor der Beobachtung mit einem gefalteten Papiere abgestrichen werden, wodurch man eine vollkommen rein und schön spiegelnde Oberfläche erhält.

**) Für alle diese Bestimmungen ist es nöthig den Werth einer Schraubenumdrehung des beweglichen Fadens zu kennen; diesen kann man aber

Faden zuerst so zu stellen, dafs der Mittelfaden genau zwischen seinem reflectirten Bilde und dem beweglichen Faden steht, dann aber so, dafs das gespiegelte Bild genau zwischen dem Mittelfaden und dem beweglichen Faden steht. Da der bewegliche Faden auch ein gespiegeltes Bild zeigt, so sieht man in der ersten Stellung die zwei Fäden und die zwei gespiegelten Bilder neben einander in gleichen Entfernungen, in der andern Stellung einen Faden und ein Bild abwechselnd in gleichen Entfernungen. Der Unterschied der beiden Stellungen des beweglichen Fadens ist gleich dem dreifachen Abstande des gespiegelten Bildes vom Mittelfaden.

Um das Spiegelbild im Quecksilberhorizonte wahrzunehmen, ist es nöthig, dafs man Licht auf den Quecksilberhorizont so reflectirt, dafs man die Fäden auf hellem Grunde sieht. Dies kann dadurch bewirkt werden, dafs man gegenüber einer in der Ocularröhre angebrachten Seitenöffnung eine um 45° gegen die Axe des Fernrohrs geneigte Glasplatte anbringt, welche durch eben diese Oeffnung Licht empfängt. Es ist dabei, um ein gleichförmig beleuchtetes Feld zu erhalten, wie Gaufs zuerst angegeben hat, nothwendig, dafs aus diesem Oculare die vordere Linse nach dem Fadenkreuze zu herausgenommen ist. Da aber die Vertauschung des gewöhnlichen mit diesem Collimationsoculare immer lästig ist, so wird man es wohl immer bequemer finden, Bessel's Vorschlage zu folgen, der darin besteht, einfach ein geneigtes Planglas oder Prisma aufsen auf das gewöhnliche Ocular zu setzen und vermittelst desselben Licht nach den Fäden zu reflectiren. Man sieht dann freilich nur einen kleinen Theil des Gesichtsfeldes beleuchtet, indessen hat die Beobachtung des reflectirten Bildes keine Schwierigkeit, wenn nur die Glasplatte so eingerichtet ist, dafs man ihre Neigung gegen die Axe beliebig verändern kann.

Die Bestimmung des Collimationsfehlers geschieht dann auf folgende Weise. Es sei b die Neigung der Linie durch die Zapfenlager, positiv, wenn die Seite des Kreisendes die

---

leicht finden, wenn man das bekannte Interval zweier Fäden auch in Schraubenumdrehungen dadurch mifst, dafs man den beweglichen Faden mit jedem der beiden Fäden zur Coincidenz bringt.

höhere ist, ferner sei u die Ungleichheit der Zapfen in Secunden ausgedrückt und positiv, wenn der Zapfen auf der Seite des Kreisendes der dickere ist, endlich sei c der Collimationsfehler, positiv, wenn der Winkel, den das Kreisende der Axe mit der Gesichtslinie nach dem Objective zu macht, gröfser als 90° ist, so hat man wenn d die Distanz des reflectirten Bildes vom Mittelfaden bezeichnet, positiv, wenn das reflectirte Bild auf der Seite des Kreisendes vom Mittelfaden ist:

$$\tfrac{1}{2}d = b + u - c.$$

Wenn daher $b + u$ durch die Nivellirung bekannt ist, so giebt diese Gleichung den Collimationsfehler, oder die Neigung der Axe der Zapfen, wenn der Collimationsfehler anderweitig bekannt ist. Legt man das Instrument um und bezeichnet mit d' den Abstand des reflectirten Bildes vom Mittelfaden, wieder positiv genommen, wenn dasselbe auf der Seite des Kreisendes vom Mittelfaden ist, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}d' = -b + u - c,$$

und aus beiden Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} c - u &= -\tfrac{1}{4}(d + d') \\ b &= +\tfrac{1}{4}(d - d'), \end{aligned}$$

sodafs man also durch die Beobachtung des reflectirten Bildes in beiden Lagen c sowohl als auch die Neigung der Axe der Zapfen erhält, wenn die Ungleichheit der Zapfen bekannt ist.

Bei kleinen tragbaren Instrumenten, wo man vielleicht keinen beweglichen Faden hat, kann man den Collimationsfehler nach der vorigen Methode mittelst des Niveau's finden. Erhöht oder erniedrigt man nämlich das eine Ende der Axe durch die dazu dienenden Schrauben bis das gespiegelte Bild mit dem Fadenkreuze zusammenfällt, so ist dann $d = o$, mithin $c = b + u$. Findet man also $b + u$ durch die Nivellirung der Axe nach No. 3 dieses Abschnitts, so ist dieser Werth gleich dem Collimationsfehler.

An dem Meridiankreise in Ann Arbor wurden in zwei Lagen des Instruments folgende Beobachtungen gemacht:

Das Niveau gab für die Neigung der Axe der Zapfen bei Kreis West $b' = +2''.77$ und bei Kreis Ost $b'_1 = -2''.45$. Für den Abstand des reflectirten Bildes vom Mittelfaden

wurde gefunden in Theilen der Umdrehung der Mikrometerschraube:

$$\text{bei Kreis West } d = +0^r.2260$$
$$\text{und bei Kreis Ost } d' = -0.3107.$$

Daraus wird also:

$$c - u = +0^r.0212 = +0''.43$$
$$b = +0.1342 = +2''.73;$$

da eine Umdrehung der Schraube gleich 20''.33 ist, und da $u = +0''.17$ ist, so ergiebt sich:

$$c = +0''.60,$$

und die Neigung der Axe bei Kreis West $b' = +2''.90$ und bei Kreis Ost $b'_1 = -2''.56$.

Die Einstellung des Mittelfadens auf den nördlichen Collimator gab:

$$\text{bei Kreis West } 21^r.132,$$
$$\text{bei Kreis Ost } 21.999,$$

also ist $\frac{1}{2}(a+b) = 21.5655$, die Coincidenz der Fäden C war gleich $21^r.5397$ gefunden, und da man hier $\frac{1}{2}(a+b) - C$ zu nehmen hat, um den Collimationsfehler mit richtigem Zeichen zu erhalten, so wird

$$c = +0^r.0258 = +0''.52.$$

Endlich wurden noch die beiden Collimatoren auf einander gerichtet und bei Einstellung des Mittelfadens auf dieselben abgelesen:

für den südl. Collimator	$21^r.1190$
für den nördl. Collimator	22.0127
Also ist $\frac{1}{2}(a+b) =$	21.5658
$C =$	21.5397
$c = +$	$0^r.0261 = +0''.53.$

Nachdem nun die Neigung und der Collimationsfehler des Instruments gefunden sind, bleibt noch das Azimut desselben sowie der Stand der Uhr zu bestimmen übrig.

Zu dem Zwecke kann man die Beobachtungen zweier Sterne, deren Rectascensionen man kennt, mit einander verbinden. Hat die Uhr einen Gang, so mufs man zuerst den Stand der Uhr auf eine Zeit reduciren, indem man den Gang der Uhr zwischen den Beobachtungszeiten beider Sterne an die eine Zeit anbringt, damit in den aus beiden Beobachtungen hervorgehenden Gleichungen Δt denselben Werth hat. Sind dann t_0 und t'_0 die wegen der Neigung, des Collimationsfehlers und des Ganges der Uhr verbesserten Zeiten der

Durchgänge durch den Mittelfaden, so hat man die beiden Gleichungen:

$$\alpha = t_0 + \Delta t + k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$$

$$\alpha' = t'_0 + \Delta t + k \frac{\sin(\varphi - \delta')}{\cos \delta'},$$

aus denen man die beiden Unbekannten Δt und k bestimmen kann. Man erhält nämlich:

$$\alpha' - \alpha = t'_0 - t_0 + k \frac{\sin(\delta - \delta')}{\cos \delta \cos \delta'} \cos \varphi,$$

$$\text{also} \quad k = \frac{\alpha' - \alpha - (t'_0 - t_0)}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos \delta \cos \delta'}{\sin(\delta - \delta')}.$$

Den Stand der Uhr erhält man dann, wenn man k bestimmt hat, aus einer der ursprünglichen Gleichungen für α oder α'. Aus der Gleichung für k ersieht man, daſs es am Vortheilhaftesten ist, δ und δ' so verschieden als möglich zu nehmen, wo möglich so, daſs $\delta - \delta' = 90^0$ ist. Man wird daher am Besten einen dem Pole nahen Stern mit einem Aequatorsterne verbinden, weil dann der Divisor $\sin(\delta - \delta')$ nahe gleich Eins und der Zähler sehr klein wird. Kann man indessen keinen der Polarsterne beobachten, so muſs man einen nahe am Zenith culminirenden Stern mit einem andern, dessen Meridianhöhe klein ist, verbinden. Welche der beiden Methoden man aber auch wählt, so wird es immer vortheilhaft sein, mehr als zwei Sterne zu beobachten und die wahrscheinlichsten Werthe von Δt und k zu bestimmen.

Zu diesen Bestimmungen bedient man sich immer der Hauptsterne, deren Rectascension sehr genau bekannt ist und deren scheinbare Oerter zu dem Zwecke schon in den Jahrbüchern für jeden zehnten Tag angegeben sind. In diesen Ephemeriden ist nur die tägliche Aberration nicht berücksichtigt, weil diese von der Polhöhe abhängt. Da nun nach No. 19 des dritten Abschnitts die tägliche Aberration für die Culmination gleich

$$\pm 0''.3113 \cos \varphi \sec \delta,$$

wo das obere Zeichen für die obere Culmination, das untere für die untere Culmination gilt, so sieht man, daſs es am Bequemsten sein wird, diese Gröſse mit umgekehrtem Zeichen zu den Beobachtungszeiten hinzuzulegen, da sich dieselbe dann mit dem Collimationsfehler vereinigen läſst. Man berücksichtigt daher die tägliche Aberration, indem man in allen frü-

heren Formeln $c - 0''.3113 \cos \varphi$ statt c nimmt, oder in Zeit $c - 0^s.0208 \cos \varphi$ und $-(c + 0^s.0208 \cos \varphi)$ statt $-c$.

Die oben gegebenen Methoden zur Bestimmung des Azimuts werden in der Regel bei kleineren Instrumenten angewandt, wo man sich nicht auf den festen Stand des Instruments während einer längeren Zeit verlassen kann, überhaupt können sie angewandt werden, namentlich die erste, wenn man nur relative Bestimmungen zu machen beabsichtigt. Als ein vollständiges Beispiel der Bestimmung der Fehler für ein kleineres Instrument mag das folgende dienen:

Beispiel. Den 5ten April 1849 wurde am Passageninstrumente zu Bilk beobachtet:

Kreis West.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	Mittel
β Orionis	$54^s.8$	$15^s.3$	$5^h 8^m 37^s.4$	$58^s.0$	$20^s.1$	$5^h 8^m 37^s.44$
Polaris O	$38^m 13^s.0$	$51^m 14^s.0$	0^h			1 5 15 .25

$$b = -0^s.03.$$

Kreis Ost.

	II	*III*	Mittel
Polaris O	$19^m 26^s.0$	$1^h 5^m 25^s.0$	1 5 24 .57

$$b = +0^s.05.$$

Es waren aber die scheinbaren Oerter beider Sterne an dem Tage:

Polaris	$\alpha = 1^h 4^m 17^s.92$	$\delta = 88^\circ 30' 15''.5$
β Orionis	$\alpha' = 5\ 7\ 16\ .66$	$\delta' = -8\ 22\ .8.$

Bringt man nun zuerst die Correction wegen der Neigung an, so erhält man für die Durchgangszeiten durch den Mittelfaden:

Kreis West	β Orionis	$5^h 8^m 37^s.42$
	Polaris	1 5 14 .33
Kreis Ost	Polaris	1 5 23 .05.

Aus den Beobachtungen des Polarsterns bei Kreis West und Kreis Ost erhält man ferner den Collimationsfehler

$$= + 0^s.114,$$

und da die tägliche Aberration für Bilk gleich $0^s.013 \sec \delta$ ist, so hat man also mit Rücksicht hierauf für den Collimationsfehler bei Kreis West zu nehmen $+0^s.101$, bei Kreis Ost dagegen $+0^s.127$. Corrigirt man nun die Beobach-

tungen bei Kreis West wegen des Collimationsfehlers, so findet man:

$$\beta \text{ Orionis} = t'_0 = 5^h\, 8^m\, 37^s.52$$
$$\text{Polaris} = t_0 = 1\;\; 5\;\; 18\;.20.$$

Es ist also

$$t'_0 - t_0 = 4^h\, 3^m\, 19^s.32 \qquad \alpha' - \alpha = 4^h\, 2^m\, 58^s.74,$$

und da

$$\varphi = 51^0\, 12'.5$$

ist, so erhält man daraus

$$k = -0^s.85.$$

Die wegen der Fehler des Instruments corrigirte Beobachtungszeit von β Orionis ist also

$$5^h\, 8^m\, 36^s.78,$$

mithin

$$\Delta t = -1^m\, 20^s.12.$$

Die vorigen Methoden für die Bestimmung von k haben den Nachtheil, dafs dieselbe von den Oertern der Sterne abhängt. Für feste Instrumente, mit denen man absolute Bestimmungen macht, ist es aber wünschenswerth, die Bestimmung von k unabhängig von den Fehlern der Rectascension der Sterne zu erhalten. Dazu dienen die Beobachtungen desselben Sterns in der oberen und unteren Culmination. Da dann $\alpha' - \alpha = 12^h + \Delta\alpha$ und $\delta' = 180^0 - \delta$ wird, wo $\Delta\alpha$ die Aenderung der Rectascension in der Zwischenzeit ist, so geht in diesem Falle die vorher für k gefundene Formel über in:

$$k = \frac{12^h + \Delta\alpha - (t'_0 - t_0)}{\cos\varphi} \cdot \frac{\cos\delta^2}{\sin 2\delta}$$
$$= \frac{12^h + \Delta\alpha - (t'_0 - t_0)}{2\cos\varphi \operatorname{tang}\delta}.$$

Auch hier ist es wieder am Vortheilhaftesten, einen der dem Pole nahen Sterne in beiden Culminationen zu beobachten, weil dann der Divisor tang δ am gröfsten wird. Uebrigens setzt die Methode voraus, dafs man des festen Standes des Instruments während zwölf Stunden versichert ist, oder dafs man die Aenderung im Azimut, wenn eine solche stattfindet, bestimmen kann.

Um nicht nöthig zu haben, das Azimut immer von Neuem durch Beobachtungen des Polarsterns zu finden, errichtet man zuweilen in grofser Entfernung von dem Instrumente ein Meridianzeichen, d. h. eine auf fester Grundlage ruhende steinerne

Säule mit einer getheilten Scale im Horizonte des Instruments. Bestimmt man dann durch wiederholte Beobachtungen des Polarsterns denjenigen Punkt der Scale, welcher dem Meridiane entspricht, so kann man nachher immer durch bloſse Einstellung des Instruments auf die Scale das Azimut finden, solange die Lage der Scale unverrückt dieselbe bleibt und vorausgesetzt, daſs man den Collimationsfehler kennt oder das Instrument umlegt und in beiden Lagen auf die Scale einstellt, da die Abweichung des Mittelfadens vom Meridianpunkte der Mire in einer Lage des Instruments gleich $k+c$, in der anderen dagegen gleich $k-c$ ist. Die Entfernung der Mire muſs aber groſs sein, wenn man groſse Genauigkeit erreichen will, da ein Zoll erst in der Entfernung von 17188 Fuſs unter einem Winkel von einer Secunde erscheint und dann eine Verrückung der Mire um $\frac{1}{10}$ Zoll schon einen Fehler von $0''.1$ in der Bestimmung des Azimuts erzeugen würde. Diese groſse Entfernung macht aber die Beobachtungen wieder ungenau, indem der Zustand der Luft nie ein ruhiges Bild der Mire im Fernrohr erlauben wird. Da auſserdem die Beobachtung einer solchen Mire auf die Tagesstunden beschränkt ist, so hat Struve eine andere Art von Mire vorgeschlagen und auf der Sternwarte zu Pulkowa eingeführt. Dem Fernrohre des Instruments gegenüber ist nämlich ein Objectiv von sehr groſser Brennweite (Struve wendet Linsen von etwa 550 Fuſs Brennweite an) fest aufgestellt, so daſs seine Axe mit der des Fernrohrs in der horizontalen Lage zusammenfällt. Im Brennpunkte dieses Objectivs ist die Mire, die aus einem in einer senkrechten Messingplatte befindlichen Loche besteht, das im Fernrohre des Kreises als ein kleiner, scharf begrenzter Kreis erscheint. Das Objectiv ist auf einem isolirten Pfeiler mit der gröſsten Sorgfalt befestigt und durch geeignete Bedeckungen möglichst gegen jede Veränderung geschützt. Ebenso ist die Mire in einem eigenen Häuschen auf einem isolirten Pfeiler mit gleicher Sorgfalt aufgestellt. Da somit für beide dieselben Vorsichtsmaſsregeln getroffen werden, die für die Aufstellung des Instruments selbst angewandt sind, so läſst sich erwarten, daſs die Aenderungen beider ebenso klein sein werden als die der beiden Zapfenlager des Instruments. Weil aber die Erfahrung lehrt, daſs bei

einem sorgfältig aufgestellten Instrumente die Aenderung des Azimuts nicht eine Bogensecunde im Laufe eines Tages übersteigt, so wird die etwaige Veränderung der Collimationslinie der Mire (d. h. der Linie vom Mittelpunkte des Miren-Objectivs nach dem Mittelpunkte der Marke) in demselben Verhältnifs kleiner sein als die Länge der Axe kleiner ist als die Brennweite des Miren-Objectivs. Ist daher die Länge der Axe z. B. drei Fufs, die Brennweite des Objectivs 550 Fufs, so wird man höchstens Aenderungen von $\frac{1}{183}$ Secunde erwarten können. Der Hauptvortheil einer solchen Mire ist der, dafs man dieselbe zu jeder Zeit zur Controlle der unveränderlichen Lage des Instruments in der Zwischenzeit der Beobachtungen, die für die Bestimmung der Fehler des Instruments dienen, anwenden kann. Hat man zwei solcher Miren, die eine südlich, die andere nördlich vom Fernrohre, so erhält man durch die Beobachtung beider die Aenderung des Azimuts sowohl als die Aenderung des Collimationsfehlers, während die Beobachtung einer nur die Aenderung der Gesichtslinie giebt, also die Bestimmung der Aenderung des Collimationsfehlers durch andere Mittel voraussetzt. Sind dann die Ablesungen der nördlichen und südlichen Mire a und b und zu einer anderen Zeit a' und b' und nimmt man dieselben positiv, wenn der Mittelfaden östlich von der Mire im Fernrohre steht, so erhält man die Aenderung dc und da des Collimationsfehlers und des Azimuts aus den Gleichungen:

$$dc = \frac{a' - a + (b' - b)}{2}$$

$$da = \frac{b' - b - (a' - a)}{2}.$$

wo man dc mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen hat, wenn das Kreisende östlich ist.

23. Ist das Passageninstrument mit einem Höhenkreise verbunden, um zugleich mit den Durchgangszeiten durch den Meridian die Zenithdistanzen oder die Declinationen der Sterne zu bestimmen, so nennt man dasselbe einen Meridiankreis.

Stellt man an einem solchen Instrumente den Stern in einiger Entfernung vom Mittelfaden ein, so giebt der durch das Instrument erhaltene Winkel nicht die Meridianzenithdistanz oder Declination des Sterns, da der horizontale Faden

die Himmelskugel in einem gröſsten Kreise schneidet, während der Stern einen kleinen Kreis beschreibt. Man muſs daher an den abgelesenen Winkel eine Correction anbringen.

Die Coordinaten eines Punktes der Himmelskugel, bezogen auf ein Axensystem, dessen Grundebene der Aequator ist und dessen Axe der x senkrecht auf der Umdrehungsaxe des Instruments steht, sind:

$$x = \cos\delta \cos(\tau - m), \quad y = -\cos\delta \sin(\tau - m) \quad \text{und} \quad z = \sin\delta.$$

Denkt man sich nun ein zweites Coordinatensystem, dessen Axe der x mit der vorigen zusammenfällt, während die Axe der y mit der horizontalen Axe des Instruments parallel ist, so sind die drei Coordinaten eines Punktes, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist, wenn man mit δ' den vom Fernrohre durchlaufenen, d. h. den am Kreise abgelesenen Winkel bezeichnet und bedenkt, daſs das Fernrohr einen kleinen Kreis an der Himmelskugel beschreibt, dessen Halbmesser $\cos c$ ist:

$$x = \cos\delta' \cos c, \quad y = -\sin c \quad \text{und} \quad z = \sin\delta' \cos c.$$

Da nun die Axen der y in beiden Systemen den Winkel n mit einander bilden, so erhält man nach den Formeln für die Transformation der Coordinaten:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= -\sin c \sin n + \cos c \cos n \sin\delta' \\ \cos\delta \cos(\tau - m) &= \sin\delta' \cos c \\ \cos\delta \sin(\tau - m) &= \sin\delta' \cos c \sin n + \sin c \cos n, \end{aligned}$$

also:

$$\operatorname{cotang}\delta \cos(\tau - m) = \frac{\cos\delta' \cos c}{-\sin n \sin c + \cos n \cos c \sin\delta'}.$$

Diese Gleichung könnte man in eine Reihe entwickeln; da n aber immer sehr klein ist und auch c, selbst wenn man an einem entfernten Seitenfaden einstellt, doch nicht über 15 oder 20 Minuten beträgt, so kann man einfach schreiben:

$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}\delta' \cos(\tau - m),$$

und erhält dann nach Formel (17) der Einleitung:

$$\delta = \delta' - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\tau - m)^2 \sin 2\delta + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}(\tau - m)^4 \sin 4\delta.$$

Diese Gleichung formt man nun noch so um, daſs die Coefficienten

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\tau - m)^2 \quad \text{und} \quad 2\sin\tfrac{1}{2}(\tau - m)^4$$

enthalten, weil man diese Gröſsen aus den schon früher erwähnten Tafeln (V No. 7) entnehmen kann.

Man schreibt nämlich für

$$\tang \tfrac{1}{2} (\tau - m)^2$$

jetzt:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (\tau - m)^2}{1 - \cos \frac{1}{2} (\tau - m)^2}$$

und entwickelt diesen Ausdruck in die Reihe:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\tau - m)^2 + \sin \tfrac{1}{2} (\tau - m)^4 + \ldots$$

und da nun ebenso:

$$\tfrac{1}{2} \tang \tfrac{1}{2} (\tau - m)^4 = \tfrac{1}{2} \sin \tfrac{1}{2} (\tau - m)^4 + \ldots,$$

so wird:

$$\delta = \delta' - 2 \sin \tfrac{1}{2} (\tau - m)^2 \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2\delta - 2 \sin \tfrac{1}{2} (\tau - m)^4 \cos \delta^2 \sin 2\delta,$$

wo man gewöhnlich mit dem ersten Gliede ausreicht.

Die Zeichen dieser Formel gelten für den Fall, daſs die Theilung an dem Kreise in demselben Sinne gezählt wird wie die Declinationen, und daſs man einen Stern in der oberen Culmination beobachtet hat.

Wird die Theilung in entgegengesetztem Sinne gezählt, so wird die corrigirte Ablesung:

$$\delta' + 2 \sin \tfrac{1}{2} (\tau - m)^2 \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2\delta + 2 \sin \tfrac{1}{2} (\tau - m)^4 \cos \delta^2 \sin 2\delta.$$

Da nun die Theilung der Kreise in einem Sinne von 0^0 bis 360^0 fortgeht, so wird, wenn bei der oberen Culmination die Theilung im Sinne der Declinationen gezählt wird, dies für die untere Culmination nicht der Fall sein. Man hat daher für untere Culminationen die Zeichen der Correction zu ändern.

Fig. 18.

P

O''
O'
O

S

Man kann die genäherte Formel auch einfach so ableiten. Es sei PO' Fig. 18 der Meridian, O ein Stern auſserhalb desselben in dem Stundenwinkel t. Stellt man diesen Stern am Meridiankreise auf den horizontalen Faden, so beobachtet man die Polardistanz PO', wo man den Punkt O' findet, wenn man sich durch O einen auf PS senkrechten Kreis gelegt denkt. Man hat dann also $PO' = 90^0 - \delta'$, $PO = 90^0 - \delta$, daher:

$$\tang \delta = \cos t \,.\, \tang \delta'.$$

Ist nun aber der Horizontalfaden nicht dem Aequator parallel, sondern macht derselbe mit dem Meridiane den Winkel $90^0 + J$, wo J die Neigung der Fäden ist, so beobachtet man die Polardistanz PO'', wo man O'' findet, wenn man durch O einen gröſsten Kreis legt,

der mit dem Meridiane den Winkel $90^0 + J$ macht. Bezeichnet man wieder die beobachtete Declination mit δ', so hat man jetzt, wenn man $O\,O'' = c$ setzt:

$$\sin c \sin J = -\sin\delta\cos\delta' + \cos\delta\sin\delta'\cos t$$
$$\sin c \cos J = \cos\delta\sin t,$$

daher durch Division beider Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}\delta'\left[\cos t - \sin t\,\frac{J}{\sin\delta'}\right]$$
$$= \operatorname{tang}\delta'\cos(t+y),$$

wenn man setzt:

$$y = \frac{J}{\sin\delta'}.$$

Ist $J = 0$, so giebt die Formel einfach die Reduction auf den Meridian. Diese Reduction plus der Correction wegen der Neigung der Fäden ist aber, wenn man nur das erste Glied mitnimmt:

$$\delta - \delta' = -\tfrac{1}{2}\sin 2\delta\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}(t+y)^2.$$

Um die Neigung der Fäden zu bestimmen, beobachtet man einen dem Pole nahe stehenden Stern, indem man denselben so weit als möglich vom Mittelfaden auf beiden Seiten desselben einstellt. Jede solche Beobachtung giebt nämlich eine Gleichung:

$$\delta = \delta' - \tfrac{1}{2}\sin 2\delta\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}t^2 - \cos\delta\sin t\,.\,J,$$

wo man auch noch das zweite Glied, das $\sin\frac{1}{2}t^4$ enthält, mitnimmt, wenn es nöthig ist. Man kann daher aus zwei solchen Gleichungen δ und J bestimmen, oder wenn man mehr als zwei Einstellungen gemacht hat, aus allen die wahrscheinlichsten Werthe von J und $\Delta\delta$ bestimmen, indem man für δ den Werth δ_0 annimmt, sodafs $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$ wird, wodurch die obige Gleichung übergeht in:

$$0 = \delta_0 - \delta' + \tfrac{1}{2}\sin 2\delta\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}t^2 + \Delta\delta + \cos\delta\sin t\,.\,J.$$

Man findet nun auch leicht die Correction der beobachteten Declination für den Fall, dafs man ein Gestirn beobachtet hat, welches einen Halbmesser, eine Parallaxe und eine eigene Bewegung hat, wie dies z. B. beim Monde der Fall ist. Hat man ein solches Gestirn an einem Seitenfaden beobachtet, so hat man nach dem Vorigen die Gleichungen:

$$\cos c\cos\delta' = \cos\delta\cos(\tau - m)$$
$$\cos c\sin\delta' = \cos\delta\sin(\tau - m)\sin n + \sin\delta\cos n.$$

Hier ist δ die scheinbare Declination des eingestellten Punktes des Randes und τ der östliche Stundenwinkel des

Punktes zur Zeit der Beobachtung, δ' die am Kreise abgelesene Declination dieses Punktes. Nennt man nun aber δ die scheinbare Declination des Mittelpunktes des Mondes, τ den scheinbaren Stundenwinkel desselben, so erhält man, je nachdem man den oberen oder unteren Rand eingestellt hat:

$$\cos c \cos (\delta' \mp x) = \cos \delta \cos (\tau - m)$$
$$\cos c \sin (\delta' \mp x) = \cos \delta \sin (\tau - m) \sin n + \sin \delta \cos n,$$

wo

$$\sin x \cos c = \sin h'$$

ist, wenn man mit h' den scheinbaren Halbmesser des Mondes bezeichnet *). Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn man statt $\cos c \sin x$ den Werth $\sin h'$ setzt, $\cos c \cos x$ eliminirt und die entstandene Gleichung mit Δ multiplicirt, wo Δ das Verhältniſs der Entfernung des Gestirns vom Beobachtungsorte zur Entfernung vom Mittelpunkte der Erde bezeichnet:

$$\begin{aligned} \pm \Delta \sin h' = &\quad \Delta \cos \delta \sin \delta' \cos (\tau - m) \\ &- \Delta \cos \delta \cos \delta' \sin (\tau - m) \sin n \\ &- \Delta \sin \delta \cos \delta' \cos n, \end{aligned}$$

oder, da man die Gröſse $\sin (\tau - m) \sin n$ vernachlässigen und $\cos n$ gleich Eins nehmen kann:

$$\begin{aligned} \pm \Delta \sin h' = &\quad \Delta \cos \delta . \sin \delta' \cos (\tau - m) \\ &- \Delta \sin \delta . \cos \delta'. \end{aligned}$$

Drückt man nun die scheinbaren Gröſsen durch geocentrische aus, indem man setzt:

$$\Delta \sin h' = \sin h$$
$$\Delta \cos \delta = \cos \delta_0 - \varrho \sin \pi \cos \varphi'$$
$$\Delta \sin \delta = \sin \delta_0 - \varrho \sin \pi \sin \varphi',$$

so erhält man leicht:

$$\begin{aligned} &\pm \sin h - \varrho \sin \pi \sin (\varphi' - \delta') \\ &\qquad = \sin (\delta' - \delta_0) - \cos \delta_0 \sin \delta' \tfrac{1}{2} (\tau - m)^2 \frac{1}{206265^2} . \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die Zeit der Beobachtung mit Θ, die Culminationszeit des Mittelpunkts des Gestirns mit Θ_0, so ist:

$$\tau = \Theta - \Theta_0 .$$

*) Man findet dies sogleich, wenn man das rechtwinklige Dreieck betrachtet, welches vom Pole des Kreises des Instruments, dem Mittelpunkte des Mondes und dem eingestellten Punkte des Randes gebildet wird. In diesem ist der Winkel am Pole des Kreises gleich x, die gegenüberstehende Cathete gleich h'.

Hat aber das Gestirn eine eigene Bewegung in Rectascension und ist λ die Zunahme derselben in einer Secunde, so ist, wenn $\Theta - \Theta_0$ in Zeitsecunden ausgedrückt ist:

$$\tau = (\Theta - \Theta_0)(1 - \lambda) \,.\, 15.$$

Vernachlässigt man nun in $(\tau - m)^2$ die kleine Gröſse m und setzt

$$\sin p = \varrho \sin \pi \, (\varphi' - \delta'),$$

so erhält man:

$$\sin(\delta_0 - \delta') = \sin p \mp \sin h - \tfrac{1}{4} \sin 2\,\delta' (\Theta - \Theta_0)^2 \, (1 - \lambda)^2 \, \frac{15^2}{206265^2} \,.$$

Nun ist

$$\sin(p \pm h) = \sin p \pm \sin h - 2 \sin p \, \tfrac{1}{2} \, h^2 \mp 2 \sin h \sin \tfrac{1}{2} \, p^2,$$

also:

$$\sin p \pm \sin h = \sin(p \pm h) \pm \frac{p \pm h}{2} \sin p \sin h \, \frac{1}{206265} \,,$$

mithin endlich:

$$\delta_0 = \delta' + p \mp h \mp \frac{(p \mp h)}{2} \sin p \sin h$$
$$- \frac{15^2}{4} \cdot \frac{1}{206265} \sin 2\,\delta' (1 - \lambda)^2 \, (\Theta - \Theta_0)^2.$$

Dies ist die von Bessel in der Vorrede zu den Tabulis Regiomontanis pag. LV gegebene Formel. Das letzte Glied dieser Formel ist nichts weiter als das erste Glied der vorher gefundenen Reductionsformel auf den Meridian mal $(1 - \lambda)^2$.

Die gefundene wahre Declination des Mittelpunkts des Mondes gilt nun für die Zeit Θ. Will man dieselbe für eine andre Zeit Θ' haben, so muſs man noch das Glied:

$$+ \frac{d\delta}{dt} (\Theta' - \Theta)$$

hinzufügen, wo $\frac{d\delta}{dt}$ die Aenderung der Declination des Gestirns in der Einheit der Zeit bezeichnet.

24. Damit die Beobachtungen mit dem Meridiankreise die wahren Differenzen der Declinationen oder Zenithdistanzen geben, müssen die Ablesungen des Kreises wegen der Theilungsfehler und auch wegen der Biegung des Fernrohrs und des Kreises corrigirt werden. Diese Fehler müssen daher nach No. 7 und 8 dieses Abschnitts bestimmt und an die Ablesungen angebracht werden. Endlich muſs auch der Zenithpunkt oder der Polpunkt des Kreises bestimmt werden, wenn man Zenithdistanzen oder unmittelbar die Polardistan-

zen der Sterne bestimmen will. Um den Polpunkt zu erhalten, mufs man einen der Polarsterne in der oberen und unteren Culmination beobachten. Befreit man die Ablesungen von der Refraction und den Fehlern der Biegung und Theilung, so ist die halbe Summe der Ablesungen gleich dem Polpunkte des Kreises, vorausgesetzt dafs die Lage der Mikroskope gegen den Kreis sich nicht geändert hat. Da aber die Prüfung dieser Unveränderlichkeit und die Bestimmung der Aenderung selbst am Besten durch die Beobachtung des Nadirpunktes zur Zeit beider Beobachtungen gemacht wird, so ist es am Einfachsten und zugleich Genauesten, alle Beobachtungen auf den Zenithpunkt zu beziehen, d. h. die Zenithdistanzen der Sterne zu bestimmen und daraus mittelst der Polhöhe die Declinationen abzuleiten.

Der Nadirpunkt wird, wie schon früher gezeigt war, dadurch bestimmt, dafs man unter das nach dem Nadir gerichtete Fernrohr einen Queeksilberhorizont stellt und das reflectirte Bild des Horizontalfadens mit dem Faden selbst zur Coincidenz bringt. Gewöhnlich hat ein solches Instrument zwei horizontale Fäden in einem Abstande von etwa 10 Secunden, zwischen welchen man die Sterne genau in die Mitte stellt. Man stellt dann auch bei der Beobachtung des Nadirpunktes die reflectirten Bilder der Fäden nach einander in die Mitte der Fäden und liest den Kreis in beiden Lagen ab, wo dann das arithmetische Mittel der beiden Ablesungen gleich dem Nadirpunkte des Instruments ist. Nach den Gleichungen (*B*) in No. 8 dieses Abschnitts erhält man dann die Zenithdistanzen der Sterne frei von Biegung und, wenn man die Ablesungen z, z', etc. auch wegen der Theilungsfehler corrigirt, auch von diesen frei. In aller Strenge würde es erforderlich sein, die Bestimmung des Nadirpunktes bei der Beobachtung jedes Sterns zu machen, da indessen die durch die Aenderungen der Mikroskope hervorgehenden Aenderungen des Nadirpunktes klein sind und langsam vor sich gehen, so ist es genügend, den Nadirpunkt von Zeit zu Zeit zu bestimmen und den wirklich stattfindenden Nadirpunkt für die zwischenliegenden Beobachtungen zu interpoliren. Dadurch können dann die Aenderungen der Mikroskope so gut wie vollständig eliminirt werden, und da die Beobachtung des Nadir-

punkts so einfach ist und sich zugleich mit grofser Genauigkeit machen läfst, so ist diese Methode der Bestimmung der Zenithdistanzen gewifs die beste.

Man kann sich indessen für die Bestimmung des Zenithpunktes auch horizontaler Collimatoren, deren einer nördlich, der andre südlich vom Fernrohre aufgestellt ist, bedienen. Zu dem Ende sind die Collimatoren so eingerichtet, dafs die Collimationslinie des Fernrohrs mit der Umdrehungsaxe derselben zusammenfällt. Das Fernrohr hat nämlich zwei genau kreisrund gedrehte Ringe von Glockenmetall, mit denen es in den rechtwinkligen Lagern aufliegt. Diese Lager haben die gewöhnlichen Correctionsschrauben in Azimut und Höhe, zugleich hat das Fadenkreuz Correctionsschrauben, um dasselbe in zwei auf einander senkrechten Richtungen vertical zur Axe des Fernrohrs zu bewegen. Nachdem dann die Collimatoren dem Fernrohr genau gegenüber aufgestellt sind, berichtigt man zuerst die Collimationslinie der Fernröhre so, dafs dieselbe mit der Umdrehungsaxe zusammenfällt. Dies geschieht, indem man den einen Collimator auf den anderen richtet und um 180° um seine Axe dreht. Behält das Fadenkreuz seine Lage gegen das Fadenkreuz des andern, so ist die Collimationslinie berichtigt, im anderen Falle verstellt man das Fadenkreuz mittelst der Correctionsschrauben solange, bis die Unveränderlichkeit der Lage bei der Umdrehung des Fernrohrs um die Axe erreicht ist. Die Neigung der Axe und also auch der Collimationslinie gegen den Horizont des Collimators wird dann mittelst des Niveau's gefunden, und da man den Collimator so umlegen kann, dafs das Objectiv auf die Seite kommt, wo vorher das Ocular war, so kann auch die Ungleichheit der Zapfen auf die gewöhnliche Weise bestimmt und in Rechnung gebracht werden. Um nun den Horizontalpunkt des Kreises zu beobachten, nivellirt man den Collimator, richtet das Fernrohr des Kreises auf denselben und liest die Mikroskope ab. Darauf dreht man den Collimator um 180° um seine Axe, um einen etwaigen Fehler in der Collimationslinie zu eliminiren, nivellirt wieder und liest nach der Einstellung des Fernrohrs die Mikroskope ab. Macht man dieselben Operationen auch für den anderen Collimator und sind a und b die Mittel aus den

zwei Ablesungen für jeden Collimator, schon wegen der Neigung des Collimators corrigirt, so ist $\frac{a+b}{2}$ der Zenithpunkt des Kreises *), wenn die Collimatoren in gleicher Entfernung vom Instrumente sind. Ist x die Erhöhung des Objectivendes des Collimators, schon wegen der Ungleichheit der Zapfen corrigirt, so ist die Zenithdistanz des Fernrohrs, wenn es auf den Collimator gerichtet ist, abgesehen von der Neigung der Verticallinien beider Instrumente, $90'' + x$, und man mufs daher x von der Ablesung subtrahiren oder dazu addiren, je nach der Richtung der Theilung.

Diese Methode ist aber umständlicher als die Beobachtung des Nadirpunktes und wegen der Nivellirungen auch wohl nicht so genau, weshalb die andre immer den Vorzug verdient.

Die Polhöhe bestimmt man am Besten durch directe und reflectirte Beobachtungen der Circumpolarsterne. Man erhält nämlich aus solchen Beobachtungen in einer Culmination nach den Gleichungen (B) in No. 8 dieses Abschnitts:

$$90^{\circ} - \zeta = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{z' - z}{2} + \frac{z'' - z'''}{2}\right\} - b'' \sin 2z - \ldots$$

und eine ähnliche Gleichung für die untere Culmination. Das Mittel zweier solcher Gleichungen giebt dann die Polhöhe, unabhängig von der Declination des Sterns und nur noch mit den geraden Sinusgliedern der Biegung behaftet, die nach der dort gegebenen Methode bestimmt werden müssen. Aufserdem mufs bei diesen Beobachtungen die Neigung der Verticallinie des Instruments und des Quecksilberhorizonts auf die eben daselbst angegebene Weise in Rechnung gebracht werden.

V. Das Passageninstrument im ersten Verticale.

25. Beobachtet man an einem mit einem Höhenkreise versehenen Passageninstrumente, welches im ersten Verticale aufgestellt ist, die Durchgangszeit eines Sterns und dessen Zenithdistanz, so kann man ähnlich wie im Meridian auch zwei Gröfsen α und δ oder φ bestimmen. Da indessen die

---

*) Die Ablesungen müssen auch wegen der Glieder der Biegung, die auf das Mittel beider Ablesungen von Einflufs sind, wenn solche vorhanden, corrigirt werden.

Beobachtung der Zenithdistanz Schwierigkeiten hat, so beobachtet man gewöhnlich nur die Durchgangszeiten der Sterne, um daraus die Polhöhe oder die Declination der Sterne zu bestimmen. Zu dem Ende mufs man wieder aus der beobachteten Zeit und den Fehlern des Instruments die wahre Durchgangszeit durch den ersten Vertical berechnen können.

Die Umdrehungsaxe des Instruments treffe die scheinbare Himmelskugel nach Norden zu in einem Punkte, dessen scheinbare Höhe über dem Horizonte b und dessen Azimut von Norden ab gerechnet (positiv auf der Ostseite des Meridians) k ist. Dann sind die drei rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf drei Axen, von denen die Axe der z senkrecht auf der Ebene des Horizonts ist, während die Axen der x und y in der Ebene desselben liegen und zwar so, dafs die positive Axe der x nach dem Nordpunkte, die positive Axe der y nach dem Ostpunkte gerichtet ist:

$$z = \sin b, \quad y = \cos b \sin k \text{ und } x = \cos b \cos k.$$

Nimmt man nun ein zweites Coordinatensystem an, dessen Axe der z der Weltaxe parallel ist und dessen Axe der y mit derselben Axe im vorigen Systeme zusammenfällt, wo also die positive Axe der x nach dem unter dem Horizonte befindlichen Durchschnittspunkte des Aequators und Meridians gerichtet ist, so sind die drei Coordinaten des Pols der Axe, wenn m dessen Stundenwinkel (ebenso wie das Azimut gezählt) und n das Supplement der Declination zu 180° ist:

$$z = \sin n, \quad y = \cos n \sin m, \quad x = \cos n \cos m,$$

und da die Axen der z in beiden Systemen den Winkel $90° - \varphi$ mit einander bilden, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin b &= \sin n \sin \varphi - \cos n \cos m \cos \varphi \\
\cos b \sin k &= \cos n \sin m \\
\cos b \cos k &= \cos n \cos m \sin \varphi + \sin n \cos \varphi
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sin n &= \cos b \cos k \cos \varphi + \sin b \sin \varphi \\
\cos n \sin m &= \cos b \sin k \\
\cos n \cos m &= \cos b \cos k \sin \varphi - \sin b \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Nimmt man nun an, dafs das Fernrohr mit der Seite der Umdrehungsaxe nach dem Kreisende zu den Winkel $90° + c$ bildet, und dafs dasselbe auf ein Object gerichtet ist, dessen Declination δ und dessen Stundenwinkel t ist, so sind die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf den Aequator, wenn

man die Axe der x wieder nach dem Nordpunkte gerichtet annimmt:

$$z = \sin \delta, \quad y = \cos \delta \sin t \text{ und } x = -\cos \delta \cos t,$$

oder, wenn man die Axe der x in der Ebene des Aequators in der Richtung der Umdrehungsaxe des Instruments annimmt:

$$z = \sin \delta$$
$$x = -\cos \delta \cos (t - m).$$

Nimmt man nun ein zweites Coordinatensystem an, in welchem die Axe der y mit der vorigen zusammenfällt, während die Axe der x mit der Umdrehungsaxe des Instruments zusammenfällt, so ist jetzt:

$$x = -\sin c,$$

und da die Axen der x in beiden Systemen den Winkel n mit einander bilden, so hat man:

$$\sin c = -\sin \delta \sin n + \cos \delta \cos (t - m) \cos n.$$

Man findet diese Formeln auch aus der Betrachtung des Dreiecks zwischen dem Pole P, dem Zenith Z und dem Punkte Q, in welchem die dem Kreisende entgegengesetzte Seite der Axe die Himmelskugel trifft. In diesem ist, wenn das Kreisende Nord ist, $PQ = 180^0 - (90 - n)$, $ZQ = 90^0 + b$ und $PZ = 90^0 - \varphi$, während der Winkel $QPZ = m$ und $QZS = k$ ist. Die Formel für $\sin c$ erhält man dagegen aus dem Dreiecke PSQ, wo S der Punkt der Himmelskugel ist, auf den die Absehenlinie des Fernrohrs gerichtet ist, und in dem $SQ = 90^0 - c$, wenn S im Westen ist, $SP = 90^0 - \delta$, $PQ = 180^0 - (90 - n)$ ist, während der Winkel $SPQ = t - m$ ist.

Löst man in der letzten Gleichung $\cos (t - m)$ auf und setzt für $\sin n$, $\cos n \cos m$ und $\cos n \sin m$ die vorher gefundenen Werthe, so erhält man, wenn man die Sinus der Gröfsen b, k und c mit dem Bogen vertauscht und die Cosinus gleich Eins setzt:

$$\begin{aligned} c = & -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t \\ & - [\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t]\, b \\ & + \cos \delta \sin t \,.\, k, \end{aligned}$$

oder da:

$$\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t = \cos z$$

und

$$\cos \delta \sin t = \sin z \sin A,$$

oder, da A hier nahe gleich 90^0 ist:

$$\cos \delta \sin t = \sin z,$$

wenn der Stern im Westen stehend angenommen wird:

$$c + b \cos z - k \sin z = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t.$$

Ist dann Θ die wahre Sternzeit, zu welcher der Stern im ersten Vertical ist, also $\Theta-\alpha$ der Stundenwinkel des Sterns in diesem Augenblicke, so ist:

$$\cos(\Theta-\alpha)=\frac{\tang\delta}{\tang\varphi},$$

oder:

$$0=-\sin\delta\cos\varphi+\cos\delta\sin\varphi\cos(\Theta-\alpha).$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man:

$$c+b\cos z-k\sin z=\cos\delta\sin\varphi\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}[\Theta-\alpha-t]\sin\tfrac{1}{2}[\Theta-\alpha+t].$$

Da nun c, b und k kleine Gröfsen, also auch $\Theta-\alpha$ und t wenig von einander verschieden sind, so kann man

$$\sin t \text{ statt } \sin\tfrac{1}{2}[\Theta-\alpha+t]$$

und

$$\tfrac{1}{2}[\Theta-\alpha-t] \text{ statt } \sin\tfrac{1}{2}[\Theta-\alpha-t]$$

setzen und erhält dann, wenn man bemerkt, dafs

$$\cos\delta\sin t=\sin z$$

ist:

$$\Theta-\alpha=t+\frac{c}{\sin z\sin\varphi}+\frac{b}{\tang z\sin\varphi}-\frac{k}{\sin\varphi}.$$

Hat man nun einen Stern zu der Uhrzeit T an dem Mittelfaden des Instruments beobachtet, so wird $T+\Delta t$ die wahre Sternzeit und der Stundenwinkel

$$T+\Delta t-\alpha=t$$

sein. Man erhält daher:

$$\Theta=T+\Delta t+\frac{c}{\sin z\sin\varphi}+\frac{b}{\tang z\sin\varphi}-\frac{k}{\sin\varphi}.$$

Diese Formel gilt, wenn das Kreisende nördlich und der Stern im Westen beobachtet ist. Hätte der Stern im Osten gestanden, so wäre

$$\cos\delta\sin t=-\sin z$$

gewesen. Da nun die Gröfsen c, b und k ihre Zeichen behalten, so hat man nur in der vorigen Formel die Zeichen der Divisoren $\sin z$ und $\tang z$ zu ändern und erhält:

$$\Theta=T+\Delta t-\frac{c}{\sin z\sin\varphi}-\frac{b}{\tang z\sin\varphi}-\frac{k}{\sin\varphi}\quad\left\{\begin{matrix}\text{Kreis Nord}\\ \text{Stern Ost}\end{matrix}\right\}.$$

Für die Lage des Instruments, bei welcher der Kreis im Süden ist, ändern b und c ihre Zeichen; man hat daher:

$$\Theta=T+\Delta t-\frac{c}{\sin z\sin\varphi}-\frac{b}{\tang z\sin\varphi}-\frac{k}{\sin\varphi}\quad\left\{\begin{matrix}\text{Kreis Süd}\\ \text{Stern West}\end{matrix}\right\}$$

und

$$\Theta=T+\Delta t+\frac{c}{\sin z\sin\varphi}+\frac{b}{\tang z\sin\varphi}-\frac{k}{\sin\varphi}\quad\left\{\begin{matrix}\text{Kreis Süd}\\ \text{Stern Ost}\end{matrix}\right\}.$$

Kennt man nun Θ und α, so erhält man durch die Formel

$$\operatorname{tang} \varphi \cos (\Theta - \alpha) = \operatorname{tang} \delta$$

die Polhöhe φ, wenn die Declination des Sterns bekannt ist, oder die Declination, wenn die Polhöhe bekannt ist. Sind Θ und Θ' die Zeiten, zu denen der Stern im östlichen und westlichen Theile des ersten Verticals war, so ist $\frac{1}{2}(\Theta' - \Theta)$ der Stundenwinkel des Sterns in dem Augenblicke, wo derselbe im ersten Verticale war, und man erhält:

$$\operatorname{tang} \varphi \cos \tfrac{1}{2} (\Theta' - \Theta) = \operatorname{tang} \delta,$$

sodafs man dann also die Rectascension des Sterns nicht zu kennen braucht, um φ oder δ zu finden. Hat man nun das Instrument zwischen der Beobachtung des Sterns im Osten und im Westen umgelegt, also das eine Mal bei Kreis Nord, das andre Mal bei Kreis Süd beobachtet, so wird

$$\tfrac{1}{2}(\Theta' - \Theta) = \tfrac{1}{2}(T' - T),$$

sodafs man dann also weder den Stand der Uhr, noch die Fehler der Aufstellung des Instruments zu kennen braucht. Ein Beispiel hierzu findet man in No. 24 des fünften Abschnitts.

26. Die eben gegebenen Formeln gelten nur für eine sehr nahe richtige Aufstellung des Instruments, wenn also b, c und k kleine Gröfsen sind, deren Quadrate man vernachlässigen kann. Häufig wendet man aber die Methode der Bestimmung der Polhöhe durch Beobachtungen im ersten Verticale auf Reisen an, wo man das Instrument oft nicht in einer so grofsen Nähe am ersten Verticale aufstellen kann, dafs die angeführte Bedingung erfüllt ist. Dann kann man also die eben gegebenen Näherungsformeln nicht anwenden. Es war nun vorher die strenge Gleichung gefunden:

$$\sin c = -\sin \delta \sin n + \cos \delta \cos n \cos (t - m),$$

oder, wenn man die Werthe für $\sin n$, $\cos n \cos m$ und $\cos n \sin m$ substituirt:

$$\begin{aligned}\sin c = & -\sin b \sin \delta \sin \varphi - \sin b \cos \delta \cos \varphi \cos t - \cos b \cos k \sin \delta \cos \varphi \\ & + \cos b \cos k \sin \varphi \cos \delta \cos t + \cos b \sin k \cos \delta \sin t.\end{aligned}$$

Hätte man genau im ersten Verticale beobachtet, so wäre:

$$\sin \delta = \cos z \sin \varphi, \qquad \cos \delta \cos t = \cos z \cos \varphi$$

und

$$\cos \delta \sin t = \sin z.$$

Da nun aber angenommen wird, dafs das Instrument in einiger Entfernung vom ersten Verticale steht, so führe man die Hülfswinkel ein:

$$\sin \delta = \cos z' \sin \varphi'$$
$$\cos \delta \cos t = \cos z' \cos \varphi'$$
$$\cos \delta \sin t = \sin z'.$$

Dadurch geht die Formel für sin *c* über in:

$$\sin c = - \sin b \cos z' \cos (\varphi - \varphi') + \cos b \cos k \cos z' \sin (\varphi - \varphi')$$
$$+ \cos b \sin k \sin z',$$

und man erhält:

$$\operatorname{tang} (\varphi - \varphi') = \frac{\sin c \sec z'}{\cos b \cos k \cos (\varphi - \varphi')} + \frac{\operatorname{tang} b}{\cos k} - \frac{\operatorname{tang} k \operatorname{tang} z'}{\cos (\varphi - \varphi')}.$$

Aus dieser Formel sieht man, dafs man am Vortheilhaftesten Sterne beobachtet, welche dem Zenith so nahe als möglich vorbeigehen, weil man selbst dann, wenn man *k* nur annähernd kennt, eine ziemlich genaue Polhöhe finden wird. Beobachtet man nun aber in verschiedenen Lagen des Instruments im Osten und im Westen, so kann man die Beobachtungen noch so mit einander combiniren, dafs die Fehler einander ganz aufheben. Die obige Formel gilt nämlich für Stern West und Kreis Nord. Für die übrigen Fälle erhält man die Formeln wie vorher, indem man für Stern Ost *z* negativ setzt:

$$\operatorname{tang} (\varphi - \varphi') = \frac{\sin c \sec z'}{\cos b \cos k \cos (\varphi - \varphi')} + \frac{\operatorname{tang} b}{\cos k} + \frac{\operatorname{tang} k \operatorname{tang} z'}{\cos (\varphi - \varphi')} \begin{cases} \text{Kreis Nord} \\ \text{Stern Ost} \end{cases}$$

$$\operatorname{tang} (\varphi - \varphi') = -\frac{\sin c \sec z'}{\cos b \cos k \cos (\varphi - \varphi')} - \frac{\operatorname{tang} b}{\cos k} - \frac{\operatorname{tang} k \operatorname{tang} z'}{\cos (\varphi - \varphi')} \begin{cases} \text{Kreis Süd} \\ \text{Stern West} \end{cases}$$

$$\operatorname{tang} (\varphi - \varphi') = -\frac{\sin c \sec z'}{\cos b \cos k \cos (\varphi - \varphi')} - \frac{\operatorname{tang} b}{\cos k} + \frac{\operatorname{tang} k \operatorname{tang} z'}{\cos (\varphi - \varphi')} \begin{cases} \text{Kreis Süd} \\ \text{Stern Ost} \end{cases}.$$

Legt man also das Instrument zwischen den Beobachtungen des Sterns im Osten und im Westen um und berechnet $\varphi - \varphi'$ aus jeder einzelnen Beobachtung, so ist das Mittel frei von allen Fehlern des Instruments. Kann man nicht denselben Stern im Osten und Westen beobachten, so beobachtet man einen Stern im Osten und einen andern bei veränderter Lage des Instruments im Westen und verbindet dann die Resultate mit einander. Wählt man zwei solche Sterne aus, deren Zenithdistanzen im ersten Verticale nahe gleich sind, so hebt sich der gröfste Theil der von der Aufstellung des Instruments herrührenden Fehler auf und die Genauig-

keit der Polhöhenbestimmung hängt dann noch allein von der Genauigkeit ab, mit welcher φ' bestimmt ist. Es war aber

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos t},$$

also erhält man, wenn man die Formel logarithmisch geschrieben, differenzirt:

$$d\varphi' = \frac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\delta}\,d\delta + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi' \operatorname{tang} t\,dt.$$

Auch hieraus sieht man wieder, daſs es am Vortheilhaftesten ist, solche Sterne zu beobachten, welche nahe am Zenith durch den ersten Vertical gehen. Da nämlich:

$$\operatorname{tang} t = \frac{\operatorname{tang} z'}{\cos\varphi},$$

so wird der Coefficient von dt auch $\sin\varphi' \operatorname{tang} z'$ geschrieben werden können, also für Zenithsterne sehr klein werden, und weil dann für solche Sterne δ nahe gleich φ ist, so wird ein Fehler in der Declination wenigstens nicht vergröſsert.

Hat man an mehreren Fäden beobachtet, so ist es nicht einmal nöthig, die Beobachtungen an den Seitenfäden auf den Mittelfaden zu reduciren, was bei diesem Instrumente eine etwas weitläuftige Rechnung giebt, sondern man kann aus der Verbindung von je zwei Beobachtungen an demselben Faden im Osten und im Westen eine Polhöhe ableiten *) und nachher das Mittel nehmen.

Schreibt man die Formel für $\operatorname{tang}(\varphi - \varphi')$ so um:

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{\sin c}{\cos b \cos k}\sec z' + \frac{\operatorname{tang} b}{\cos k}\cos(\varphi - \varphi') - \operatorname{tang} k \operatorname{tang} z',$$

löst man dann $\sin(\varphi - \varphi')$ auf, substituirt für $\sin\varphi'$ und $\cos\varphi'$ die Werthe

$$\sin\delta \sec z' \text{ und } \cos\delta \cos t \sec z'$$

und setzt den Factor von $\operatorname{tang} b$,

$$\cos(\varphi - \varphi'),$$

gleich Eins, so erhält man:

$$\sin(\varphi - \delta) = \cos\delta \sin\varphi \,.\, 2\sin\tfrac{1}{2}t^2 + \frac{\sin c}{\cos b \cos k}$$
$$+ \frac{\operatorname{tang} b}{\cos k}\cos z' - \operatorname{tang} k \sin z'.$$

*) Hat man nämlich an einem Seitenfaden, dessen Distanz f ist, beobachtet, so ist es dasselbe, als wenn man an einem Instrumente beobachtet hätte, dessen Collimationsfehler $c + f$ ist.

Sind b, c und k kleine Gröſsen, so erhält man hieraus für die Bestimmung der Polhöhe durch Zenithsterne die folgenden bequemen Formeln, indem man noch $c+f$ statt c setzt:

$$\varphi-\delta=\sin\varphi\cos\delta\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}t^2\pm f+b+c-k\sin z \text{ [Kreis Nord, Stern West]}$$
$$+b+c+k\sin z \text{ [Kreis Nord, Stern Ost]}$$
$$-b-c-k\sin z \text{ [Kreis Süd, Stern West]}$$
$$-b-c+k\sin z \text{ [Kreis Süd, Stern Ost].}$$

An dem im ersten Verticale aufgestellten Passageninstrumente auf der Berliner Sternwarte wurde am 10. September 1846 der Stern β Draconis beobachtet.

Kreis Nord, Stern Ost.

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*
		$19^m 9^s.0$,	$17^h 10^m 48^s.0$,	$5^m 24^s.0$,	$1^m 16^s.5$,	$16^h 55^m 6^s.3$

Kreis Süd, Stern West.

$1^m 5^s.0$, $54^m 59^s.7$, $50^m 47^s.8$, $17^h 45^m 28^s.0$, $37^m 38^s.0$.

Die Neigung des Instruments war:

bei Kreis Nord $=+4''.64$

bei Kreis Süd $=-3\;.49$.

Ferner war:

$$\alpha=17^h\,26^m\,58^s.59$$
$$\delta=52^0\,25'\;27''.77$$
$$\Delta t=\;-\;54^s.52,$$

und die Fädendistanzen sind im Bogen:

I	12′ 31″.16
II	6 43 .78
III	3 25 .17
V	3 23 .14
VI	6 34 .21
VII	12 22 .32.

Um nun $\varphi-\delta$ zu berechnen, muſs man schon einen genäherten Werth von φ kennen. Nimmt man

$$\varphi=52^0\;30'\,16'',$$

so wird:

$$\log\sin\varphi\cos\delta=9.684686,$$

und man erhält:

Kreis Nord.

	III	*IV*	*V*	*VI*	*VII*
t	$8^m 44^s.11$	$17^m 5^s.11$	$22^m 29^s.11$	$26^m 36^s.61$	$32^m 46^s.81$
$\log 2\sin\frac{1}{2}t^2$	2.17552	2.75807	2.99648	3.14264	3.32351
$\sin\varphi\cos\delta 2\sin\frac{1}{2}t^2$	1 12 .48	4 37 .18	7 59 .92	11 11 .94	16 59 .07
$\varphi-\delta$	4 37 .65	4 37 .18	4 36 .78	4 37 .73	4 36 .75,

also im Mittel:

$$\varphi - \delta = 4' \, 37''.22 + 4''.64 + c + k \sin z.$$

Ebenso findet man aus den Beobachtungen bei Kreis Süd im Mittel:

$$\varphi - \delta = 4' \, 53''.53 + 3''.49 - c - k \sin z,$$

mithin, wenn man die Resultate in beiden Lagen verbindet:

$$\varphi - \delta = 4' \, 49''.44$$

$$\varphi = 52^0 \, 30' \, 17''.21$$

$$c + k \sin z = + 7''.58.$$

Diese Methode ist die vorzüglichste, um die Zenithdistanz $\varphi - \delta$ eines dem Zenith nahen Sterns mit grofser Schärfe zu bestimmen und kann daher mit Vortheil angewandt werden, um die Aenderungen der Zenithdistanz eines Sterns durch Aberration, Nutation und Parallaxe und mithin die Constanten dieser Correctionen selbst zu bestimmen. Dieselbe ist auch von Struve zu diesem Zwecke mit dem gröfsten Erfolge angewandt. Da die Neigung des Instruments einen so grofsen Einflufs auf das Resultat hat, indem ein Fehler derselben vollständig im Resultate bleibt, so mufs das zu solchen Beobachtungen angewandte Instrument so gebaut sein, dafs die Nivellirung sich mit der gröfsten Schärfe machen läfst. Das nach Struve's Angaben zuerst für die Pulkowaer Sternwarte gebaute Instrument ist so eingerichtet, dafs das Niveau stets auf der Axe des Instruments selbst während der Umlegung, die sich mit grofser Leichtigkeit ausführen läfst, verbleibt, sodafs jede etwaige Veränderung des Niveau's durch das Aufsetzen verhütet ist und man wohl annehmen kann, dafs sich das Niveau während der kurzen Zwischenzeit der Beobachtungen nicht ändert. Beobachtet man das Niveau in jeder Lage vollständig durch Umkehren desselben, so erhält man b und b'; indessen ist es nur nöthig, dasselbe mit dem Instrumente umzulegen, wodurch man sogleich $b - b'$ erhält, eine Gröfse, die allein für das Resultat benutzt wird, wie man aus dem obigen Beispiel sieht.

Eine Schwierigkeit bei diesen Beobachtungen ist die Schätzung des Bruchtheils der Secunde, zu welchem der Stern am Faden ist, wegen der schiefen Bewegung des Sterns gegen den Faden. Der Gebrauch des Chronograph wird daher für diese Beobachtungen sehr zu empfehlen sein, da es immer

leicht ist, den Augenblick aufzufassen, wenn der Stern durch den Faden halbirt wird.

Für die Bestimmung der Parallaxe oder der Constanten der Aberration und Nutation nach dieser Methode mufs man Sterne wählen, die dem Pole der Ecliptic nahe sind, weil für solche der Einflufs dieser Correctionen auf die Declination möglichst grofs wird.

27. Die Formeln, durch welche man die Reduction von einem Seitenfaden auf den Mittelfaden erhält, findet man auf dieselbe Weise wie beim Passageninstrument. Hat man nämlich an einem Seitenfaden beobachtet, dessen Distanz vom Mittelfaden f ist, so ist es dasselbe, als wenn man an einem Instrumente beobachtet hat, dessen Collimationsfehler $c+f$ ist. Man hat daher die Gleichung:

$$\sin(c+f) = -\sin\delta\sin n + \cos\delta\cos n\cos(t'-m),$$

wo t' der Stundenwinkel des Sterns in dem Augenblicke ist, in welchem man denselben am Seitenfaden beobachtet hat. Zieht man davon die Gleichung ab:

$$\sin c = -\sin\delta\sin n + \cos\delta\cos n\cos(t-m),$$

so erhält man

$$2\sin\tfrac{1}{2}f\cos[\tfrac{1}{2}f+c] = 2\cos\delta\cos n\sin\tfrac{1}{2}(t-t')\sin[\tfrac{1}{2}(t+t')-m].$$

Da nun f immer nur wenige Minuten beträgt, so kann man für die linke Seite der Gleichung f setzen, und findet dann:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(t-t') = \frac{f}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}(t+t')\cos n\cos m - \cos\delta\cos\frac{1}{2}(t+t')\cos n\sin m},$$

oder, wenn man für $\cos n\cos m$ und $\cos n\sin m$ die in der vorigen Nummer gefundenen Ausdrücke durch b und k setzt:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(t-t') = \frac{f}{\cos\delta\sin\varphi\sin\frac{1}{2}(t+t')[1-b\,\mathrm{cotang}\,\varphi - k\,\mathrm{cotang}\,\frac{1}{2}(t+t')\,\mathrm{cosec}\,\varphi]}.$$

Man mufs also bei der Reduction von einem Seitenfaden auf den Mittelfaden nicht die eigentliche Fädendistanz f anwenden, sondern die Gröfse

$$\frac{f}{1-b\,\mathrm{cotang}\,\varphi - k\,\mathrm{cotang}\,\frac{1}{2}(t+t')\,\mathrm{cosec}\,\varphi} = f',$$

und es ist dann:

$$2\sin\tfrac{1}{2}(t-t') = \frac{f'}{\cos\delta\sin\varphi\sin\frac{1}{2}(t+t')}.$$

Um nun diese Gleichung auflösen zu können, müfste man t' schon kennen. Es ist aber

$$\sin \tfrac{1}{2}(t+t') = \sin [t - \tfrac{1}{2}(t-t')].$$

Nimmt man dann für $\frac{1}{2}(t-t')$ die halbe Zwischenzeit, welche zwischen dem Durchgange durch den Seitenfaden und den Mittelfaden verflossen ist, so ist die rechte Seite der Gleichung bekannt und man kann daraus $t-t'$ berechnen. Weicht der gefundene Werth von dem angenommenen Werthe zu sehr ab, so mufs man die Rechnung mit dem neuen Werthe wiederholen. Vorher mufs man aber die reducirte Fädendistanz f' berechnen. Dabei kann man nun in der Regel das Glied b cotang φ fortlassen, weil b immer nur wenige Secunden betragen wird. Ist der Stern nicht sehr nahe am Zenith beobachtet und k eine kleine Gröfse, so kann man auch die Correction wegen k vernachlässigen und hat dann blos die eigentliche Fädendistanz f anzuwenden. Nahe am Zenith kann aber das Glied, welches k enthält, wenn dies nicht sehr klein ist, merklich werden. Es ist nämlich

$$\operatorname{tang} t \cos \varphi = \operatorname{tang} z,$$

und da f klein ist, so wird auch sehr nahe

$$\operatorname{tang} t' \cos \varphi = \operatorname{tang} z'$$

sein, also auch

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(t+t') \cos \varphi = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z+z').$$

Statt des Factors von k kann man daher auch schreiben:

$$\operatorname{cotang} \varphi \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}(z+z'),$$

woraus man sieht, dafs die Correction sehr nahe am Zenith bedeutend werden kann.

Statt der indirecten Auflösung der Gleichung

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(t-t') = \frac{f'}{\cos \delta \sin \varphi \sin \frac{1}{2}(t+t')}$$

kann man auch die Auflösung durch eine Reihe anwenden. Die Gleichung kann man nämlich auch so schreiben:

$$\cos t' - \cos t = \frac{f'}{\cos \delta \sin \varphi},$$

woraus man nach Formel (19) in No. 11 der Einleitung erhält:

$$t' = t - \frac{f'}{\cos \delta \sin \varphi \sin t} - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotang} t \left[\frac{f'}{\cos \delta \sin \varphi \sin t}\right]^2$$
$$- \tfrac{1}{6} \left[\frac{f'}{\cos \delta \sin \varphi \sin t}\right]^3 (1 + 3 \operatorname{cotang} t^2).$$

Ist nun das Instrument nahe richtig aufgestellt, so ist

$$\cos\delta \sin t = \sin z,$$

mithin

$$t' = t - \frac{f'}{\sin z \sin\varphi} - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotang} t \left[\frac{f'}{\sin z \sin\varphi}\right]^2$$
$$- \tfrac{1}{6} [1 + 3 \operatorname{cotang} t^2] \left[\frac{f'}{\sin z \sin\varphi}\right]^3 - \ldots .$$

Da in dieser Formel auch eine gerade Potenz von f vorkommt, so sieht man, dafs Fäden, welche gleich weit zu beiden Seiten vom Mittelfaden abstehen, hier nicht denselben Werth für $t' - t$ geben. Für ein negatives f wird nämlich

$$t' = t + \frac{f'}{\sin z \sin\varphi} - \tfrac{1}{2} \operatorname{cotang} t \left[\frac{f'}{\sin z \sin\varphi}\right]^2$$
$$+ \tfrac{1}{6} [1 + 3 \operatorname{cotang} t^2] \left[\frac{f'}{\sin z \sin\varphi}\right]^3 - \ldots .$$

Um nun diese Reihen bequemer berechnen zu können, kann man sich eine Tafel anlegen, aus welcher man mit dem Argumente δ die Gröfse $\sin\varphi \sin z$, und ebenso $\frac{1}{2} \operatorname{cotang} t$ und $\frac{1}{6} (1 + 3 \operatorname{cotang} t^2)$ findet.

Man kann aber diese Reihenentwickelung nur dann anwenden, wenn der Stern nicht nahe am Zenith ist, weil im anderen Falle auch noch einige der folgenden Glieder mitgenommen werden müfsten.

Ist die Zenithdistanz klein, so bedient man sich mit Vortheil der folgenden Methode zur Berechnung von t'. Es war

$$\cos t' = \cos t + \frac{f'}{\cos\delta \sin\varphi}.$$

Zieht man den Ausdruck auf beiden Seiten von 1 ab und addirt auch 1, so erhält man durch die Division der entstehenden Gleichungen:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t'^2 = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t^2 \cos\delta \sin\varphi - f'}{2 \cos \frac{1}{2} t^2 \cos\delta \sin\varphi + f'}.$$

Da nun ferner

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\varphi}$$

ist, so wird

$$1 - \cos t = 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\delta \sin\varphi}$$

und

$$1 + \cos t = 2 \cos \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos\delta \sin\varphi};$$

mithin wird

$$\tang \tfrac{1}{2} t'^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta) - f'}{\sin(\varphi + \delta) + f'},$$

und für ein negatives f

$$\tang \tfrac{1}{2} t'^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta) + f'}{\sin(\varphi + \delta) - f'}.$$

Die Fädendistanzen selbst bestimmt man, indem man einen dem Zenithe nahe stehenden Stern an den einzelnen Fäden beobachtet. Berechnet man dann aus den Beobachtungen an jedem Faden die Gröſse

$$\sin \varphi \cos \delta \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2,$$

so geben die Unterschiede dieser Gröſsen die Fädendistanzen, weil für Zenithalsterne

$$\varphi - \delta = \sin \varphi \cos \delta \,.\, 2 \sin \tfrac{1}{2} t^2 \pm f + c + b + k \sin z.$$

So hätte man z. B. in dem Beispiel der vorigen Nummer aus den Beobachtungen bei Kreis Nord die Fädendistanzen erhalten:

$$\begin{aligned} III &= 3'\ 24''.70 \\ V &= 3\ \ 22\ .74 \\ VI &= 6\ \ 34\ .76 \\ VII &= 12\ \ 21\ .89. \end{aligned}$$

Den 2ten October 1838 wurde der Stern α Bootis an dem im ersten Verticale aufgestellten Passageninstrumente in Berlin beobachtet.

Kreis Süd, Stern West.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*
α Bootis	$44^s.7$	$8^s.3$	$50^s.2$	$19^h\,2^m\,32^s.2$	$13^s.8$	$55^s.4$	$1^m\,19^s.2$.

Die Fädendistanzen waren in Zeit:

$$\begin{aligned} I &= 51^s.639 \\ II &= 25\ .814 \\ III &= 12\ .610 \\ V &= 13\ .305 \\ VI &= 26\ .523 \\ VII &= 52\ .397; \end{aligned}$$

ferner war:

$$\Delta t = +47^s.5, \quad \alpha = 14^h\,8^m\,16^s.5, \quad \delta = +20^0\,1'\,39'', \quad \varphi = 52^0\,30'\,16''.$$

Die Gröſsen b und k waren so klein, daſs man die reducirte Fädendistanz f' nicht zu berechnen braucht. Damit erhält man nun

$$t = 4^h\,55^m\,3^s.2 = 73^0\,45'\,48''.0, \quad \log \cos \delta \sin t \sin \varphi = 9.85244$$

und

$$\log \cotang \tfrac{1}{2} t = 9.14552.$$

Um nun das zweite Glied der Reihe zu berechnen, mufs man $\frac{f'}{\sin\varphi\cos\delta\sin t}$ in Theile des Radius verwandeln, also mit 15 multipliciren und mit 206265 dividiren. Darauf hat man das Quadrat zu nehmen, und um das Glied dann in Zeitsecunden zu verwandeln, hat man wieder mit 206265 zu multipliciren und mit 15 zu dividiren. Der Factor von

$$\left[\frac{f'}{\sin\varphi\cos\delta\sin t}\right]^2$$

wird daher:

$$\frac{15}{206265}\cdot\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cotang}\,z,$$

wovon der Logarithmus 5.00718 ist. Ebenso wird der Coefficient des dritten Gliedes, wenn man dasselbe in Zeitsecunden erhalten will:

$$\frac{1}{6}\left[\frac{15}{206265}\right]^2[1+3\,\mathrm{cotang}\,t^2].$$

Dies Glied hat aber in diesem Falle keinen Einflufs mehr. Berechnet man z. B. die Reduction für den Faden I, so ist hier f negativ, und man erhält:

$$-\frac{f}{\sin\varphi\cos\delta\sin t}=-72^s.533$$

$$+\frac{15}{206265}\cdot\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cotang}\,t\left[\frac{f}{\cos\delta\sin t\sin\varphi}\right]^2=+0.053,$$

also wird die Reduction auf den Mittelfaden für

$$I=-1^m\,12^s.48.$$

Ebenso erhält man:

$$\begin{aligned} II &= -36^s.25 \\ III &= -17\ .71 \\ V &= +18\ .69 \\ VI &= +37\ .24 \\ VII &= +73\ .54. \end{aligned}$$

Es werden also die Beobachtungen der einzelnen Fäden auf den Mittelfaden reducirt:

	$19^h\,2^m\,32^s.22$
	32 .05
	32 .49
	32 .20
	32 .49
	32 .64
	32 .74
im Mittel	$19^h\,2^m\,32^s.40.$

Um nun auch ein Beispiel für die andre Art der Reduction zu haben, nehme man folgende Beobachtung von α Persei:

Kreis Süd, Stern West.

	I	II	III	IV	V
α Persei	$4^m\,26^s.0$	$2^m\,38^s.0$	$1^m\,43^s.0$	$5^h\,0^m\,49^s.2$	$59^m\,52^s.0$

VI	VII
$58^m\,55^s.2$	$57^m\,2^s.0.$

Berechnet man zuerst:

$$\tang \tfrac{1}{2}\,t^2 = \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi+\delta)},$$

indem man

$$\delta = 49^0\,16'\,26''.7$$

und

$$\varphi = 52^0\,30'\,16''.0$$

nimmt, so erhält man:

$$t = 26^0\,58'\,58''.88.$$

Nimmt man nun den ersten Faden, so ist f negativ, man hat also die Formel zu berechnen:

$$\tang \tfrac{1}{2}\,t'^2 = \frac{\sin(\varphi-\delta)+f}{\sin(\varphi+\delta)-f}.$$

Da nun

$$f = 51^s.639 = 12'\,54''.585,$$

oder in Theilen des Radius gleich 0.0037553 ist, so erhält man

$$t' = 27^0\,53'\,\;6''.72,$$

also

$$t'-t = \;0^0\,54'\,\;7''.84$$
$$= \;0^h\;\;3^m\,36^s.52.$$

Ebenso erhält man für die übrigen Fäden:

II =	1^m	$49^s.05$
III		53 .48
V		56 .85
VI	1	53 .85
VII	3	46 .77.

Bei diesem Sterne ist die Reihenentwicklung indessen noch mit mehr Bequemlichkeit anzuwenden, da bei Faden *III* und *V* das dritte Glied gar keinen Einfluſs mehr hat und auch bei dem ersten und siebenten Faden der Werth desselben nur $0^s.12$ ist.

28. Es ist nun noch zu zeigen, auf welche Weise man die Fehler des Instruments durch die Beobachtungen bestimmt.

Die Neigung b der Axe wird immer durch unmittelbare Nivellirung gefunden. Den Collimationsfehler kann man, wie man in No. 26 gesehen hat, bestimmen, wenn man dem Zenithe nahe stehende Sterne bei verschiedenen Lagen des Instruments im Osten und Westen beobachtet. Man erhält denselben auch, wenn man eine östliche und westliche Beobachtung desselben Sterns in ein und derselben Lage des Instruments mit einander verbindet. Es ist nämlich für Kreis Nord:

$$\Theta = T + \Delta t - \frac{c}{\sin z \sin \varphi} - \frac{k}{\sin \varphi} \text{ [Stern Ost]}$$

$$\Theta' = T' + \Delta t + \frac{c}{\sin z \sin \varphi} - \frac{k}{\sin \varphi} \text{ [Stern West]},$$

wo angenommen ist, daſs die Correction wegen der Neigung schon angebracht ist. Es ist also:

$$c = \sin \varphi \sin z \left[\tfrac{1}{2}(\Theta' - \Theta) - \tfrac{1}{2}(T' - T)\right],$$

wo $\frac{1}{2}(\Theta' - \Theta)$ aus der Gleichung

$$\cos \tfrac{1}{2}(\Theta' - \Theta) = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} \varphi},$$

oder schärfer, wenn man $\frac{1}{2}(\Theta' - \Theta) = t$ setzt, aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t^2 = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi + \delta)}$$

gefunden wird. Damit der Coefficient $\sin z$ recht klein wird, also Fehler in der Beobachtung der Zeiten T und T' keinen groſsen Einfluſs auf den Werth von c erlangen, muſs man zur Bestimmung von c solche Sterne nehmen, welche so nahe als möglich beim Zenith durch den ersten Vertical gehen.

Addirt man die beiden Gleichungen für Θ und Θ', so erhält man:

$$k = \sin \varphi \left[\tfrac{1}{2}(T' + T) + \Delta t - \tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta')\right],$$

oder, da $\frac{1}{2}(\Theta + \Theta') = \alpha$ ist:

$$k = \sin \varphi \left[\tfrac{1}{2}(T + T') + \Delta t - \alpha\right].$$

Für die Bestimmung von k wird man Sterne zu wählen haben, welche weit vom Zenith durch den ersten Vertical gehen, weil man für diese die Durchgänge durch die Fäden genauer beobachten kann. Im Jahre 1838 wurde an dem Passageninstrumente der Berliner Sternwarte beobachtet:

Kreis Süd.

Juni 25 α Bootis West $19^h\ 3^m\ 1^s.44$
26 α Bootis Ost $9\ 12\ 54\ .49$,

wo die angesetzten Zeiten schon die Mittel aus den Beobachtungen an sieben Fäden sind. Juni 25 war $b = +6''.42$, Juni 26 dagegen $+7''.98$. Corrigirt man also die Zeiten wegen der Neigung durch Hinzufügung des Gliedes $+\frac{b}{\operatorname{tang} z \sin \varphi}$ so hat man zur Beobachtung im Westen $-0^s.26$ und zur Beobachtung im Osten $0^s.32$ hinzuzulegen, sodaſs man erhält:

$$T = 19^h\ 3^m\ 1^s.18$$
$$T' = 9\ 12\ 54\ .81.$$

Es ist also

$$\tfrac{1}{2}(T + T') = 14^h\ 7^m\ 58^s.00,$$

und da

$$\Delta t = +20^s.27 \text{ und } \alpha = 14^h\ 8^m\ 16^s.48$$

war, so erhält man:

$$k = +1^s.42.$$

Anm. Ueber das Passageninstrument im ersten Verticale vergleiche man: Encke, Bemerkungen über das Durchgangsinstrument von Ost nach West. Berliner astronomisches Jahrbuch für 1843 pag. 300 u. folgende.

VI. Höheninstrumente.

29. Die Höheninstrumente sind entweder ganze Kreise (Verticalkreise), Quadranten oder Sextanten. Die Verticalkreise sind an einer horizontalen Axe befestigt, die auf einer verticalen Säule ruht. Durch ein auf die horizontale Axe aufgesetztes Niveau kann die verticale Stellung der Säule geprüft und mittelst der drei Fuſsschrauben des Instruments berichtigt werden. Die Berichtigung ist vollkommen, wenn die Blase des Niveau's bei der Umdrehung der Säule um die Axe in allen Lagen dieselbe Stellung beibehält. Durch das Umlegen des Niveau's auf der horizontalen Axe findet man dann die Neigung dieser Axe, die durch zu dem Zwecke angebrachte Correctionsschrauben berichtigt werden kann, sodaſs der Kreis vertical steht.

Die horizontale Axe trägt einen getheilten Kreis, der sich zugleich mit dem Fernrohr bewegt, während der in derselben Ebene liegende Nonienkreis fest mit der Säule verbunden ist. Dieser Kreis trägt ein Niveau wie der Kreis des Höhen- und Azimutalinstruments. Geschieht die Ablesung durch Mikroskope, so ist der Mikroskopenträger fest mit der Säule verbunden und trägt das Niveau. Die doppelten Zenithdistanzen eines Sterns werden dann durch die Beobachtung des Sterns in zwei um 180^0 verschiedenen Lagen der horizontalen Axe, ganz wie beim Höhen- und Azimutalinstrument, bestimmt, überhaupt gilt alles dort in Bezug auf die Höhenbeobachtungen Gesagte auch für den Verticalkreis.

Da bei diesen Instrumenten das Fernrohr an einem Ende der Axe befestigt ist, so wird dadurch eine Aenderung des Collimationsfehlers erzeugt, die denselben mit der Zenithdistanz veränderlich macht, sodafs man ihn von der Form $c + a \cos z$ annehmen kann. Bei einem gröfseren Instrumente der Art wird man den Collimationsfehler in der horizontalen Lage des Fernrohrs wie beim Meridiankreise durch zwei einander gegenüberstehende Collimatoren bestimmen können, in der verticalen Stellung dagegen durch die Beobachtung der reflectirten Bilder der Fäden im Quecksilberhorizonte, wie in No. 22 gezeigt war. Der Unterschied beider ergiebt die Gröfse a, die indessen nur immer wenige Secunden ist und daher auf die Messung der Zenithdistanzen keinen Einflufs hat.

Anm. Der Quadrant dient ebenfalls zur Beobachtung der Höhen der Gestirne und besteht aus einem Gradbogen, welcher gleich dem vierten Theile eines Kreises ist und um dessen Mittelpunkt sich ein an einer Alhidade befestigtes Fernrohr bewegt. Ist ein solcher Quadrant an einer senkrechten Wand in der Ebene des Meridians befestigt, so heifst derselbe Mauerquadrant. Bei den tragbaren Quadranten, welche zu Höhenmessungen in allen Azimuten dienen, ist dagegen der Gradbogen an einer verticalen Säule befestigt, welche auf drei Fufsschrauben ruht und sich um ihre Axe bewegen läfst. Diese Instrumente sind jetzt gänzlich aufser Gebrauch gekommen, indem die Mauerquadranten durch die Meridiankreise, die tragbaren Quadranten aber durch die Verticalkreise und die Höhen- und Azimutalkreise verdrängt sind.

30. Das wichtigste Höheninstrument ist der Spiegelsextant, welcher nach seinem Erfinder auch der Hadleysche

Sextant genannt wird *). Dieses Instrument dient übrigens nicht allein zu Höhenbeobachtungen, sondern allgemein zur Messung des Winkels zwischen zwei Objecten in jeder Richtung gegen den Horizont, und da dasselbe keine feste Aufstellung erfordert, sondern die Beobachtungen mit demselben angestellt werden können, indem man das Instrument in der Hand hält, so wird es besonders zu Beobachtungen auf der See nützlich, theils zur Bestimmung der Zeit und Polhöhe durch die Beobachtung von Sonnen- oder Sternhöhen, theils zur Bestimmung der geographischen Länge durch Beobachtung von Monddistanzen.

Der Spiegelsextant besteht im Allgemeinen aus einem Kreissector, gleich dem sechsten Theile eines Kreises, um dessen Mittelpunkt sich eine Alhidade bewegt, welche einen auf der Ebene des Sextanten senkrechten und durch den Mittelpunkt desselben gehenden Spiegel trägt. Ein anderer kleiner Spiegel steht vor dem Objective des Fernrohrs des Sextanten, ebenfalls auf der Ebene desselben senkrecht und zwar parallel der Linie, welchen den Mittelpunkt des Kreisbogens mit dem Nullpunkte der Theilung verbindet. Beide Spiegel stehen einander parallel, wenn man die Alhidade auf den Nullpunkt der Theilung stellt. Von dem kleinen Spiegel ist nur die untere Hälfte belegt, sodafs durch den oberen, freien Theil desselben Lichtstrahlen unmittelbar von einem Objecte in das Fernrohr gelangen können. Dreht man nun die Alhidade mit ihrem Spiegel so lange, bis ein Lichtstrahl von einem zweiten Objecte von dem grofsen Spiegel nach dem kleinen und von da in das Fernrohr reflectirt wird, so sieht man im Fernrohre die Bilder beider Gegenstände. Bringt man dieselben dann durch eine kleine Bewegung der Alhidade zur vollständigen Deckung, so ist der Winkel, welchen die beiden Spiegel mit einander bilden, d. h. also der Winkel, um welchen man die Alhidade vom Anfangspunkte, wo beide Spiegel einander parallel waren, gedreht hat, die Hälfte

*) Eigentlich ist Newton der Erfinder dieses Instruments, da man nach Hadley's Tode unter dessen Papieren eine Beschreibung desselben von Newton's eigner Hand gefunden hat. Hadley hat indessen die Erfindung zuerst bekannt gemacht.

desjenigen Winkels, um welchen die beiden Objecte von einander entfernt sind.

Zuvörderst ist klar, dafs, wenn beide Spiegel einander parallel sind, auch der directe und der zweimal reflectirte Lichtstrahl einander parallel sind. Verfolgt man nämlich den Weg der beiden Lichtstrahlen in umgekehrter Richtung, indem man dieselben vom Auge des Beobachters ausgehend denkt, so wird zuerst der Weg der beiden Lichtstrahlen derselbe sein. Der eine Strahl geht dann durch den oberen Theil des kleinen Spiegels nach dem Objecte A. Ist α der Winkel, unter welchem beide Lichtstrahlen den kleinen Spiegel treffen, so wird der andere Lichtstrahl unter dem Winkel α reflectirt, und da der grofse Spiegel dem kleinen parallel ist, so fällt er auch auf diesen unter dem Winkel α und wird wieder unter dem Winkel α reflectirt. Dieser Winkel wird also ebenfalls das Object A treffen, wenn dasselbe unendlich weit entfernt ist, sodafs die Entfernung der beiden Spiegel von einander gegen die Entfernung desselben verschwindet.

Ist aber der grofse Spiegel unter dem Winkel γ gegen den kleinen Spiegel geneigt, so trifft der den kleinen Spiegel unter dem Winkel α verlassende Strahl jetzt den grofsen Spiegel unter einem andern Winkel β. Man hat aber in dem Dreiecke, welches die Richtungen der beiden Spiegel und die Richtung des reflectirten Strahls bilden:

$$180^0 - \alpha + \gamma + \beta = 180^0$$

oder:

$$\gamma = \alpha - \beta.$$

Der Lichtstrahl verläfst dann den grofsen Spiegel unter dem Winkel β, und diese Richtung wird die Richtung des vom Auge ausgehenden Lichtstrahls unter einem Winkel δ schneiden, welcher gleich dem Winkel zwischen den beiden Objecten ist, die man im Fernrohre beobachtet. In dem Dreiecke, welches der directe Lichtstrahl, der einmal reflectirte und der zweimal reflectirte mit einander bilden, hat man aber:

$$180^0 - 2\alpha + \delta + 2\beta = 180^0,$$

also:

$$\delta = 2\alpha - 2\beta$$

oder

$$\delta = 2\gamma.$$

Der Winkel zwischen den beiden zur Deckung gebrachten Objecten ist daher gleich dem doppelten Winkel, welchen die beiden Spiegel mit einander bilden oder den die Richtung der Alhidade auf der Theilung angiebt. Zur gröſseren Bequemlichkeit ist nun die Theilung auf dem Gradbogen des Sextanten schon mit 2 multiplicirt, indem jeder halbe Grad für einen ganzen genommen ist und z. B. bei dem Striche, welcher dem zehnten Grade entspricht, schon die Zahl 20 hingeschrieben ist. Beobachtet man daher die Distanz zweier Objecte, so ist dieselbe unmittelbar gleich dem auf dem Sextanten abgelesenen Winkel.

Bei Höhenbeobachtungen vermittelst des Sextanten bedient man sich eines künstlichen Horizonts, gewöhnlich eines Quecksilberhorizonts und miſst die Distanz des in dem Quecksilberhorizonte reflectirten Bildes von dem Objecte, also die doppelte Höhe desselben. Auf der See beobachtet man dagegen unmittelbar die Höhen der Gestirne, indem man dieselben mit dem Meereshorizonte zur Deckung bringt.

In dem Falle nimmt man aber die Höhe zu groſs, da der Meereshorizont wegen der Höhe des Auges über der Oberfläche des Meeres nicht mehr ein gröſster Kreis, sondern ein kleiner Kreis ist, dessen Zenithdistanz gröſser als 90^0 ist. Man erhält diesen kleinen Kreis durch den Durchschnitt des Kegels, den die vom Auge an die Oberfläche des Meeres gezogenen Tangenten bilden, während der wahre Horizont durch den Durchschnitt einer durch das Auge gelegten waagerechten Ebene mit der Himmelskugel gegeben ist. Nennt man die Zenithdistanz des Meereshorizonts $90^0 + c$, so sieht man leicht, daſs c der Winkel am Mittelpunkte der Erde ist, welchen die beiden Radien nach dem Ort des Beobachters und nach dem Punkte, wo die Tangente die Oberfläche der Erde berührt, mit einander bilden. Es ist daher, wenn a den Radius der Erdkugel, h die Höhe des Auges über der Oberfläche des Meeres bezeichnet:

$$\cos c = \frac{a}{a+h},$$

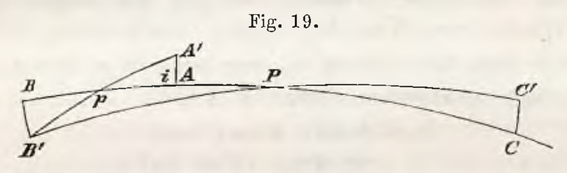
$$\text{mithin: } 2 \sin \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{h}{a+h},$$

$$\text{oder auch: } c = \sqrt{\frac{2h}{a+h}}.$$

Danach kann man den Winkel c, welcher die Kimmtiefe genannt wird, für jede Höhe des Auges berechnen und dann denselben von der vom Meereshorizonte gemessenen Höhe abziehen.

31. Es ist nun zu untersuchen, welchen Einfluſs Fehler des Spiegelsextanten auf die Beobachtungen mit demselben haben, und wie man dieselben bestimmen kann. Der Sextant kann nun zuerst Fehler haben, die von der Stellung der Spiegel und des Fernrohrs abhängen. Denkt man sich das Auge O in dem Mittelpunkte einer Kugel, so wird die Ebene des Sextanten diese Kugel in einem gröſsten Kreise BAC Fig. 19

Fig. 19.



schneiden, welcher zugleich die Ebene darstellt, in welcher die beiden beobachteten Objecte liegen. OA sei die Gesichtslinie nach dem Objecte A. Trifft diese den kleinen Spiegel, so wird dieselbe von diesem nach dem groſsen Spiegel reflectirt und wenn p der Punkt ist, in welchem das Loth auf dem kleinen Spiegel den gröſsten Kreis trifft, so wird der Lichtstrahl nach der Reflexion den gröſsten Kreis in dem Punkte B treffen, sodaſs

$$Bp = pA$$

ist. Bezeichnet ferner P den Punkt, in welchem das Loth auf dem groſsen Spiegel die Kugel trifft, so wird der Lichtstrahl nach der zweiten Reflexion die Kugel in dem Punkte C treffen, sodaſs

$$PC = PB$$

ist, und in dieser Richtung wird das zweite beobachtete Object liegen. Der Winkel zwischen den beiden Objecten ist dann AC, der Winkel zwischen den beiden Spiegeln pP, und man sieht leicht, daſs AC gleich $2pP$ ist.

Dies ist der Fall, wenn die Gesichtslinie des Fernrohrs der Ebene des Sextanten parallel ist und beide Spiegel auf dieser Ebene senkrecht stehen. Es soll nun aber angenommen werden, daſs die Gesichtslinie des Fernrohrs gegen die

Ebene des Sextanten um den Winkel i geneigt ist. Ist dann wieder BAC der gröſste Kreis, in welchem die Ebene des Sextanten die Kugel schneidet, so wird jetzt die Gesichtslinie des Fernrohrs die Kugel nicht mehr in dem Punkte A treffen, sondern in dem Punkte A', welcher um den Bogen i eines gröſsten Kreises senkrecht über A liegt. Ferner wird der Strahl nach der Reflexion von dem kleinen und dem groſsen Spiegel die Kugel in den Punkten B' und C' treffen, welche um denselben Bogen i des gröſsten Kreises senkrecht unter B und über C liegen. Bezeichnet man dann den Pol des gröſsten Kreises ABC mit Q, so ist QAC der auf dem Sextanten abgelesene Winkel, dagegen der Bogen $A'C$ der wahre Winkel zwischen den beiden beobachteten Objecten, und wenn man den erstern α, den letztern α' nennt, so hat man in dem sphärischen Dreiecke $A'QC'$:

$$\begin{aligned}\cos\alpha' &= \sin i^2 + \cos i^2 \cos\alpha \\ &= \cos\alpha + 2\, i^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2,\end{aligned}$$

also nach Formel (19) der Einleitung:

$$\alpha' = \alpha - i^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Hat also das Fernrohr eine Neigung gegen die Ebene des Sextanten, so miſst man alle Winkel mit demselben zu groſs. Die Gröſse des Fehlers kann man nun einfach bestimmen. In dem Fernrohr des Sextanten sind nämlich zwei Fäden angebracht, welche der Ebene desselben parallel sind und deren Mitte die Gesichtslinie des Fernrohrs bezeichnen soll.

Bringt man nun die Bilder zweier Objecte an einem Faden zur Berührung und neigt dann den Sextanten so, daſs die Bilder sich an dem andern Faden befinden, so müssen sie sich auch hier noch berühren, wenn die Gesichtslinie des Fernrohrs, also die Richtung nach der Mitte zwischen den beiden Fäden der Ebene des Sextanten parallel ist, weil man in dem Falle beide Male in gleichen Neigungswinkeln gegen die Ebene des Sextanten beobachtet hat. Berühren sich dagegen die Bilder das zweite Mal nicht mehr, so ist dies ein Zeichen, daſs die Gesichtslinie des Fernrohrs gegen die Ebene des Sextanten geneigt ist. Die Winkel, welche man auf dem Sextanten abliest, wenn man die Bilder an den beiden Fäden zur Berührung bringt, seien nun s und s', die Neigung des

Fernrohrs sei i, die Entfernung der beiden Fäden δ und die wahre Entfernung der beiden Objecte b, so ist das eine Mal:

$$s = b + \left(\frac{\delta}{2} - i\right)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s,$$

und das andre Mal:

$$s' = b + \left(\frac{\delta}{2} + i\right)^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s';$$

also, wenn man

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s$$

nimmt:

$$i = \frac{s' - s}{2\delta} \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} s.$$

Wie man leicht sieht, gehört der kleinere Winkel immer zu demjenigen Faden, welcher am wenigsten von der Ebene des Sextanten abweicht, oder die Richtung, welche der Ebene des Sextanten parallel ist, liegt um den Winkel $\frac{\delta}{2} - i$ von diesem Faden entfernt. Man mufs dann in dieser Entfernung einen dritten Faden einziehen und alle Berührungen an diesem beobachten, oder, wenn man die Berührungen in der Mitte der ursprünglichen Fäden beobachtet, von allen gemessenen Winkeln die Gröfse $i^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} s$ abziehen.

Die Ebene des kleinen Spiegels soll nun parallel der Ebene des grofsen Spiegels sein, wenn die Alhidade nach dem Nullpunkte gerichtet ist, und zugleich sollen beide Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehen. Den Parallelismus der beiden Spiegel kann man leicht prüfen und den Fehler, wenn ein solcher vorhanden ist, corrigiren. Der kleine Spiegel hat nämlich zweierlei Correctionsschrauben. Die eine Schraube befindet sich auf der Rückseite des Spiegels und dreht denselben um eine auf der Ebene des Sextanten senkrechte Axe, die zweite Schraube dient dagegen dazu, die Ebene des Spiegels senkrecht gegen die Ebene des Sextanten zu stellen. Man bringe nun, indem man die Alhidade nahe auf den Nullpunkt richtet, das direct gesehene und das zweimal reflectirte Bild eines unendlich weit entfernten Objects zur Deckung. Ist dies möglich, so stehen die beiden Spiegel einander parallel und der Punkt, welchen die Alhidade angiebt, ist dann der eigentliche Nullpunkt, von welchem aus alle Winkel gemessen werden müssen. Kann

man aber keine Deckung hervorbringen, sondern gehen die beiden Bilder vor einander vorbei, so ist dies ein Zeichen, dafs die Ebene des kleinen Spiegels der des grofsen nicht parallel ist. Bringt man dann die beiden Bilder senkrecht unter einander, sodafs ihre Distanz ein Minimum ist, so sind die Durchschnitte beider Spiegel mit der Ebene des Sextanten parallel und durch die zweite der vorher erwähnten Schrauben kann man dann den kleinen Spiegel so weit bewegen, bis die Bilder einander decken, also die beiden Spiegel einander parallel sind. Der Punkt, welchen dann die Alhidade angiebt, ist dann wieder der eigentliche Nullpunkt. Zeigt die Alhidade auf den Winkel c, so nennt man c den Collimationsfehler des Sextanten, welchen man von allen beobachteten Winkeln abziehen mufs. Will man denselben fortschaffen, sodafs die Alhidade wirklich auf Null zeigt, wenn die Bilder desselben unendlich weit entfernten Gegenstandes einander decken, so mufs man die Alhidade genau auf Null stellen und die beiden Bilder durch die Schraube auf der Rückseite des kleinen Spiegels zur Deckung bringen. Gewöhnlich läfst man aber diesen Fehler unverbessert und zieht denselben von allen beobachteten Winkeln ab. In der Regel bedient man sich der Sonne zur Bestimmung dieses Fehlers, indem man das reflectirte Bild zuerst den einen und nachher den anderen Rand des direct gesehenen Bildes berühren läfst. Hat man das erste Mal a, das andere Mal b abgelesen, so ist $\frac{a+b}{2}$ gleich dem Collimationsfehler c und $\frac{b-a}{2}$ oder $\frac{a-b}{2}$, je nachdem a kleiner oder gröfser als b ist, der Durchmesser der Sonne. Die eine der beiden Ablesungen wird dann immer auf den Excedens der Theilung fallen, d. h. auf das Stück der Theilung vor dem Nullpunkte, also Winkel im vierten Quadranten geben. Man kann aber auch die Winkel auf dem Excedens vom Nullpunkte ab zählen und dieselben negativ nehmen.

Bei den Beobachtungen der Sonne wendet man immer farbige Blendgläser zur Schonung des Auges an. Sind die beiden Flächen dieser Gläser nicht parallel, so erhält man die Bestimmung des Collimationsfehlers durch die Sonne fehlerhaft. Macht man nachher Sonnenbeobachtungen, so ist dieser Feh-

ler unschädlich, wenn man nur dabei dieselben Blendgläser anwendet, welche man bei der Bestimmung des Collimationsfehlers benutzt hat. Stellt man dagegen andre Beobachtungen z. B. Beobachtungen von Monddistanzen an, so mufs man immer den Collimationsfehler durch einen Stern oder durch ein irdisches Object bestimmen.

Wenn man nun aber ein irdisches Object beobachtet, dessen Entfernung nicht als unendlich grofs gegen die Entfernung der beiden Spiegel angenommen werden kann, so mufs man an den so gefundenen Collimationsfehler c noch eine Correction anbringen, um daraus den wahren Collimationsfehler c_0 zu erhalten, welchen man durch ein unendlich weit entferntes Object gefunden hätte. Ist nämlich Δ die Entfernung des Objects von dem kleinen Spiegel, f die Entfernung beider Spiegel, β der Winkel, welchen die Gesichtslinie des Fernrohrs mit dem Lothe auf dem kleinen Spiegel macht, so erhält man den Winkel c, welchen der directe und der zweimal reflectirte Strahl am Objecte mit einander bilden, nachdem man das directe Bild und das Spiegelbild zur Coincidenz gebracht hat, durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} c = \frac{f \sin 2\beta}{\Delta + f \cos 2\beta},$$

also:

$$c = \frac{f}{\Delta} \sin 2\beta - \tfrac{1}{2} \frac{f^2}{\Delta^2} \sin 4\beta,$$

wo die rechte Seite der Gleichung mit 206265 multiplicirt werden mufs, wenn man c in Secunden haben will. Hätten nun die Spiegel parallel gestanden, so hätte der vom grofsen Spiegel reflectirte Strahl ein um den Winkel c von dem beobachteten entferntes Object getroffen und man hätte den wahren Collimationsfehler c_0 erhalten, wenn man dies Object mit dem vorigen hätte coincidiren lassen. Wäre also c_1 der Winkel gewesen, welchen man auf dem Kreise abgelesen hätte, wenn das reflectirte Bild auf das Object fällt, so würde sein:

$$c_0 = c_1 + \frac{f}{\Delta} \sin 2\beta - \tfrac{1}{2} \frac{f^2}{\Delta^2} \sin 4\beta.$$

Den Winkel β, der auch vorher schon gebraucht wurde, kann man leicht bestimmen, wenn man den Sextanten auf einem Stative befestigt und durch Einstellung auf ein irdisches Object den Collimationsfehler c_1 bestimmt. Sieht man

dann durch ein mit einem Fadenkreuze versehenes Fernrohr in den grofsen Spiegel, bringt das Kreuz mit dem einmal reflectirten Bilde des Objects zur Deckung und mifst dann mit dem Sextanten den Winkel s zwischen dem Objecte und dem Fadenkreuze des Fernrohrs, so hat man:

$$s - c_0 = 2\beta - \frac{f}{\Delta} \sin 2\beta.$$

Da aber auch:

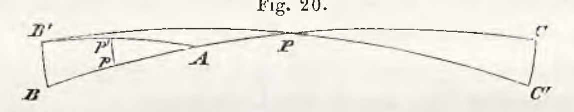
$$c_0 = c_1 + \frac{f}{\Delta} \sin 2\beta,$$

so erhält man:

$$2\beta = s - c_1.$$

Ist der kleine Spiegel gegen die Fläche des Sextanten um den Winkel i geneigt, so wird das Loth auf demselben die um das Auge des Beobachters beschriebene Kugel in dem Punkte p' treffen, welcher um den Bogen i eines gröfsten Kreises senkrecht über p liegt. Fig. 20. Dann trifft die

Fig. 20.



Richtung des Strahls nach der Reflexion vom kleinen Spiegel die Kugel in dem Punkte B' und nach der Reflexion vom grofsen Spiegel in dem Punkte C'. Dann ist wieder AC der auf dem Sextanten abgelesene Winkel α, AC' dagegen der wirklich gemessene Winkel, gleich α'. Man hat dann, wie man leicht sieht:

$$BB' = CC' = 2\cos\beta \, . \, i,$$

wo β wieder der Winkel zwischen der Gesichtslinie des Fernrohrs und dem Lothe auf dem kleinen Spiegel, also gleich Ap ist. Ferner hat man:

$$\begin{aligned} \cos\alpha' &= \cos\alpha \cos CC' \\ &= \cos\alpha - 2\cos\beta^2 i^2 \cos\alpha, \end{aligned}$$

oder nach Formel (19) der Einleitung:

$$\alpha' = \alpha + \frac{2\cos\beta^2 i^2}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Wäre der grofse Spiegel gegen die Ebene des Sextanten um i geneigt und hätte man den kleinen Spiegel demselben parallel und das Fernrohr senkrecht auf beide gestellt, so würden jetzt p', P', A' und ebenso B' und C' in einem klei-

nen Kreise liegen, der um den Bogen i von dem gröſsten Kreise absteht, in welchem die Ebene des Sextanten die Kugel schneidet. Dann wäre der Winkel $p'P'$ zwischen den beiden Spiegeln oder $\frac{1}{2}\alpha'$ ebenso wie vorher, wo das Fernrohr um den Winkel i geneigt angenommen wurde:

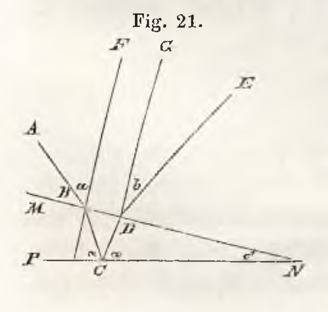
$$\tfrac{1}{2}\alpha' = \tfrac{1}{2}\alpha - i^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}\alpha,$$

also

$$\alpha' = \alpha - 2\,i^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}\alpha.$$

Um diesen Fehler wegzuschaffen, bedient man sich gewöhnlich zweier rechtwinklig gebogenen Metallplatten, welche in gleicher Höhe Dioptern haben. In der einen Platte ist nämlich in der senkrecht stehenden Fläche ein kleines Loch angebracht, die senkrechte Fläche der andern Platte ist dagegen durchbrochen und ein feiner Silberfaden horizontal so eingezogen, daſs derselbe genau die Mitte der Oeffnung schneidet, wenn beide Dioptern auf eine Ebene aufgesetzt werden. Man legt nun den Sextanten horizontal, stellt die erstere Diopter vor den groſsen Spiegel und dreht diesen vermittelst der Alhidade so lange, bis man durch die Oeffnung das Bild der Platte in dem Spiegel sieht. Darauf setzt man die andere Diopter ebenfalls vor den Spiegel, sodaſs man auch den Faden durch die Oeffnung sehen kann. Geht dann der Faden genau durch die Mitte des Bildes, welches der Spiegel von der Oeffnung macht, so steht der groſse Spiegel senkrecht, weil dann die Oeffnung, ihr Spiegelbild und der Faden in einer geraden Linie liegen und diese (wegen der gleichen Höhe des Fadens und der Oeffnung) der Ebene des Sextanten parallel ist. Ist dies nicht der Fall, so muſs man die Stifte, auf denen der groſse Spiegel ruht, so lange ändern, bis man die Verticalität erreicht hat.

Fig. 21.



Es ist auch möglich, daſs die beiden Flächen der Spiegel, welche einander parallel sein sollen, einen kleinen Winkel mit einander bilden, sodaſs die Spiegel prismatisch sind. Es sei nun AB der auf die Vorderfläche MN des groſsen Spiegels auffallende Strahl (Fig. 21), so wird derselbe nach C gebrochen. Trifft

der Strahl dann die hintere Fläche unter dem Winkel a, so wird er unter demselben Winkel reflectirt und an der Vorderseite des Spiegels nach der Richtung DE gebrochen. Sind dann beide Flächen des Spiegels einander parallel, so ist der Winkel ABF gleich GDE, sind dagegen die Flächen beider Spiegel gegen einander geneigt, so ist dies nicht mehr der Fall. Es sei nun Winkel $MNP = \delta$; ferner seien die Einfallswinkel ABF und GDE gleich a und b und die Brechungswinkel a_1 und b_1, so ist

$$a_1 + a = 90^0 + \delta$$
$$b_1 + a = 90^0 - \delta,$$

also

$$b_1 = a_1 - 2\delta.$$

Ist aber $\frac{n}{m}$ das Brechungsverhältniſs für den Uebergang von Luft in Glas, so ist auch

$$\sin a_1 = \frac{n}{m} \sin a, \quad \sin b_1 = \frac{n}{m} \sin b;$$

es ist also

$$\sin a - \sin b = \frac{m}{n} [\sin a_1 - \sin a_1 \cos 2\delta + \cos a_1 \sin 2\delta]$$

oder

$$a - b = \frac{m}{n} 2\delta \cdot \frac{\cos a_1}{\cos a} = 2\delta \sqrt{\frac{m^2}{n^2} \sec a^2 - \operatorname{tang} a^2}$$
$$= 2\delta \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2} \sec a^2 + 1}.$$

a ist nun der Winkel, welchen die Richtung vom Auge nach dem zweiten Object mit dem Lothe auf dem groſsen Spiegel macht. Nennt man dann β den constanten Winkel, welchen die Richtung der Gesichtslinie des Fernrohrs mit dem Lothe auf dem kleinen Spiegel macht, γ den Winkel, welchen die beiden Objecte mit einander bilden, so ist

$$a = \tfrac{1}{2}(\gamma + \beta)$$

und man hat:

$$a - b = 2\delta \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2} \sec \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2 + 1}.$$

Die an den Winkel γ anzubringende Correction ist nun der Unterschied des Werthes für $\gamma = 0$ von dem obigen Werthe, indem, wenn die Flächen beider Spiegel nicht par-

allel sind, auch der Nullpunkt fehlerhaft ist. Es ist daher diese Correction x:

$$x = 2\delta \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2} \sec\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2 + 1} - 2\delta \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{n^2} \sec \tfrac{1}{2}\beta^2 + 1},$$

und diese Correction ist zu addiren, wenn die dickere Seite des Spiegels dem einfallenden Strahle zugekehrt ist, weil dann der reflectirte Strahl einen kleineren Winkel mit dem Lothe auf dem Spiegel macht als der einfallende, also auf dem Sextanten ein zu kleiner Winkel abgelesen wird. Dagegen ist die Correction zu subtrahiren, wenn die dünnere Seite des Spiegels dem einfallenden Strahle zugewandt ist.

Die Formel für x kann man noch etwas einfacher so schreiben:

$$x = 2\delta \frac{m}{n} \left\{ \sec \frac{\beta + \gamma}{2} \sqrt{1 - \frac{n^2}{m^2} \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2} - \sec \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - \frac{n^2}{m^2} \sin \tfrac{1}{2}\beta^2} \right\},$$

oder, da $\frac{n}{m}$ sehr nahe gleich $\frac{2}{3}$ ist:

$$x = 3\delta \left\{ \sec \frac{\beta + \gamma}{2} \sqrt{1 - \tfrac{4}{9} \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2} - \sec \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - \tfrac{4}{9} \sin \tfrac{1}{2}\beta^2} \right\}.$$

Um nun x zu bestimmen, messe man, nachdem man, wie vorher gezeigt war, den Nullpunkt bestimmt hat, den Abstand zweier scharf begrenzten, über 100° von einander entfernten Objecte, z. B. den Abstand zweier Fixsterne. Dann nehme man den grofsen Spiegel aus seiner Fassung heraus, setze ihn umgekehrt ein und messe, nachdem man den Nullpunkt wieder bestimmt hat, denselben Winkel. Ist dann Δ die wahre Entfernung beider Sterne, so erhält man das zweite Mal

$$\Delta - x = s',$$

wenn man das erste Mal

$$\Delta + x = s''$$

abgelesen hat, also wird:

$$\delta = \frac{s' - s''}{6 \sec \frac{\beta + \gamma}{2} \sqrt{1 - \tfrac{4}{9} \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2}}.$$

Da die vom grofsen Spiegel kommenden Strahlen den kleinen Spiegel immer unter demselben Winkel treffen, so ist der Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des kleinen Spiegels herrührt, für alle Stellungen des grofsen Spiegels, also auch für die dem kleinen Spiegel parallele, die-

selbe, sodafs also dieser Fehler auf den Unterschied zweier Stellungen des grofsen Spiegels oder auf die gemessenen Winkelabstände keinen Einflufs hat.

Aufserdem kann der Sextant noch eine Excentricität haben, indem der Mittelpunkt der Drehung der Alhidade nicht mit dem der Theilung zusammenfällt. Dieser Fehler mufs durch die Messung bekannter Winkel zwischen zwei Objecten bestimmt werden. Ist nämlich α dieser Winkel und s die auf dem Sextanten gemachte Ablesung, so ist nach No. 6 dieses Abschnitts:

$$\alpha - s = \frac{e}{r} \sin \tfrac{1}{2} (s - O)\, 206265,$$

oder

$$\alpha - s = \left[\frac{e}{r} \cos \tfrac{1}{2} O \,.\, \sin \tfrac{1}{2} s - \frac{e}{r} \sin \tfrac{1}{2} O \,.\, \cos \tfrac{1}{2} s\right] 206265.$$

Durch die Messung zweier Winkel wird man daher $\frac{e}{r} \cos \frac{1}{2} O$ und $\frac{e}{r} \sin \frac{1}{2} O$ und daraus $\frac{e}{r}$ und O bestimmen können. Wenn diese Werthe gefunden sind, mufs man zu jeder am Sextanten gemachten Ablesung hinzulegen:

$$+ \frac{e}{r} \sin \tfrac{1}{2} (s - O)\, 206265.$$

Da der Fehler der Excentricität bei einem vollen Kreise durch die Ablesung zweier diametral gegenüber stehenden Nonien vollständig eliminirt wird, so sind die in neuerer Zeit in Gebrauch gekommenen Reflexionskreise den Sextanten vorzuziehen. Besonders bequem sind die von Pistor & Martins erfundenen Reflectionskreise, bei denen der kleine Spiegel durch ein Prisma ersetzt ist. Diese haben überdies den Vortheil, dafs man damit alle Winkel von 0° bis 180° messen kann. Sonst gilt alles vom Spiegelsextanten Gesagte auch für diese Instrumente.

Anm. Vergl. Encke, über den Spiegelsextanten. Berliner astronom. Jahrbuch für 1830.

VII. Instrumente, welche zur Messung des relativen Ortes nahe stehender Gestirne dienen. (Mikrometer und Heliometer.)

32. Fadenmikrometer an einem parallactisch aufgestellten Fernrohre.

Um die Rectascensions- und Declinationsunterschiede nahe stehender Gestirne zu messen, hat man in parallactisch aufgestellten Fernröhren (Aequatorealen) ein Fadenmikrometer, welches aus einem Systeme mehrerer paralleler Fäden, durchschnitten von einem oder mehreren verticalen besteht. Dies System von Fäden kann um die Axe des Fernrohrs gedreht werden, sodafs man die parallelen Fäden der Richtung der täglichen Bewegung parallel stellen kann, indem man einen dem Aequator nahe stehenden Stern längs dem einen Faden durchgehen läfst und das Fadenkreuz so lange dreht, bis der Stern denselben bei seinem Durchgange durch das Feld nicht mehr verläfst. Dann stellt der verticale Faden einen Stundenkreis vor. Läfst man also einen bekannten und einen unbekannten Stern durch das Feld des Fernrohrs gehen und beobachtet die Zeiten der Durchgänge durch den verticalen Faden, so ist der Unterschied dieser Zeiten unmittelbar gleich dem Rectascensionsunterschiede beider Sterne. Um nun auch Declinationsunterschiede messen zu können, hat man noch einen beweglichen, ebenfalls der Richtung der täglichen Bewegung parallelen Faden, welchen man vermittelst einer Schraube senkrecht gegen den verticalen Faden verstellen kann. An dem Instrumente kann man nun die Anzahl der ganzen Schraubenumgänge, um welche man den Faden fortbewegt hat und die Hunderttheile derselben an dem eingetheilten Kopfe der Schraube ablesen. Kennt man also den Werth einer Schraubenumdrehung in Secunden und ist die Schraube regelmäfsig oder sind die Unregelmäfsigkeiten derselben nach No. 9 dieses Abschnitts bestimmt, so kann man immer finden, um wie viel man den Faden in einem gewissen Sinne verrückt hat. Läfst man dann ein Gestirn auf einem der parallelen Fäden durch das Feld des Fernrohrs laufen, schraubt den beweglichen Faden, bis derselbe das andere Gestirn deckt und liest dann

die Stellung der Schraube ab, so erhält man den Declinationsunterschied beider Gestirne, wenn man nun auch die Stellung der Schraube abliest, nachdem man den beweglichen Faden zur Coincidenz mit dem Faden gebracht hat, auf welchem der erstere Stern lief und den Unterschied beider Ablesungen nimmt. Hat das eine Gestirn eine eigene Bewegung, so hat man darauf zu sehen, dafs man für die Zeit des Rectascensionsunterschiedes die Zeit des Durchgangs dieses Gestirns durch den Verticalfaden und ebenso für die Zeit des Declinationsunterschiedes die Zeit der Einstellung dieses Gestirns nimmt.

Die Coincidenz der Fäden beobachtet man am Besten so, dafs man den beweglichen Faden dem festen Faden äufserst nahe bringt und nachher auf der andern Seite in dieselbe Entfernung. Liest man dann die Schraube für beide Stellungen ab, so ist das Mittel der Ablesungen die Coincidenz der Fäden. Macht man diese Bestimmung nicht blos in der Mitte des Feldes, sondern auch auf jeder Seite desselben in der Nähe des Randes, so kann man dadurch untersuchen, ob die beiden Fäden einander genau parallel sind, da in dem Falle die Coincidenz für beide Seiten des Feldes dieselbe sein mufs.

Um nun den Werth einer Schraubenumdrehung in Secunden zu finden, verfährt man wie bei der Bestimmung der Fädendistanzen im Mittagsrohre, indem man den früher verticalen Faden der Richtung der täglichen Bewegung parallel stellt und die Durchgangszeiten eines dem Pole nahen Sterns durch die parallelen Fäden, welche dann Stundenkreise vorstellen, beobachtet. Dann erhält man dadurch die Distanzen der Fäden in Bogensecunden, und da man dieselben auch in Schraubenumdrehungen bestimmen kann, wenn man den beweglichen Faden nach und nach zur Coincidenz mit den einzelnen Fäden bringt, so erhält man dadurch den Werth einer Schraubenumdrehung in Bogensecunden. Diese Art der Bestimmung wird besonders genau, wenn man sich eines Chronograph zur Beobachtung der Durchgangszeiten bedienen kann.

Eine andre Methode der Bestimmung des Werthes einer Schraubenumdrehung ist die durch Messung der Höhe eines

Schraubengangs und der Brennweite des Fernrohrs, da, wenn man erstere mit m, die Brennweite mit f bezeichnet, der Werth r einer Schraubenumdrehung gefunden wird durch:

$$r = \frac{m}{f} 206265.$$

Auch kann man wieder nach Gauſs's Methode die Abstände der Fäden durch ein Winkelinstrument messen, und dann diese Abstände in Umdrehungen der Schraube finden; endlich kann man auch einen anderweitig bekannten Winkel, z. B. den Abstand zweier genau bestimmten Sterne mittelst der Schraube messen; in beiden Fällen ist aber der Genauigkeit der Bestimmung eine Grenze gesetzt durch die bei dem Winkelinstrumente zu erreichende Genauigkeit, oder durch die Genauigkeit der früheren Bestimmung des Abstands der Sterne.

Da die Brennweite des Fernrohrs sich mit der Temperatur ändert, ebenso auch die Höhe der Schraubengänge, so ist auch der Werth einer Schraubenumdrehung von der Temperatur abhängig. Jede Bestimmung gilt daher nur für die Temperatur, bei welcher dieselbe gemacht ist, und wenn man Bestimmungen für verschiedene Temperaturen hat, so kann man allgemein annehmen:

$$r = a - b\,(t - t_0),$$

wo man dann aus den verschiedenen Werthen die wahrscheinlichsten Werthe von a und b durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmen kann.

Gewöhnlich ist ein solches Micrometer so eingerichtet, daſs man damit auch Distanzen und Positionswinkel, d. h. den Winkel, welchen die Verbindungslinie beider Sterne mit der Richtung des Declinationskreises macht, bestimmen kann, indem man an einem am Oculare befindlichen, getheilten Kreise (dem Positionskreise) ablesen kann, um wieviel man das Fadenkreuz gegen die Richtung der täglichen Bewegung dreht. Die Distanzen miſst man dann, indem man einen der parallelen Fäden, am Besten den Mittelfaden auf das eine Gestirn, den beweglichen Faden auf das andre Gestirn stellt, nachdem man vorher den früher verticalen Faden in die Verbindungslinie gebracht hat. Bestimmt man nachher die Coincidenz

des beweglichen Fadens mit dem Mittelfaden, so ist der Unterschied beider Angaben der Schraube die Distanz der Gestirne, oder wenn man das zweite Mal den Mittelfaden auf den zweiten Stern, den beweglichen Faden dagegen auf den ersten Stern bringt, so ist der Unterschied beider Ablesungen der Schraube gleich der doppelten Distanz der beiden Gestirne. Liest man ferner den Positionskreis ab, sowohl wenn der eine Faden beide Gestirne schneidet, als auch wenn dieser Faden der täglichen Bewegung parallel gestellt ist, so ist der Unterschied beider Ablesungen der Positionswinkel, aber vom Parallel ab gezählt. Gewöhnlich nimmt man aber den nördlichen Theil des Declinationskreises als Anfangspunkt der Positionswinkel und zählt dieselben durch Osten, Süden, Westen von 0° bis 360° herum. Nimmt man diese Zählungsart an, so mufs man zu dem auf die vorher erwähnte Weise gefundenen Nullpunkte der Positionswinkel 90° hinzulegen.

Um den Durchschnittspunkt der Fäden in die Mitte des Positionskreises zu bringen, richtet man das Fernrohr auf ein entferntes Object und dreht den Positionskreis um 180°. Bleibt die Stellung des Objects gegen die parallelen Fäden dieselbe, so ist die Bedingung erfüllt, wo nicht, so kann man das ganze System der festen Fäden gegen den beweglichen Faden durch eine zweite Schraube, die der Mikrometerschraube gegenüber steht, so lange verschieben, bis dies erreicht ist. Durch die Bewegung dieser zweiten Schraube wird natürlich die Coincidenz der Fäden geändert, und man mufs daher immer darauf sehen, dafs die Schraube während einer Beobachtungsreihe, während welcher man die Coincidenz als beständig annimmt, nicht berührt wird.

Um nun aus solchen Beobachtungen von Positionen und Distanzen den Rectascensions- und Declinationsunterschied beider Gestirne zu erhalten, mufs man die Relationen zwischen denselben und den Distanzen und Positionswinkeln kennen. Da aber in dem Dreiecke zwischen den beiden Sternen und dem Pole des Aequators die Seiten gleich Δ, $90^\circ - \delta$ und $90^\circ - \delta'$ und die denselben gegenüberstehenden Winkel gleich $\alpha' - \alpha$, $180^\circ - p'$ und p sind, wo p und p' die Positionswinkel und Δ die Distanz bezeichnen, so erhält man nach den Gaufsischen Formeln:

$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta \sin \tfrac{1}{2}(p'+p) = \sin \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\cos \tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta \cos \tfrac{1}{2}(p'+p) = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\sin \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$$
$$\cos \tfrac{1}{2}\Delta \sin \tfrac{1}{2}(p'-p) = \sin \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\sin \tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)$$
$$\cos \tfrac{1}{2}\Delta \cos \tfrac{1}{2}(p'-p) = \cos \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\cos \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta).$$

Sind $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$ kleine Gröfsen, sodafs man den Sinus mit dem Bogen vertauschen und den Cosinus gleich Eins setzen kann, so ist auch Δ eine kleine Gröfse, und da man dann auch p gleich p' nehmen kann, so erhält man:

$$\cos \tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)[\alpha'-\alpha] = \Delta \sin p$$
$$\delta'-\delta = \Delta \cos p.$$

Solche Messungen von Positionen und Distanzen lassen sich am Bequemsten machen, wenn das Fernrohr mit einem Uhrwerke versehen ist, durch welches es so um die Stundenaxe gedreht wird, dafs es der Bewegung des Sterns folgt. Hat man aber kein solches Uhrwerk oder kein vollkommenes, so kann man sich eines solchen Mikrometers in Verbindung mit dem Chronograph mit Vortheil zur Bestimmung nahe stehender fester Objecte, z. B. der Doppelsterne, auch ohne Benutzung der Schraube bedienen. Man bringt zu dem Ende den beweglichen Faden in eine beliebige Entfernung von dem Mittelfaden und aufserdem beide durch Drehung des Positionskreises in eine beliebige Lage gegen den Parallel. Beobachtet man dann den Durchgang des Sterns A durch den ersten der beiden Fäden, den Begleiter am zweiten Faden und nennt die Zwischenzeit t; beobachtet man ferner den Begleiter am ersten Faden, den Stern A am zweiten Faden und nennt die Zwischenzeit t', so ist, wenn Δ die Entfernung beider Sterne, p der Positionswinkel des Begleiters, i dagegen die durch den Positionskreis gegebene Neigung der Fäden gegen den Parallel von der westlichen Seite durch Norden hindurch gerechnet ist:

$$a = \cos\delta \,.\, \tfrac{1}{2}(t-t') = \Delta \frac{\cos(p-i)}{\sin i}.$$

Die Gröfse a ist nämlich das Stück des Parallels des Hauptsterns zwischen dem Hauptsterne und einem durch den Begleiter gehenden und gegen den Parallelkreis um den Winkel i geneigten gröfsten Kreises. Betrachtet man alle hier vorkommenden Bögen als gerade Linien, so hat man ein Dreieck, in welchem zwei der Seiten gleich Δ und a und

die gegenüberstehenden Winkel i und $90^0 + p - i$ sind. Hat man dann in zwei verschiedenen Lagen der Fäden beobachtet, so findet man aus beiden Werthen von a sowohl Δ als auch p oder wenn man in mehr als zwei Lagen beobachtet hat, so giebt jedes a eine Gleichung von der Form:

$$0 = \frac{\Delta \cos(p-i)}{\sin i} - a + d\Delta \frac{\cos(p-i)}{\sin i} - dp \,.\, \Delta \frac{\sin(p-i)}{\sin i} \frac{3600}{206265},$$

und aus mehren solchen Gleichungen kann man die wahrscheinlichsten Werthe von $d\Delta$ und dp bestimmen.

An dem Fernrohre der Sternwarte zu Ann Arbor wurden z. B. die folgenden Beobachtungen von ε Hydrae gemacht, wo jede Bestimmung von a ein Mittel aus 10 Durchgängen ist:

$$i = 99^0\, 24' \qquad 50^0\, 24' \qquad 141^0\, 40''$$
$$a = -1''.062 \qquad -4''.239 \qquad +2''.382.$$

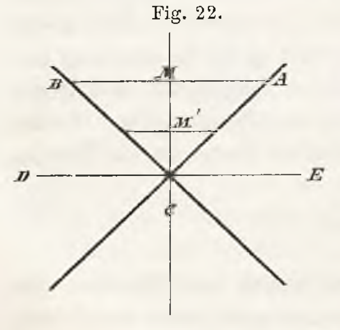
Nimmt man $p = 207^0$, $\Delta = 3''.5$, so erhält man die Gleichungen:

$$0 = -0''.011 \quad -0.306\, d\Delta \quad -0.590\, dp'$$
$$0 = +0''.070 \quad -1.191\, d\Delta \quad -0.315\, dp'$$
$$0 = -0''.044 \quad +0.668\, d\Delta \quad -0.089\, dp',$$

wo $p' = \frac{1}{10} p$ ist. Daraus erhält man $d\Delta = +0''.056$, $dp = +0^0.208$ und die bei a übrig bleibenden Fehler werden $-0''.040$, $-0''.004$ und $+0''.024$.

33. Aufser diesem Fadenmikrometer hat man noch andere, die indessen hier nur kurz erwähnt werden sollen, da dieselben fast gar nicht mehr im Gebrauche sind.

Fig. 22.



Das erste ist das Mikrometer, dessen Fäden Winkel von 45^0 mit einander bilden, Fig. 22. Stellt man den einen Faden DE der Richtung der täglichen Bewegung parallel, so kann man aus der Zeit $t' - t$, welche ein Stern braucht, um von A nach B zu gelangen, dessen Abstand vom Mittelpunkte finden, indem:

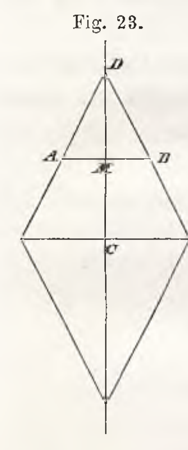
$$MC = \frac{t' - t}{2}\, 15 \cos \delta.$$

Da man ebenso für einen zweiten Stern hat:

$$M'C = \frac{\tau' - \tau}{2}\, 15 \cos \delta',$$

so erhält man hieraus den Declinationsunterschied beider Sterne. Das arithmetische Mittel der Zeiten t und t' ist die Zeit, zu welcher der Stern in dem Stundenkreise CM war; ebenso ist $\frac{\tau' + \tau}{2}$ die Zeit, wann der zweite Stern in diesem Stundenkreise war. Der Unterschied beider Mittel ist gleich dem Rectascensionsunterschiede beider Sterne.

Fig. 23.



Ein zweites Mikrometer ist das Bradley-sche Netz, bei welchem die Fäden einen Rhombus bilden, dessen kleinere Diagonale die Hälfte der gröfseren ist, Fig. 23. Die kleinere Diagonale wird der täglichen Bewegung parallel gestellt. Läfst man nun einen Stern durch die Fäden laufen, so wird die Zwischenzeit der Beobachtungen im Bogen des gröfsten Kreises ausgedrückt, gleich MD sein, sodafs:

$$MD = 15\,(t' - t)\cos\delta.$$

Für einen zweiten Stern erhält man:

$$M'D = 15\,(\tau' - \tau)\cos\delta'.$$

und daraus den Declinationsunterschied. Den Rectascensionsunterschied findet man ganz auf dieselbe Weise wie bei dem früheren Mikrometer.

Diese Mikrometer erfordern eine genaue Untersuchung, ob die Fäden einander unter den richtigen Winkeln schneiden. Auch haben sie das Unbequeme, dafs sie des Nachts erleuchtet werden müssen, also zur Beobachtung sehr schwacher Objecte nicht angewandt werden können. Sie sind daher mit Recht ganz durch die Kreismikrometer verdrängt, die sich einmal mit grofser Genauigkeit ausführen lassen, dann aber auch den Vortheil gewähren, dafs man sie immer ohne Beleuchtung anwendet.

34. Das Kreismikrometer besteht in einem genau kreisförmig abgedrehten Metallringe, der in einer im Brennpunkte des Fernrohrs angebrachten Glasplatte befestigt ist, und daher im Gesichtsfelde des Fernrohrs freischwebend erscheint. An diesem Ringe werden die Ein- und Austritte der Sterne beobachtet. Dann ist das arithmetische Mittel

der Zeiten des Ein- und Austritts die Zeit, zu welcher der Stern in dem durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Stundenkreise war. Man erhält daher den Rectascensionsunterschied zweier Sterne grade so, wie bei den vorher betrachteten Mikrometern. Kennt man nun auch den Halbmesser des Kreises, so kann man auch, da die Gröfse der Sehnen bekannt ist, die Abstände vom Mittelpunkte und dadurch die Declinationsunterschiede erhalten.

Es seien t und t' die Zeiten des Ein- und Austritts des Sterns, dessen Declination δ, und τ und τ' dasselbe für einen andern Stern, dessen Declination δ', so ist also:

$$\alpha' - \alpha = \tfrac{1}{2}(\tau' + \tau) - \tfrac{1}{2}(t' + t).$$

Bezeichnen dann μ und μ' die halben Sehnen, welche die Sterne beschreiben, so ist:

$$\mu = \frac{15}{2}(t' - t)\cos\delta$$

und

$$\mu' = \frac{15}{2}(\tau' - \tau)\cos\delta'.$$

Setzt man ferner:

$$\sin\varphi = \frac{\mu}{r}$$

$$\sin\varphi' = \frac{\mu'}{r},$$

wo r den Halbmesser des Kreises bedeutet, so erhält man, wenn man mit D die Declination des Centrums des Kreises bezeichnet:

$$\delta - D = r\cos\varphi$$
$$\delta' - D = r\cos\varphi',$$

also:

$$\delta' - \delta = r\,[\cos\varphi' \pm \cos\varphi],$$

je nachdem die Sterne zu verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite des Mittelpunkts durch das Feld gegangen sind.

Am 11ten April 1848 wurde auf der Sternwarte zu Bilk an dem Ringmikrometer des sechsfüfsigen Refractors, dessen Halbmesser gleich 18′ 46″. 25 ist, die Flora

$$(\delta' = 24^\circ\ 5'.\ 4)$$

und ein Stern, dessen scheinbarer Ort

$$\alpha = 91^\circ\ 12'\ 59''.01$$
$$\delta = 24\quad 1\quad 9\ .01$$

war, mit einander verglichen. Es war:

$$\tau = 11^h\ 16^m 35^s.0 \text{ Sternzeit } t = 11^h\ 17^m 53^s.0$$
$$\tau' = \quad 17\ \ 25\ .5 \qquad\qquad t' = \quad 19\ \ 46\ .5$$
$$\tau' - \tau = 50^s.5 \qquad\qquad t' - t = 1^m 53^s.5.$$

Man hat mithin:

$\log \tau' - \tau$	1.70329	$\log t' - t$	2.05500
$\log \mu'$	2.53878	$\log \mu$	2.89070
$\cos \varphi'$	9.97850	$\cos \varphi$	9.85941
$\delta' - D$	17′ 51″.9	$\delta - D$	13′ 34″.8.

Da nun beide Gestirne auf derselben Seite des Mittelpunkts durchgegangen waren und zwar beide nördlich von demselben, so erhält man

$$\delta' - \delta = + 4'\ 17''.1.$$

Für die Zeiten, wo die Gestirne in dem Stundenkreise des Mittelpunkts waren, findet man:

$$\tfrac{1}{2}(\tau' + \tau) = 11^h\ 17^m\ 0^s.25 \qquad \tfrac{1}{2}(t' + t) = 11^h\ 18^m\ 49^s.75.$$

Es war also um:

$$11^h\ 17^m\ 0^s.25$$
$$\alpha' - \alpha = -\ 1^m\ 49^s.50 \qquad \delta' - \delta = + 4'\ 17''.1$$
$$= - 27'22''.50.$$

Ist der äufsere Rand eines solchen Ringes ebenso genau kreisförmig abgedreht wie der innere Rand, so kann man die Ein- und Austritte an beiden Rändern beobachten. Man hat dann aber nicht nöthig, die Beobachtungen an jedem einzelnen Rande mit dem dazu gehörigen Halbmesser zu reduciren, sondern kann etwas kürzer nach den folgenden Formeln rechnen.

Ist μ die Sehne, r der Halbmesser des äufseren Ringes, und bezeichnen μ' und r' dasselbe für den inneren Ring, so ist:

$$\frac{15}{2} \cos \delta (t' - t) = \mu = r \sin \varphi$$

$$\frac{15}{2} \cos \delta^* (t'_1 - t_1) = \mu' = r' \sin \varphi',$$

also:

$$\mu + \mu' = (a + b) \sin \varphi + (a - b) \sin \varphi'$$

und

$$\mu - \mu' = (a + b) \sin \varphi - (a - b) \sin \varphi',$$

wenn man

$$\frac{r + r'}{2} = a \text{ und } \frac{r - r'}{2} = b$$

setzt. Daraus erhält man:

$$\frac{\mu+\mu'}{2} = a \sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} + b\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}$$

$$\frac{\mu-\mu'}{2} = a \cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2} + b\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}$$

Durch Subtraction und Addition der beiden Gleichungen

$$\delta - D = r\cos\varphi$$
$$\delta' - D = r'\cos\varphi'$$

erhält man ferner:

$$(a-b)\cos\varphi' - (a+b)\cos\varphi = 0,$$

oder

$$b = a\,.\,\frac{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}$$

und

$$\delta - D = a\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} - b\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2},$$

also, wenn man den Werth von b in die Ausdrücke für

$$\frac{\mu+\mu'}{2},\quad \frac{\mu-\mu'}{2} \text{ und } \delta - D$$

substituirt:

$$\frac{\mu+\mu'}{2} = a\,.\,\frac{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}},$$

$$\frac{\mu-\mu'}{2} = a\,.\,\frac{\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}$$

und

$$\delta - D = a\,.\,\frac{\cos\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)^2.\cos\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)^2}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}$$

$$= a\,\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}.$$

Setzt man nun also:

$$\frac{\mu+\mu'}{2a} = \sin A \text{ und } \frac{\mu-\mu'}{2a} = \sin B, \qquad (A)$$

so erhält man

$$\cos A = \frac{\sqrt{\cos \varphi \ \cos \varphi'}}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}}$$

und

$$\cos B = \frac{\sqrt{\cos \varphi \ \cos \varphi'}}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}},$$

also:

$$\delta - D = a \cos A \cos B. \qquad (B)$$

Die Berechnung des Abstandes der Sehne des Sterns von der Mitte des Ringes ist somit auf die einfache Berechnung der Formeln (*A*) und (*B*) zurückgeführt.

Am 24sten Juni 1850 wurde der von Dr. Petersen entdeckte Comet an einem Ringmikrometer des sechsfüſsigen Fernrohrs der Bilker Sternwarte mit einem Sterne verglichen, dessen scheinbarer Ort war:

$$\alpha = 223^0\ 22'\ 41''.30 \qquad \delta = 59^0\ 7'\ 12''.19,$$

während die Declination des Cometen gleich 59⁰ 20'. 0 angenommen wurde. Der Halbmesser des äuſseren Ringes ist gleich 11' 21".09, der des inneren Ringes gleich 9' 26". 29, also ist

$$a = 10'\ 23''.69.$$

Die Beobachtungen waren nun die folgenden:

C. nördlich von der Mitte		* südlich			
Eintritt *)	Austritt	Eintritt		Austritt	
$18^h\ 15^m\ 54^s\ 20^s$	$17^m\ 21^s\ 48^s$	$18^m\ 55^s.3$	$13^s.0$	$21^m\ 20^s.5$	$37^s.5.$

Damit erhält man:

$\tau' - \tau$	Aeuſserer Rand	$1^m\ 54^s$	$t' - t$ A. R.	$2^m\ 42^s.2$
	Innerer Rand	1 1		2 7 .5
	log d. Summe	2 . 24304		2 . 46195
	log d. Diff.	1 . 72428		1 . 54033
	$\cos A$	9 . 92623		9 . 65138
	$\cos B$	9 . 99418		9 . 99749
		9 . 92041		9 . 64887
		$\delta' - D = + 8'\ 39''.26$		$\delta - D = - 4'\ 37''.88,$

also:

$$\delta' - \delta = + 13'\ 17''.14.$$

---

*) Von den hinter einander stehenden Secunden gehört beim Eintritt die erstere zum äuſseren, die zweite zum inneren Rande und umgekehrt beim Austritt.

Für den Rectascensionsunterschied erhält man dagegen:

$$\alpha' - \alpha = -3^m 25^s.82 = -51' 27''.30.$$

35. Um zu sehen, unter welchen Umständen die Beobachtungen mit diesem Micrometer am Vortheilhaftesten anzustellen sind, differenzirt man die Formeln:

$$r \sin \varphi = \mu, \quad r \sin \varphi' = \mu', \quad r \cos \varphi' \mp r \cos \varphi = \delta' - \delta.$$

Dann erhält man:

$$\sin \varphi \, dr + r \cos \varphi \, d\varphi = d\mu$$
$$\sin \varphi' \, dr + r \cos \varphi' \, d\varphi' = d\mu'$$
$$[\cos \varphi' \mp \cos \varphi] \, dr - r \sin \varphi' \, d\varphi' \pm r \sin \varphi \, d\varphi = d(\delta' - \delta)$$

oder, wenn man in der letzteren Gleichung $d\varphi$ und $d\varphi'$ mit Hülfe der beiden ersteren Gleichungen eliminirt:

$$[\cos \varphi \mp \cos \varphi'] \, dr - \sin \varphi' \cos \varphi \, d\mu' \pm \sin \varphi \cos \varphi' \, d\mu$$
$$= \cos \varphi \cos \varphi' \, d(\delta' - \delta);$$

$d\mu$ und $d\mu'$ sind die Fehler der beobachteten halben Zwischenzeit. Nun sind die Beobachtungen nicht an allen Punkten des Mikrometers gleich scharf, indem die Sterne nahe bei der Mitte schneller aus- und eintreten, also dort die Beobachtung sicherer ist als nahe am Rande. Man wird es indessen immer so einrichten können, dafs die Beobachtungen an ähnlichen Stellen in Bezug auf den Mittelpunkt angestellt werden und es wird daher erlaubt sein, $d\mu = d\mu'$ zu setzen, sodafs man dann die Gleichung erhält:

$$[\cos \varphi \mp \cos \varphi'] \, dr - \sin [\varphi' \mp \varphi] \, d\mu = \cos \varphi \cos \varphi' \, d(\delta' - \delta).$$

Will man also bei gegebenem r die Declinationsdifferenz zweier Sterne finden, so mufs man die Beobachtung so einrichten, dafs $\cos \varphi \cos \varphi'$ so nahe als möglich gleich 1, also $\sin \varphi$ und $\sin \varphi'$ sehr klein sind. Man mufs daher die Sterne so weit als möglich vom Mittelpunkte durch das Feld gehen lassen. Sind überdies beide Sterne auf einem Parallel, wo also das obere Zeichen gilt und $\varphi = \varphi'$ ist, so hat ein Fehler in der Bestimmung von r gar keinen Einflufs auf die Bestimmung des Declinationsunterschiedes. Für die Bestimmung des Rectascensionsunterschiedes ist es klar, dafs man die Sterne so nahe als möglich durch die Mitte des Feldes gehen lassen mufs, weil dort die Ein- und Austritte am schnellsten erfolgen, also sich auch am schärfsten beobachten lassen.

36. Häufig ändert das Gestirn, dessen Ort man durch das Kreismikrometer bestimmen will, seine Rectascension und

Declination so schnell, daſs die Voraussetzung, daſs dasselbe in einer Secunde Sternzeit 15″ im Bogen zurücklegt, und daſs die auf seinem Wege errichtete Senkrechte einen Declinationskreis vorstellt, merklich von der Wahrheit abweicht. In diesem Falle muſs man an den ohne Rücksicht auf die eigene Bewegung hergeleiteten Ort noch eine Correction anbringen. Nennt man d den Abstand des Gestirns vom Mittelpunkte des Ringes, so war:

$$d^2 = r^2 - (15\, t \cos\delta)^2,$$

wo $t = \frac{1}{2}(t' - t'')$, gleich der halben Zwischenzeit zwischen dem Ein- und Austritte, ist. Nennt man $\Delta\alpha$ die Zunahme der Rectascension des Gestirns in einer Zeitsecunde, so ist die Aenderung Δt von t, welche durch die Aenderung der Rectascension hervorgebracht wird, sodaſs $t + \Delta t$ die halbe Zwischenzeit bezeichnet, welche man beobachtet hätte, wenn die Aenderung der Rectascension gleich Null gewesen wäre:

$$\Delta t = -\frac{1}{15}\, t \,.\, \Delta\alpha.$$

Es ist aber

$$\Delta d = -\frac{15^2\, t \cos\delta^2}{d}\, \Delta t,$$

also:

$$\Delta d = 15 \,.\, \frac{t^2 \cos\delta^2\, \Delta\alpha''}{d},$$

oder da $15\, t \cos\delta = \mu$ ist:

$$\Delta d = \Delta(\delta - D) = \frac{\mu^2}{d} \cdot \frac{\Delta\alpha}{15}. \qquad (A)$$

Ferner ist die Tangente des Winkels n, welchen der wahre Weg des Gestirns mit dem Parallele macht:

$$\operatorname{tang} n = \frac{\Delta\delta}{(15 - \Delta\alpha)\cos\delta},$$

wo $\Delta\delta$ die Aenderung der Declination in einer Zeitsecunde bedeutet.

Es wird also das Stück des Weges des Gestirns zwischen dem Stundenkreise und dem auf den Weg des Sterns vom Mittelpunkte gefällten Perpendikel, wenn man dasselbe x nennt:

$$x = d \operatorname{tang} n = \frac{d\,\Delta\delta}{(15 - \Delta\alpha)\cos\delta}.$$

Da man nun zu der ohne Rücksicht auf die eigene Bewegung berechneten Durchgangszeit durch den Stundenkreis die Gröfse $\frac{x}{15 \cos \delta}$ oder

$$+\frac{d \Delta \delta}{15^2 \cos \delta^2 - 15 \Delta \alpha \cos \delta^2}$$

zu addiren hat, so erhält man für diese Correction, wenn man das Product von $\Delta \alpha$ und $\Delta \delta$ vernachlässigt:

$$\Delta\left(\frac{\tau' + \tau}{2}\right) = + \frac{d \,.\, \Delta \delta}{15^2 \cos \delta^2}. \qquad (B)$$

In dem vorher gegebenen Beispiele betrug die Aenderung des Ortes des Cometen in 24 Stunden in Rectascension — 1° 15′ und in Declination — 1° 17′, es war also:

$$\log \Delta \alpha = 8.71551\, n$$

und

$$\log \Delta \delta = 8.72694\, n;$$

ferner war:

$$\log d = 2.71538, \quad \log \mu = 2.52468.$$

Damit erhält man:

$$\Delta (\delta - D) = -0''.75 \text{ und } \Delta\left(\frac{\tau' + \tau}{2}\right) = -7''.10.$$

Den Einflufs der Bewegung in Rectascension auf die Declination kann man noch bequemer so in Rechnung bringen, dafs man die Sehne mit $\frac{3600 - \Delta' \alpha}{3600}$ multiplicirt, wo $\Delta' \alpha$ die Bewegung in Rectascension in Zeit in einer Stunde ist, und mit dieser verbesserten Sehne den Abstand vom Mittelpunkte berechnet. Es ist aber:

$$\log \frac{3600 - \Delta' \alpha}{3600} = - \frac{M.\, \Delta' \alpha}{3600},$$

wo M gleich dem Modulus der Briggischen Logarithmen, also gleich 0.4343 ist. Da nun diese Zahl sehr nahe 48 mal 15 mal 60 durch 100000 ist, so erhält man:

$$\frac{M \Delta' \alpha}{3600} = \frac{\Delta' \alpha \,.\, 48 \,.\, 15}{60 \,.\, 100000}.$$

Man hat also von dem constanten Logarithmus $\frac{15}{2} \frac{\cos \delta'}{r}$ nur so viel Einheiten der 5ten Decimale abzuziehen, als die 48stündige Bewegung in Rectascension Bogenminuten beträgt.

In dem vorher gebrauchten Beispiele ist die 48stündige Aenderung der Rectascension = — 2° 30′ = — 150′. Der

constante Logarithmus $\frac{15}{2}\frac{\cos\delta'}{2a}$ war: 7.48667. Man mufs daher jetzt für denselben 7.48817 nehmen und erhält dann:

$$\begin{array}{rl} & 2.24304 \\ & 1.72428 \\ \cos A & 9.92563 \\ \cos B & 9.99415 \\ \delta' - D = & 8'\,38''.50. \end{array}$$

37. Bisher ist vorausgesetzt worden, dafs man die Wege, welche die Sterne während ihres Durchgangs durch das Feld des Kreismikrometers beschreiben, als geradlinig betrachten kann. Sind aber die Sterne dem Pole so nahe, dafs diese Voraussetzung unrichtig ist, so mufs man an den nach den bisherigen Formeln berechneten Declinationsunterschied noch eine Correction anbringen. Die Rectascension bedarf dagegen keiner Correction, da das arithmetische Mittel aus den Zeiten des Ein- und Austritts auch in diesem Falle die Zeit des Durchgangs durch den Stundenkreis des Mittelpunkts giebt.

In dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Pole des Aequators, dem Mittelpunkte des Mikrometers und dem Punkte des Ein- oder Austritts hat man, wenn τ die halbe Zwischenzeit zwischen beiden Momenten bedeutet:

$$\cos r = \sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos 15\,\tau,$$

oder

$$\sin \tfrac{1}{2} r^2 = \sin \tfrac{1}{2} (\delta - D)^2 + \cos D \cos \delta \sin \left(\frac{15}{2}\,\tau\right)^2,$$

also:

$$\begin{aligned}(\delta - D)^2 &= r^2 - \cos \delta^2\,(15\,\tau)^2 - [\cos D - \cos \delta] \cos \delta\,(15\,\tau)^2 \\ &= r^2 - \cos \delta^2\,(15\,\tau)^2 - (\delta - D) \sin \delta \cos \delta\,(15\,\tau)^2.\end{aligned}$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so erhält man, wenn man nur die erste Potenz von $\delta - D$ mitnimmt:

$$\delta - D = [r^2 - \cos \delta^2\,(15\,\tau)^2]^{\frac{1}{2}} - \frac{(\delta - D) \sin \delta \cos \delta\,(15\,\tau)^2}{2\,[r^2 - \cos \delta^2\,(15\,\tau)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Das erste Glied ist der in der Voraussetzung der geradlinigen Bewegung berechnete Declinationsunterschied, welcher mit d bezeichnet werden möge, das zweite Glied ist dagegen die gesuchte Correction. Es ist also

$$\delta - D = d - \tfrac{1}{2} \sin \delta \cos \delta\,(15\,\tau)^2,$$

wo das zweite Glied noch mit 206265 dividirt werden mufs,

wenn man die Correction in Secunden haben will. Für den zweiten Stern hat man nun ebenso

$$\delta' - D = d' - \tfrac{1}{2} \sin \delta' \cos \delta' (15\, \tau')^2,$$

mithin

$$\delta' - \delta = d' - d + \tfrac{1}{2} [\operatorname{tang} \delta \cos \delta^2 (15\, \tau)^2 - \operatorname{tang} \delta' \cos \delta'^2 (15\, \tau')^2],$$

wofür man ohne merklichen Fehler setzen kann:

$$\delta' - \delta = d' - d + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta + \delta') [\cos \delta^2 (15\, \tau)^2 - \cos \delta'^2 (15\, \tau')^2],$$

oder da

$$\cos \delta^2\, 15^2\, \tau^2 = r^2 - d^2$$

und

$$\cos \delta'^2\, 15^2\, \tau'^2 = r^2 - d'^2,$$

$$\delta' - \delta = d' - d + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta' + \delta) (d' + d) (d' - d).$$

Man hat also zu dem in der Voraussetzung der geradlinigen Bewegung berechneten Declinationsunterschiede die Correction hinzuzufügen:

$$+ \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta' + \delta) \frac{(d' + d)\, (d' - d)}{206265}.$$

Den 30sten Mai 1850 wurde der Comet von Petersen, als seine Declination $74^\circ\, 9'$ war, mit einem Sterne, dessen Declination $73^\circ\, 52'.5$ war, verglichen. Die Rechnung nach den gewöhnlichen Formeln ergab:

$$d = -8'\, 56''.7, \qquad d' = +7'\, 36''.9.$$

Damit erhält man dann:

$$\begin{aligned} \log (d' + d) &= 1.90200_n \\ \log (d' - d) &= 2.99721 \\ \text{Compl} \log 206265 &= 4.68557 \\ \text{Compl} \log 2 &= 9.69897 \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\delta' + \delta) &= 0.54286 \\ & \ 9.82661_n \\ \text{Correct.} &= -0''.67. \end{aligned}$$

Es war mithin der corrigirte Declinationsunterschied:

$$+ 16'\, 32''.93.$$

38. Um das Kreismikrometer anwenden zu können, ist immer die Kenntniſs des Halbmessers erforderlich. Zur Bestimmung desselben kann man sich verschiedener Methoden bedienen.

Beobachtet man zwei Sterne, deren Declination bekannt ist, so hat man:

$$\mu + \mu' = r [\sin \varphi + \sin \varphi'] = 2 r \sin \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi') \cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi')$$
$$\mu - \mu' = r [\sin \varphi - \sin \varphi'] = 2 r \cos \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi') \sin \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi').$$

Ferner ist

$$r = \frac{\delta' - \delta}{\cos\varphi + \cos\varphi'} = \frac{\delta' - \delta}{2\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')},$$

also auch

$$\frac{\mu + \mu'}{\delta' - \delta} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') \qquad \frac{\mu - \mu'}{\delta' - \delta} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi').$$

Setzt man daher

$$\frac{\mu + \mu'}{\delta' - \delta} = \operatorname{tang} A \text{ und } \frac{\mu - \mu'}{\delta' - \delta} = \operatorname{tang} B,$$

so wird:

$$r = \frac{\delta' - \delta}{2\cos A \cos B}$$

$$= \frac{\mu + \mu'}{2\sin A \cos B}$$

$$= \frac{\mu - \mu'}{2\cos A \sin B}$$

$$= \frac{\mu}{\sin(A + B)}$$

$$= \frac{\mu'}{\sin(A - B)}.$$

Die vorher in No. 35 gegebene Differentialgleichung zeigt, daſs man die Sterne zu beiden Seiten des Mittelpunkts möglichst nahe am Rande muſs durchgehen lassen, weil dann der Coefficient von dr ein Maximum und nahe gleich 2, der Coefficient von $d\mu$ dagegen nahe Null wird.

Man muſs also zu dieser Bestimmung des Halbmessers zwei Sterne auswählen, deren Declinationsunterschied nur etwas kleiner als der Durchmesser des Ringes ist.

Der Halbmesser des inneren Randes des zuerst in No. 34 erwähnten Micrometers wurde durch die Plejadensterne Asterope und Merope bestimmt, deren Declinationen

$$\delta = 24^{0}\ 4'\ 24''.26$$

und

$$\delta' = 23^{0}\ 28'\ 6''.85$$

waren und die halben Zwischenzeiten beobachtet *):

$$18^{s}.5 \text{ und } 56^{s}.2.$$

---

*) Die Plejadensterne eignen sich besonders zu diesen Bestimmungen, weil man unter denselben immer für jedes Mikrometer passende finden wird. Die Oerter derselben sind auf das Genaueste von Bessel bestimmt. Astron. Nachr. No. 430 und Bessel, astron. Untersuchungen, Band I.

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \log \mu + \mu' &= 2.71038 \\ \log \mu - \mu' &= 2.41490 \\ \cos A &= 9.98825 \\ \cos B &= 9.99693 \\ & 9.98518 \\ r &= 18' 46''.5. \end{aligned}$$

Man kann den Halbmesser des Feldes auch aus den Durchgängen zweier Sterne, welche dem Pole nahe stehen, bestimmen, da die langsame Bewegung solcher Sterne den Einfluſs der Beobachtungsfehler vermindert. In diesem Falle kann man aber die eben gegebenen Formeln nicht anwenden, weil man den Weg solcher Sterne nicht mehr als geradlinig betrachten darf. In dem Dreiecke zwischen dem Pole, dem Mittelpunkte des Kreises und dem Punkte des Ein- oder Austritts hat man aber, wenn man die halbe Zwischenzeit zwischen beiden Momenten, in Bogen verwandelt, für den einen Stern mit τ, für den andern Stern mit τ' bezeichnet:

$$\cos r = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos \tau$$
$$\cos r = \sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos \tau'.$$

Setzt man unter dem Cosinuszeichen

$$\frac{\delta + \delta'}{2} + \frac{\delta - \delta'}{2} \text{ statt } \delta \text{ und } \frac{\delta + \delta'}{2} - \frac{\delta - \delta'}{2} \text{ statt } \delta'$$

und zieht beide Gleichungen von einander ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} D = \operatorname{cotang} \frac{\delta - \delta'}{2} \sin \frac{\tau - \tau'}{2} \sin \frac{\tau + \tau'}{2} \\ + \operatorname{tang} \frac{\delta + \delta'}{2} \cos \frac{\tau - \tau'}{2} \cos \frac{\tau + \tau'}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotang} \frac{\delta - \delta'}{2} \sin \frac{\tau - \tau'}{2} &= a \cos A \\ \operatorname{tang} \frac{\delta + \delta'}{2} \cos \frac{\tau - \tau'}{2} &= a \sin A, \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

so erhält man D aus der Gleichung:

$$\operatorname{tang} D = a \sin \left[\frac{\tau + \tau'}{2} + A\right]. \qquad (B)$$

Nachdem man auf diese Weise D gefunden hat, kann man r aus einer der beiden folgenden Gleichungen berechnen:

$$\sin \tfrac{1}{2} r^2 = \sin \tfrac{1}{2} (\delta - D)^2 + \cos \delta \cos D \sin \tfrac{1}{2} \tau^2,$$

oder

$$\sin \tfrac{1}{2} r^2 = \sin \tfrac{1}{2} (\delta' - D)^2 + \cos \delta' \cos D \sin \tfrac{1}{2} \tau'^2.$$

Setzt man hier

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sin \frac{1}{2} \tau}{\sin \frac{1}{2} (\delta - D)} \sqrt{\cos \delta \cos D},$$

oder (C)

$$\operatorname{tang} y' = \frac{\sin \frac{1}{2} \tau'}{\sin \frac{1}{2} (\delta' - D)} \sqrt{\cos \delta' \cos D},$$

so erhält man:

$$\sin \tfrac{1}{2} r^2 = \sin \tfrac{1}{2} (\delta - D)^2 \sec y$$
$$= \sin \tfrac{1}{2} (\delta' - D)^2 \sec y',$$

oder auch

$$r = \frac{\delta - D}{\cos y} = \frac{\delta' - D}{\cos y'}. \qquad (D)$$

Die Formeln (A), (B), (C) und (D) enthalten also die Auflösung dieser Aufgabe.

Wenn man den Halbmesser des Ringes nach dieser oder der vorigen Methode durch zwei Sterne bestimmt, so mufs man für den Declinationsunterschied beider Sterne immer den scheinbaren, durch die Refraction veränderten, anwenden. Nach No. 16 dieses Abschnitts sind aber die scheinbaren Declinationen, wenn die Sterne nicht nahe am Horizonte stehen:

$$\delta + 57'' \operatorname{cotang} (N + \delta)$$

und

$$\delta' + 57'' \operatorname{cotang} (N + \delta'),$$

wo

$$\operatorname{tang} N = \operatorname{cotang} \varphi \cos t,$$

und t das arithmetische Mittel aus den Stundenwinkeln beider Sterne ist.

Man erhält also für den Unterschied der scheinbaren Declinationen:

$$\delta' - \delta - \frac{57'' \sin (\delta' - \delta)}{\sin (N + \delta) \sin (N + \delta')},$$

wofür man sich auch erlauben kann zu schreiben:

$$\delta' - \delta - \frac{57'' \sin (\delta' - \delta)}{\sin [N + \frac{1}{2} (\delta + \delta')]^2}.$$

Den so verbesserten Declinationsunterschied hat man also immer für die Berechnung des Halbmessers anzuwenden.

Diese Bestimmung hängt von der Kenntnifs des Declinationsunterschiedes der Sterne ab. Da man deshalb solche Sterne auszuwählen hat, deren Oerter sehr genau bekannt sind, und die immer zu der helleren Classe gehören werden,

während es bei Kreismikrometerbeobachtungen, wo man meist schwache Objecte beobachtet, wünschenswerth ist, auch zur Bestimmung des Feldes schwache Sterne anzuwenden, da es möglich ist, dafs man die Ein- und Austritte heller Objecte etwas anders schätzt*), so hat Peters in Clinton eine andre Methode vorgeschlagen, die den Halbmesser aus der Durchgangszeit eines nahe durch die Mitte des Feldes gehenden Sterns giebt in Verbindung mit einem andern nahe am Rande durchgehenden Stern, dessen Declinationsunterschied von dem ersten Stern nur genähert bekannt zu sein braucht.

Die Gleichung $\mu = r \sin \varphi$ giebt nämlich:

$$r = \mu + 2r \sin (45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)^2.$$

Geht nun der Stern nahe durch die Mitte des Feldes, so ist das zweite Glied oder die an μ anzubringende Correction sehr klein. Zur Bestimmung dieser Correction beobachtet man nun noch einen zweiten Stern in der Nähe des Randes. Dann hat man nach den vorher gefundenen Gleichungen, wenn man setzt

$$\frac{\mu + \mu'}{\delta' - \delta} = \text{tang}\, A, \qquad \frac{\mu - \mu'}{\delta' - \delta} = \text{tang}\, B:$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(A + B).$$

Es wird daher:

$$r = \mu + 2r \sin [45^0 - \tfrac{1}{2}(A + B)]^2,$$

oder wegen der Kleinheit des letzten Gliedes,

$$r = \mu [1 + 2 \sin (45^0 - \tfrac{1}{2}(A + B))]^2$$
$$= \mu [2 - \sin (A + B)].$$

Da man überall leicht zu diesem Zwecke passende Sterne finden kann, so wird es am Zweckmäfsigsten sein, Sterne in der Nähe des Meridians und in ziemlicher Höhe auszuwählen, sodafs die Refraction keinen Einflufs auf die Beobachtungen hat. Diese Methode zur Bestimmung des Halbmessers wird besonders zweckmäfsig sein, wenn man sich eines Chronographs bedient.

Zur Bestimmung des Durchmessers des Ringes kann man auch die von Gaufs vorgeschlagene Methode anwenden, indem man in das Objectiv des mit dem Kreismikrometer versehenen Fernrohrs mit einem andern an einem Winkel-

*) Beobachtet man am äufsern sowohl als am innern Rande des Ringes, so ist ein daraus entstehender Fehler weniger zu befürchten.

instrumente befindlichen hineinsieht und den Durchmesser des Ringes unmittelbar mifst.

Hat man Sonnenflecken durch das Kreismikrometer beobachtet, so thut man gut, den Halbmesser des Ringes auch durch Sonnenbeobachtungen zu bestimmen, weil man in der Regel die Antritte der Sonnenränder an den Ring etwas anders beobachtet als die Antritte von Sternen. Dazu giebt nun die Beobachtung der äufseren und inneren Berührungen der Sonnenränder mit dem Kreise ein sehr einfaches Mittel. Berührt nämlich der erste Rand der Sonne den Ring, so ist die Entfernung des Mittelpunkts der Sonne vom Mittelpunkte des Ringes gleich $R+r$, wenn R der Halbmesser der Sonne, r der des Ringes ist. Denkt man sich dann den Weg der Sonne als geradlinig, so hat man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypothenuse $R+r$, dessen eine Cathete der Unterschied der Declination des Mittelpunkts der Sonne von der Declination des Mittelpunkts des Ringes und dessen andre Cathete die halbe Zwischenzeit der äufseren Berührungen im Bogen und multiplicirt mit dem Cosinus der Declination ist. Man hat also, wenn t diese halbe Zwischenzeit bedeutet, die folgende Gleichung:

$$(R+r)^2 = (\delta - D)^2 + (15\,t \cos\delta)^2.$$

Für die inneren Berührungen erhält man eine ähnliche Gleichung, in welcher nur die halbe Zwischenzeit t' der inneren Berührungen statt t und $R-r$ statt $R+r$ vorkommt, nämlich:

$$(R-r)^2 = (\delta - D)^2 + (15\,t' \cos\delta)^2.$$

Wegen der eigenen Bewegung der Sonne müssen übrigens beide Zwischenzeiten in wahrer Sonnenzeit ausgedrückt sein. Eliminirt man nun $(\delta - D)^2$ aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$(R+r)^2 - (R-r)^2 = (15 \cos\delta)^2\,[t^2 - t'^2],$$

also

$$r = \frac{(15 \cos\delta)^2\,[t+t']\,[t-t']}{4\,R}.$$

An dem einen Kreismikrometer des Refractors der Bilker Sternwarte wurde die Sonne beobachtet, als die Declination $+ 23^\circ\,14'\,50''$ und der Halbmesser $15'\,45''.07$ war, und es wurden die folgenden Ein- und Austrittzeiten beobachtet:

Aeufsere Berührung:		Innere Berührung:
Eintritt	$10^h\,31^m\,8^s.2$ Sternzeit	$10^h\,32^m\,30^s.8$
Austritt	$34^m\,47^s.5$	$33\quad 25\,.3$

Daraus erhält man die halben Zwischenzeiten in Sternzeit $1^m\,49^s.65$ und $0^m\,27^s.25$ die man mit 0.99712 zu multipliciren hat, um dieselben in wahrer Zeit auszudrücken, da die Bewegung der Sonne in Rectascension in einem Tage $4^m\,8^s.7$ betrug. Es ist also

$$t = 109^s.33 \text{ und } t' = 27^s.17,$$

womit man erhält:

$$r = 9'\,23''.52.$$

Anm. Es ist klar, dafs man für den Halbmesser des Ringes nur so lange denselben Werth annehmen darf, als man die Entfernung des Ringes vom Objectiv nicht ändert. Wenn man daher den Halbmesser durch eine der vorher gegebenen Methoden bestimmt hat, so mufs man sich genau die Stelle bezeichnen, welche die das Mikrometer enthaltende Ocularröhre bei der Beobachtung eingenommen hat, und dieselbe dann bei späteren Beobachtungen mit diesem Mikrometer immer wieder genau auf diese Marke einstellen.

Ueber das Kreismikrometer vergleiche man übrigens die Aufsätze von Bessel in Zach's monatlicher Correspondenz, Band 24 und 26.

39. Das Heliometer. Ein von den bisher betrachteten Mikrometern ganz verschiedenes ist das Heliometer. Dies besteht in einem Fernrohre, dessen Objectiv in zwei Hälften geschnitten ist, von denen jede vermittelst einer Schraube parallel mit der Schneidungslinie verschoben werden kann. Die ganze Anzahl von Schraubenwindungen, um welche man die eine Objectivhälfte verschoben hat, kann man an den Scalen ablesen, welche auf den die Objectivhälften tragenden Schiebern angebracht sind, die Theile der Umdrehungen liest man dagegen an den getheilten Köpfen der bewegenden Schrauben ab. Kennt man also den Werth einer Schraubenumdrehung in Secunden, so weifs man immer, um welchen Bogen man die Mittelpunkte der beiden Objectivhälften gegen einander verschoben hat. Bilden nun die Objectivhälften einen einzigen Kreis, fallen also deren Mittelpunkte zusammen, so wird man im Fernrohre von einem Gegenstande, auf welchen dasselbe gerichtet ist, nur ein einziges Bild sehen in der Richtung vom Mittelpunkte des Objectivs nach dem Brennpunkte. Verschiebt man aber die eine Objectivhälfte um eine Anzahl von Schraubenrevolutionen,

so wird das erste Bild von der unbewegten Objectivhälfte unverändert geblieben sein, dagegen wird man ein zweites Bild des Objects sehen, welches durch die fortbewegte Objectivhälfte gebildet wird und in der Richtung vom Mittelpunkte dieser Objectivhälfte nach ihrem Brennpunkte liegt. Wenn daher ein zweites Object in der Richtung vom Mittelpunkte des bewegten Objectivs nach dem Brennpunkte des festen stände, so würden das Bild des ersteren Gegenstandes, von der festen Objectivhälfte gebildet, und das durch die bewegte Objectivhälfte erzeugte Bild des zweiten Gegenstandes einander decken, und den Winkel, um welche beide Gegenstände wirklich entfernt sind, würde man durch die Anzahl von Schraubenumdrehungen erhalten, um welche man die eine Objectivhälfte verschoben hat. Hierauf beruht der Gebrauch des Heliometers zum Messen von Distanzen.

Um nun die Schneidungslinie der beiden Objective immer in die Richtung der Verbindungslinie der beiden zu messenden Objecte bringen zu können, sind die die Objectivhälften tragenden Schieber so eingerichtet, dafs man dieselben um die Axe des Fernrohrs bewegen kann. Wenn daher das Heliometer auch einen Positionskreis hat, an welchem man die verschiedenen Lagen, in die man die Schnittlinie bringt, ablesen kann, so kann man mit einem solchen Instrumente auch Positionswinkel messen. Dazu ist es aber erforderlich, dafs das Heliometer parallactisch aufgestellt ist.

Das Ocular des Heliometers befindet sich nun ebenso wie das Objectiv auf einem beweglichen Schieber, dessen Stellung man an einer Scale ablesen kann. Ebenso kann das Ocular wie das Objectiv um seine Axe bewegt und die Lage desselben an einem kleinen Positionskreise, welcher in demselben Sinne wie der Positionskreis des Objectivs getheilt ist, abgelesen werden. Diese Einrichtung dient dazu, um den Brennpunkt des Oculars immer auf das Bild im Fernrohre zu stellen. Bewegt man nämlich die eine Objectivhälfte aus der Stellung, in welcher ihr Mittelpunkt mit dem der andern zusammenfällt, so rückt ihr Brennpunkt von der Axe des Rohrs fort und der Brennpunkt des Oculars fällt daher nicht mehr mit dem Bilde zusammen. Um dasselbe also deutlich sehen zu können, mufs das Ocular ebenso weit von der Axe

entfernt werden können, als das Bild davon absteht. Man mufs also das Ocular senkrecht gegen die Axe verschieben können und, damit die Verschiebung im rechten Sinne erfolgt, mufs dasselbe auch sammt seinem Schieber um die Axe des Fernrohrs gedreht werden können.

Die Richtung der Bewegung der Schieber wird nun nicht genau durch den Mittelpunkt des Positionskreises gehen. Die Angabe des beweglichen*) Schiebers, bei welcher die Entfernung des optischen Mittelpunkts des Objectivs von dem Mittelpunkte der Kreisumdrehung ein Minimum ist, soll der Hauptpunkt genannt werden. Dasselbe soll unter dem Hauptpunkte des Oculars verstanden werden. Diesen Hauptpunkt kann man immer dadurch bestimmen, dafs man diejenige Stellung sucht, in welcher bei diametralen Stellungen des Objectivs das Bild irgend eines Gegenstandes im Fernrohre sich nicht im Sinne der Richtung der Schieber ändert. Hat man denselben gefunden, so kann man den Index des Schiebers des Objectivs auf die Mitte der Scale richten. Ebenso kann man nun auch den Hauptpunkt des Oculars finden und es soll angenommen werden, dafs die für den Hauptpunkt geltende Ablesung in allen drei Scalen, den beiden der Objectivschieber und der des Ocularschiebers, dieselbe und zwar gleich h ist. Man mufs dann dem Fadenkreuze des Oculars dasselbe Minimum der Entfernung vom Mittelpunkte der Kreisdrehung geben. Dies bewirkt man dadurch, dafs man das Fadenkreuz auf einen sehr weit entfernten Gegenstand einstellt und beide Positionskreise um 180° dreht. Steht dann das Bild an dem nämlichen Orte, so ist diese Bedingung erfüllt; hat sich das Bild indessen gegen das Fadenkreuz verschoben, so mufs man die Stellung desselben durch die Correctionsschrauben berichtigen.

Die Scale des einen Objectivschiebers zeige nun, wenn das von demselben hervorgebrachte Bild auf das Fadenkreuz gebracht ist, s an, die von dem Indexfehler befreite Ablesung am Positionskreise des Objectivs sei p, zu gleicher Zeit stehe der Schieber des Oculars auf σ, der Positionskreis auf π.

---

*) Es wird nämlich im Folgenden immer angenommen, dafs man nur den einen Schieber bewegt und den anderen unverrückt stehen läfst.

Es sei ferner a die Entfernung des Hauptpunktes vom Mittelpunkte des Positionskreises und es seien t und δ die berichtigten Ablesungen am Stunden- und Declinationskreise des Instruments, die also denjenigen Punkt des Himmels bezeichnen, nach welchem hin die Axe des Fernrohrs gerichtet ist. Man nehme dann wieder ein rechtwinkliges Coordinatensystem an. Die Coordinaten ξ und η sollen in der Ebene des Fadenkreuzes liegen, und zwar soll die positive Axe der ξ nach 0^0, die positive Axe der η nach 90^0 des Positionskreises gerichtet, also, wenn das Fernrohr nach dem Zenith zeigt, nach Osten gerichtet sein.

Endlich soll die positive Axe der ζ senkrecht auf der Ebene des Fadenkreuzes stehen und nach dem Objective zu gerichtet sein. Setzt man nun

$$s - h = e \text{ und } \sigma - h = \varepsilon,$$

nennt l die Brennweite des Objectivs, in Einheiten der Scale ausgedrückt, und nimmt a positiv, wenn der Hauptpunkt nach der Seite der positiven η und der Positionswinkel im ersten oder vierten Quadranten liegt, so sind die Coordinaten des Punktes s:

$$e \cos p - a \sin p,\ e \sin p - a \cos p,\ l$$

und die des Punktes σ:

$$\varepsilon \cos \pi - a \sin \pi,\ \varepsilon \sin \pi - a \cos \pi,\ 0.$$

Die relativen Coordinaten von s in Bezug auf σ werden dann also sein:

$$\begin{aligned} \xi &= e \cos p - \varepsilon \cos \pi - a\,[\sin p - \sin \pi] \\ \eta &= e \sin p - \varepsilon \sin \pi + a\,[\cos p - \cos \pi] \qquad (a) \\ \zeta &= l, \end{aligned}$$

und wenn man coelestische Objecte beobachtet, deren Entfernung vom Brennpunkte des Fernrohrs in Vergleich mit ε unendlich ist, so kann man diese Ausdrücke auch für die Coordinaten des Punktes s in Bezug auf den Brennpunkt annehmen.

Diese Coordinaten mufs man nun in solche verwandeln, die sich auf die Ebene des Aequators und den Meridian beziehen, und wo die positive Axe der x in der Ebene des Aequators nach 0^0, die positive Axe der y nach 90^0 der Stundenwinkel, endlich die positive Axe der z parallel mit der Weltaxe nach dem Nordpole zu gerichtet ist.

Dazu denkt man sich zuerst die Axe der ξ des vorigen Systems in der Ebene der $\xi\zeta$ nach der Axe der ζ zu um den Winkel $90^0 - \delta$ gedreht; dann werden die neuen Coordinaten schon in der Ebene des Aequators liegen und man wird haben:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi \sin\delta + \zeta \cos\delta \\ \eta' &= \eta \\ \zeta' &= \zeta \sin\delta - \xi \cos\delta. \end{aligned}$$

Soll nun noch das Fernrohr nach dem Stundenwinkel t gerichtet sein, so hat man die Axe der ξ' in der Ebene der $\xi'\eta'$ um den Winkel $270^0 + t$ vorwärts zu drehen, um dieselbe in die positive Axe der y zu verwandeln und hat dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \xi' \cos t + \eta' \sin t \\ y &= \xi' \sin t - \eta' \cos t \\ z &= \zeta'. \end{aligned}$$

Durch Elimination von ξ', η' und ζ' aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} x &= \zeta \cos\delta \cos t + \xi \sin\delta \cos t + \eta \sin t \\ y &= \zeta \cos\delta \sin t + \xi \sin\delta \sin t - \eta \cos t \\ z &= \zeta \sin\delta - \xi \cos\delta, \end{aligned}$$

oder, wenn man die Werthe von ξ, η, ζ aus den Gleichungen (a) substituirt:

$$\begin{aligned} x = l\cos\delta\cos t &+ [e\cos p - \varepsilon\cos\pi]\sin\delta\cos t + [e\sin p - \varepsilon\sin\pi]\sin t \\ &- a[\sin p - \sin\pi]\sin\delta\cos t + a[\cos p - \cos\pi]\sin t \\ y = l\cos\delta\sin t &+ [e\cos p - \varepsilon\cos\pi]\sin\delta\sin t - [e\sin p - \varepsilon\sin\pi]\cos t \\ &- a[\sin p - \sin\pi]\sin\delta\sin t - a[\cos p - \cos\pi]\cos t \\ z = l\sin\delta &- [e\cos p - \varepsilon\cos\pi]\cos\delta + a[\sin p - \sin\pi]\cos\delta. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man das Quadrat der Entfernung r des Punktes s vom Anfangspunkte der Coordinaten:

$$r^2 = l^2 + [e\cos p - \varepsilon\cos\pi]^2 + [e\sin p - \varepsilon\sin\pi]^2 + 4a^2\sin\tfrac{1}{2}(p-\pi)^2.$$

Die Linie vom Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Punkte s macht dann mit den drei Coordinatenaxen Winkel, welche durch die Gleichungen gegeben sind:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r} \text{ und } \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Bezeichnet man aber mit δ' und t' die Declination und den Stundenwinkel des beobachteten Sterns oder desjenigen Punktes, in welchem die Linie vom Fadenkreuze nach dem Punkte s die scheinbare Himmelskugel trifft, so ist auch:

$$\cos\alpha = \cos\delta'\cos t', \quad \cos\beta = \cos\delta'\sin t', \quad \cos\gamma = \sin\delta'.$$

Setzt man also

$$\frac{e}{l} = D, \quad \frac{\varepsilon}{l} = \Delta \text{ und } \frac{a}{l} = d,$$

so erhält man, wenn man auch der Kürze wegen

$$1 + [D \cos p - \Delta \cos \pi]^2 + [D \sin p - \Delta \sin \pi]^2 + 4 d^2 \sin \tfrac{1}{2} (p - \pi)^2 = A$$

setzt:

$$\cos \delta' \cos t' = \frac{\cos \delta \cos t + [D \cos p - \Delta \cos \pi] \sin \delta \cos t}{\sqrt{A}}$$
$$+ \frac{[D \sin p - \Delta \sin \pi] \sin t}{\sqrt{A}}$$
$$- \frac{d [\sin p - \sin \pi] \sin \delta \cos t - d [\cos p - \cos \pi] \sin t}{\sqrt{A}}$$

$$\cos \delta' \sin t' = \frac{\cos \delta \sin t + [D \cos p - \Delta \cos \pi] \sin \delta \sin t}{\sqrt{A}}$$
$$- \frac{[D \sin p - \Delta \sin \pi] \cos t}{\sqrt{A}} \qquad (b)$$
$$- \frac{d [\sin p - \sin \pi] \sin \delta \sin t + d [\cos p - \cos \pi] \cos t}{\sqrt{A}}$$

$$\sin \delta' = \frac{\sin \delta - [D \cos p - \Delta \cos \pi] \cos \delta}{\sqrt{A}}$$
$$+ \frac{d [\sin p - \sin \pi] \cos \delta}{\sqrt{A}}.$$

Man beobachtet nun immer zwei Objecte mit dem Heliometer. Es sei also zugleich mit dem Bilde des ersteren Sterns ein Bild eines andern Sterns, welches durch die zweite Objectivhälfte hervorgebracht ist, auf dem Fadenkreuz, so wird man drei ähnliche Gleichungen haben, in denen

$$\delta, \ t, \ \Delta, \ \pi, \ d \text{ und } p$$

dieselben Werthe haben, aber D, δ' und t' in andre Gröſsen übergehen, welche für diesen Stern gelten und durch D', δ'' und t'' bezeichnet werden mögen. Dann hat man sechs Gleichungen, welche indessen eigentlich, wenn man die Winkel durch die Tangenten sucht, nur vieren entsprechen und in denen auf der rechten Seite Alles durch die Ablesungen an dem Instrumente gegeben ist, nämlich δ und t durch die Ablesungen an dem Declinations- und Stundenkreise, D und Δ durch die Ablesungen an den Schiebern des Objectivs und Oculars, p und π durch die beiden Positionskreise. Man wird also aus diesen Gleichungen δ', t' und δ'', t'' finden können. Das Instrument giebt freilich die Gröſsen δ, t, Δ

und π nicht mit derselben Genauigkeit wie die übrigen Gröſsen; da aber die beiden beobachteten Sterne immer sehr nahe stehen, also Fehler in diesen Gröſsen denselben Einfluſs auf beide Sterne haben, so wird man die Differenzen $\delta''-\delta'$ und $t''-t'$ immer mit aller Schärfe finden können.

Stehen die beobachteten Sterne dem Pole nahe, so muſs man δ'', δ', t'' und t' nach den strengen Formeln (b) berechnen. In der Regel wird man aber mit Näherungsformeln ausreichen, welche unmittelbar $\delta''-\delta'$ und $\alpha''-\alpha'$ geben. Zuerst wird es nun erlaubt sein, d gleich Null zu setzen. Löst man dann in der Gleichung für $\sin\delta'$ den Nenner in eine unendliche Reihe auf, so erhält man, wenn man nur die ersten Glieder mitnimmt:

$$\sin\delta-\sin\delta'=[D\cos p-\Delta\cos\pi]\cos\delta+\tfrac{1}{2}[D\cos p-\Delta\cos\pi]^2\sin\delta \\ +\tfrac{1}{2}[D\sin p-\Delta\sin\pi]^2\sin\delta,$$

oder nach Formel (20) der Einleitung, wenn man nur die Quadrate der in Klammern stehenden Gröſsen beibehält:

$$\delta'-\delta=-[D\cos p-\Delta\cos\pi]-\tfrac{1}{2}[D\sin p-\Delta\sin\pi]^2\operatorname{tang}\delta.$$

Für den andern Stern hat man ebenso:

$$\delta''-\delta=-[D'\cos p-\Delta\cos\pi]-\tfrac{1}{2}[D'\sin p-\Delta\sin\pi]^2\operatorname{tang}\delta,$$

also wird

$$\delta''-\delta'=[D-D']\cos p+\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\delta\,[(D+D')\sin p-2\Delta\sin\pi]\,[D-D']\sin p, \quad (c)$$

eine Gleichung, durch welche man den Declinationsunterschied der beiden Sterne durch die an dem Instrumente gemachten Ablesungen findet.

Um nun auch den Rectascensionsunterschied zu erhalten, multiplicire man die erste der Gleichungen (b) mit $\sin t$, die zweite mit $-\cos t$ und addire beide, so wird

$$\cos\delta'\sin(t-t')=\frac{D\sin p-\Delta\sin\pi}{\sqrt{1+[D\cos p-\Delta\cos\pi]^2+[D\sin p-\Delta\sin\pi]^2}}.$$

Aehnlich erhält man:

$$\cos\delta''\sin(t-t'')=\frac{D'\sin p-\Delta\sin\pi}{\sqrt{1+[D'\cos p-\Delta\cos\pi]^2+[D'\sin p-\Delta\sin\pi]^2}}.$$

Vernachlässigt man die Quadrate von D, D' und Δ, und führt die Rectascensionen statt der Stundenwinkel ein, so gehen diese Gleichungen in die folgenden über:

$$\cos\delta'(\alpha'-\alpha)=D\sin p-\Delta\sin\pi$$
$$\cos\delta''(\alpha''-\alpha)=D'\sin p-\Delta\sin\pi,$$

und wenn man hierin statt δ' und δ'' setzt:

$$\delta' = \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') + \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'')$$
$$\delta'' = \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'')$$

und den Sinus des kleinen Winkels $\delta' - \delta''$ mit dem Bogen vertauscht, dagegen den Cosinus gleich Eins setzt, so erhält man

$$(\alpha' - \alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') = [D\sin p - \Delta\sin\pi]\,[1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\delta\,(\delta'' - \delta')]$$
$$(\alpha'' - \alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') = [D'\sin p - \Delta\sin\pi]\,[1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\delta\,(\delta'' - \delta')],$$

also

$$(\alpha'' - \alpha')\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') = (D' - D)\sin p + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\delta\,[\delta'' - \delta']\,[D' + D]\sin p$$
$$- \operatorname{tang}\delta\,\Delta\sin\pi\,[\delta'' - \delta'],$$

oder, wenn man für $\delta'' - \delta'$ den vorher gefundenen Werth

$$(D - D')\cos p$$

schreibt:

$$(\alpha'' - \alpha')\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta'') = (D' - D)\sin p$$
$$- \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\delta\,[(D' + D)\sin p - 2\Delta\sin\pi]\,[D' - D]\cos p. \quad (d)$$

Setzt man nun

$$u = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\delta\,[(D' + D)\sin p - 2\Delta\sin\pi], \qquad (A)$$

so kann man auch in den Gleichungen (c) und (d) statt dieser kleinen Gröſse u den Sinus schreiben, während man in den ersten Gliedern der Gleichungen den Factor $\cos u$ hinzufügt und erhält dann:

$$\left.\begin{aligned} \delta'' - \delta' &= -(D' - D)\cos(p + u) \\ \alpha'' - \alpha' &= +(D' - D)\sin(p + u)\sec\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta''). \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Bisher ist vorausgesetzt worden, daſs die Distanz blos einfach gemessen ist und es ist dann die Ablesung s eigentlich diejenige, für welche die Bilder der beiden Objectivhälften zusammenfallen. Hat man aber zwei Objecte a und b, so erhält man, wenn man die Objectivhälften aus einander schraubt, zwei neue Bilder a' und b', und kann dann das Bild a mit dem Bilde b' zur Deckung bringen. Schraubt man nun die Objectivhälften wieder zurück und über den Punkt hinaus, wo die Mittelpunkte zusammenfallen, so kann man auch das Bild b mit dem Bilde a' zur Deckung bringen und wird dann aus den Ablesungen in beiden Stellungen die doppelte Distanz erhalten.

Hat man also die Beobachtungen auf diese Weise angestellt, so muſs man $\tfrac{1}{2}(D' - D)$ statt $D' - D$ in die obigen Formeln setzen. Statt des Winkels $p + u$ giebt jede der Messungen $p' + u'$ und $p' + u''$, es wird also

$$p=\frac{p'+p''}{2},\quad D'+D=s+s'-2h,\quad \Delta=\sigma-h$$

und

$$u=-\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\delta\,[(s+s'-2h)\sin p-2(\sigma-h)\sin\pi)$$
$$\delta''-\delta'=-\tfrac{1}{2}(D'-D)\cos(p+u)$$
$$\alpha''-\alpha'=+\tfrac{1}{2}(D'-D)\sin(p+u)\sec\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta'').$$

Will man $\delta''-\delta'$ und $\alpha''-\alpha'$ gleich in Secunden und u in Minuten erhalten, so mufs man $\frac{D'-D}{2}$ mit dem Werthe eines Scalentheils in Secunden und den Ausdruck für u mit $\frac{206265}{60.l}$ multipliciren. Man kann nun aber immer bewirken, dafs das von $p-\pi$ abhängige Glied zu vernachlässigen ist, weil

$$u=o,\ \text{wenn}\ \sigma=\frac{s'+s}{2}\ \text{und}\ \pi=p$$

ist. Man wird dies also durch die Stellung des Oculars immer wenigstens nahe einzurichten suchen, zumal da dann auch die Bilder im Fernrohre am Deutlichsten erscheinen.

Bisher war nun angenommen worden, dafs der Ort des Gesichtsfeldes, wo man die Sterne zur Coincidenz bringt, der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes ist. Wenn die Sterne aber nicht gar zu nahe beim Pole stehen, so genügt es vollkommen, wenn man die Coincidenz nach dem Augenmaafse in der Mitte des Feldes beobachtet.

40. Hat das eine Gestirn eine eigne Bewegung in Rectascension und Declination, so mufs man hierauf natürlich bei der Reduction der Beobachtungen Rücksicht nehmen. Berechnete man aus jeder einzelnen Distanz, in Verbindung mit dem Positionswinkel, den Rectascensions- und Declinationsunterschied, so brauchte man nur das Mittel aus allen Bestimmungen für das Mittel der Beobachtungszeiten gelten zu lassen, da man die Bewegung in Rectascension und Declination immer als der Zeit proportional betrachten kann. Der Kürze wegen wird man es aber meist vorziehen, den Rectascensions- und Declinationsunterschied blos aus dem Mittel der gemessenen Distanzen und Positionswinkel zu berechnen. Da diese sich aber nicht immer der Zeit proportional ändern werden, so kann man das Mittel aus den beobachteten Distanzen und Positionswinkeln nicht unmittelbar

für das Mittel der Zeiten gelten lassen, sondern mufs erst eine Correction an dasselbe anbringen, ähnlich wie bei der Reduction gemessener Zenithdistanzen auf das Mittel der Zeiten in No. 5 des fünften Abschnitts.

Es seien t, t', t'', etc. die einzelnen Beobachtungszeiten, T das Mittel aus allen, und es sei

$$t-T=\tau,\quad t'-T=\tau',\quad t''-T=\tau'', \text{ etc.}$$

Ferner seien p, p', p'', etc. die den einzelnen Zeiten entsprechenden Positionswinkel, P der zur Zeit T gehörige, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die Bewegungen in Rectascension und Declination in einer Zeitsecunde, wo also τ, τ', etc. ebenfalls in Zeitsecunden ausgedrückt sein müssen. Dann ist:

$$\begin{aligned}p=P+\frac{dP}{d\alpha}.\Delta\alpha.\tau+\tfrac{1}{2}\frac{d^2P}{d\alpha^2}\Delta\alpha^2.\tau^2 \\ +\frac{dP}{d\delta}\Delta\delta.\tau+\tfrac{1}{2}\frac{d^2P}{d\delta^2}\Delta\delta^2.\tau^2+\frac{d^2P}{d\alpha\, d\delta}.\Delta\alpha.\Delta\delta.\tau^2.\end{aligned}$$

Solcher Gleichungen wird man nun so viele haben, als Positionswinkel gemessen sind, und aus dem Mittel aller erhält man, wenn n die Anzahl der Beobachtungen ist:

$$\begin{aligned}P=\frac{p+p'+p''+\ldots}{n} \\ -\left\{\tfrac{1}{2}\frac{d^2P}{d\alpha^2}\Delta\alpha^2+\frac{d^2P}{d\alpha\, d\delta}\Delta\alpha\,\Delta\delta+\tfrac{1}{2}\frac{d^2P}{d\delta^2}\Delta\delta^2\right\}\frac{\Sigma\tau^2}{n},\end{aligned}$$

wo man für

$$\frac{\Sigma\tau^2}{n} \text{ auch } \frac{2\,\Sigma 2\sin\frac{1}{2}\tau^2}{n}$$

nehmen kann, wenn man sich der schon öfter erwähnten Tafeln bedienen will.

Ebenso erhält man für die zu dem arithmetischen Mittel der Zeiten gehörige Distanz D, wenn d, d', d'', etc. die einzelnen gemessenen Distanzen sind:

$$\begin{aligned}D=\frac{d+d'+d''+\ldots}{n} \\ -\left\{\tfrac{1}{2}\frac{d^2D}{d\alpha^2}\Delta\alpha^2+\frac{d^2D}{d\alpha\, d\delta}\Delta\alpha\,\Delta\delta+\tfrac{1}{2}\frac{d^2D}{d\delta^2}\Delta\delta^2\right\}\frac{\Sigma\tau^2}{n}.\end{aligned}$$

Man hat nun noch die einzelnen Differentialquotienten zu finden.

Es ist aber

$$\begin{aligned}D\sin P&=(\alpha-\alpha')\cos\delta \\ D\cos P&=\delta-\delta',\end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{tang} P = \frac{\alpha - \alpha'}{\delta - \delta'} \cos \delta$$

$$D^2 = (\alpha - \alpha')^2 \cos \delta^2 + (\delta - \delta')^2,$$

und man erhält leicht:

$$\frac{dP}{d\alpha} = \frac{\cos \delta \cos P}{D}, \quad \frac{dP}{d\delta} = -\frac{\sin P}{D}, \quad \frac{dD}{d\alpha} = \cos \delta \sin P, \quad \frac{dD}{d\delta} = \cos P$$

$$\frac{d^2 P}{d\alpha^2} = -\frac{2 \cos \delta^2 \sin P \cos P}{D^2}, \quad \frac{d^2 P}{d\delta^2} = \frac{2 \sin P \cos P}{D^2}$$

$$\frac{d^2 P}{d\alpha\, d\delta} = \frac{2 \cos \delta \sin P^2}{D^2} - \frac{\cos \delta}{D^2}$$

$$\frac{d^2 D}{d\alpha^2} = \frac{\cos \delta^2 \cos P^2}{D}, \quad \frac{d^2 D}{d\delta^2} = \frac{\sin P^2}{D}, \quad \frac{d^2 D}{d\alpha \,.\, d\delta} = -\frac{\cos \delta \sin P \cos P}{D}.$$

Daraus findet man dann, wenn man zugleich setzt:

$$\Delta \alpha \cos \delta = c \sin \gamma$$

$$\Delta \delta = c \cos \gamma,$$

$$P = \frac{p + p' + p'' + \ldots}{n} - \frac{\sin (P - \gamma) \cos (P - \gamma)}{D^2}\, c^2 \,\frac{\Sigma \tau^2}{n}$$

$$D = \frac{d + d' + d'' + \ldots}{n} - \tfrac{1}{2} \frac{\sin (P - \gamma)^2}{D}\, c^2 \,\frac{\Sigma \tau^2}{n},$$

oder, wenn M den Modulus der Briggischen Logarithmen bedeutet:

$$\log D = \log \frac{d + d' + d'' + \ldots}{n} - \tfrac{1}{2} \frac{M \sin (P - \gamma)^2}{D^2}\, c^2 \,\frac{\Sigma \tau^2}{n}.$$

Um das zweite Glied von P in Bogenminuten, das zweite Glied von $\log D$ in Einheiten der fünften Decimale zu erhalten, mufs man, wenn R den Werth eines Scalentheils in Secunden bedeutet, D in Scalentheilen ausgedrückt ist und $\Delta \alpha$ und $\Delta \delta$ jetzt die Aenderungen der Rectascension und Declination in 24 Stunden in Bogenminuten bezeichnen, das erste Glied multipliciren mit

$$\frac{60}{86400^2} \frac{206265}{R^2},$$

und das andere mit

$$\frac{100000 \,.\, 60^2}{86400^2 \,.\, R^2}.$$

Hat man aber die Tafeln für $2 \sin \frac{1}{2} \tau^2$ benutzt, sodafs man genommen hat:

$$P = \frac{p + p' + p'' + \ldots}{n} - 2 \frac{\sin (P - \gamma) \cos (P - \gamma)}{D^2}\, c^2 \,\frac{\Sigma\, 2 \sin \frac{1}{2} \tau^2}{n}$$

und

$$\log D = \log \frac{d + d' + d'' + \ldots}{n} - \frac{M \sin (P - \gamma)^2}{D^2}\, c^2 \,\frac{\Sigma\, 2 \sin \frac{1}{2} \tau^2}{n},$$

so mufs man die zweiten Glieder beider Gleichungen multipliciren mit

$$\frac{60\,.\,206265^2}{86400^2\,.\,15^2\,.\,R^2}$$

und

$$\frac{100000\,.\,60^2\,.\,206265}{86400^2\,.\,R^2\,.\,15^2}.$$

41. Es ist nun noch zu zeigen, auf welche Weise man den Nullpunkt des Positionskreises und die Gröfse eines Scalentheils bestimmen kann.

Der Nullpunkt des Positionskreises soll da stehen, wo die Richtung der Schieber genau der Drehung des Fernrohrs um die Declinationsaxe entspricht. Hat man nun die beiden Objectivhälften bedeutend von einander entfernt, so drehe man die Schieber so, dafs die Nonien des Positionskreises auf 0° zeigen und bringe das eine Bild eines Objects in den Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes *). Kann man dann durch alleinige Drehung des Fernrohrs um die Declinationsaxe auch das andre Bild genau in die Mitte des Fadenkreuzes bringen, so sind die Schieber dieser Drehung des Fernrohrs parallel, also ist dann der Collimationsfehler des Positionskreises gleich Null. Ist dies aber nicht der Fall, so mufs man das Objectiv ein wenig drehen, bis die Bedingung, durch blofse Drehung des Fernrohrs um die Declinationsaxe beide Bilder durch die Mitte des Fadenkreuzes zu führen, erfüllt ist. Die Zahl, auf welche dann der Nonius des Positionskreises zeigt, ist der wahre Nullpunkt und der Unterschied von dem mit Null bezeichneten Punkte der Theilung der Collimationsfehler des Kreises.

Dies setzt nun voraus, dafs die Schieber sich geradlinig bewegen. Wäre dies aber nicht der Fall, so würde man bei verschiedenen Abständen der zwei Bilder von einander und bei verschiedenen Stellungen der Schieber an ihren Scalen auch verschiedene Collimationsfehler finden.

Dreht man das Fadenkreuz des Fernrohrs so um die

---

*) Für diesen Zweck ist es gut, wenn man ein Fadenkreuz hat, welches aus doppelten, etwas von einander entfernten, parallelen Fäden besteht, sodafs die Mitte des Feldes durch ein kleines Quadrat angegeben wird.

Axe desselben, dafs ein dem Aequator naher Stern den einen Faden bei seinem Durchgange durch das Feld nicht verläfst, so ist derselbe dem Aequator parallel. Bewegt man dann die Schieber der Objective weit aus der Stellung, wo die Mittelpunkte der beiden Objectivhälften zusammenfallen, und dreht zugleich das Objectiv um die Axe des Fernrohrs so lange, bis beide Bilder bei dem Durchgange durch das Feld auf dem Faden hingehen, so mufs der Positionskreis 90° oder 270° zeigen. Liest man aber $90° - c$ oder $270° - c$ in dieser Stellung ab, so ist c der Collimationsfehler des Kreises, welchen man zu allen Ablesungen an demselben zu addiren hat.

Die Gröfse eines Scalentheils des Objectivschiebers findet man durch die Messung eines Gegenstandes von bekanntem Durchmesser, etwa der Sonne oder des Abstandes zweier genau bestimmter Sterne, wozu sich namentlich die Plejadensterne eignen, deren Entfernungen von Bessel mit sehr grofser Schärfe gemessen sind. Man kann sich aber auch hier wieder der von Gaufs vorgeschlagenen, schon früher erwähnten Methode bedienen. Da nämlich die Axen der beiden Objectivhälften, wenn sie auch um eine grofse Anzahl Scalentheile von einander abstehen, doch parallel sind, so sieht man, wenn man ein für unendlich entfernte Gegenstände eingestelltes Fernrohr auf das Objectiv eines Heliometers richtet, das doppelte Bild, welches ein im Brennpunkte der einen Objectivhälfte ausgespannter Faden giebt. Stellt man also die eine Objectivhälfte in die Mitte der Scale, die andere Hälfte aber um eine grofse Anzahl von Scalentheilen davon entfernt, und läfst dann das Fadenkreuz durch das gegen den hellen Himmel gerichtete Ocular erleuchten, so kann man mit einem zweiten Fernrohre, welches mit einem Winkel messenden Instrumente verbunden ist, den scheinbaren Abstand jener zwei Bilder messen. Indem man nun mit diesem Winkelabstande die Zahl der Scalentheile vergleicht, um welche man das eine Objectiv aus der Stellung, in welcher die Mittelpunkte zusammenfielen, fortgerückt hat, so erhält man die Gröfse eines Scalentheiles. Hat die eine Objectivhälfte keine Mikrometertheilung, so mufs man die Beobachtung zwei Male bei verschiedenen Stellungen der mit ei-

nem eingetheilten Schraubenkopfe versehenen Objectivhälfte anstellen.

Es sei für die erste Messung S die Ablesung an dem Schieber mit der Mikrometerschraube, S_0 die am zweiten Objectivschieber, s die am Ocularschieber, so hat man, wenn b und c die Winkel sind, welche die von den Punkten S_0 und S nach dem Brennpunkte gezogenen Geraden mit der Axe des Fernrohrs machen:

$$(s-S_0)\,R = 206265''\,\mathrm{tang}\,b$$
$$(S-s)\,R = 206265''\,\mathrm{tang}\,c,$$

wo R die Gröſse eines Scalentheils bezeichnet. Ferner sei der gemessene Winkel zwischen den beiden Bildern des Fadenkreuzes gleich a, so ist

$$a = b + c.$$

Eliminirt man nun mit Hülfe dieser Gleichung die Winkel b und c aus den obigen beiden, so erhält man die quadratische Gleichung:

$$(s-S_0)(S-s)\,\mathrm{tang}\,a\,\frac{R^2}{206265^2} + (S-S_0)\frac{R}{206265} = \mathrm{tang}\,a,$$

deren Auflösung giebt:

$$\frac{R}{206265} = -\frac{(S-S_0) - \sqrt{(S-S_0)^2 + 4\,(s-S_0)(S-s)\,\mathrm{tang}\,a^2}}{2\,(s-S_0)(S-s)\,\mathrm{tang}\,a}.$$

Ist nun blos eine Objectivhälfte mit einem eingetheilten Schraubenkopfe versehen, so muſs man eine zweite Beobachtung machen. Bei dieser sei S' der Stand des Schiebers mit getheiltem Schraubenkopfe, s' der des Ocularschiebers, der gemessene Winkel a'; dann erhält man für R eine ähnliche Gleichung, in welcher S', s' und a' an der Stelle von S, s und a stehen. Man kann nun aber die Messung stets so einrichten, daſs

$$S'-S_0 = S_0 - S \text{ und } s - S_0 = S_0 - s'$$

ist, und wird dann statt der eben gefundenen Gleichung für R die folgende schreiben können:

$$\frac{R}{206265} = -\frac{(S'-S) - \sqrt{(S'-S)^2 + 16\,(s-S_0)(S-s)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+a')^2}}{4\,(s-S_0)(S-s)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+a')}.$$

Haben $s-S_0$ und $S-s$ gleiche Zeichen, so wird man, wenn man setzt:

$$\mathrm{tang}\,\alpha = 4\,\frac{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+a')}{S'-S}\sqrt{(s-S_0)(S-s)},$$

für R erhalten:

$$R = 206265 \frac{[\sec \alpha - 1]}{\operatorname{tang} \alpha \sqrt{(s - S_0)(S - s)}}$$

$$= 206265 \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{(s - S_0)(S - s)}}.$$

Haben aber $s - S_0$ und $S - s$ verschiedene Zeichen, so wird man, wenn man setzt:

$$\sin \beta = 4 \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + a')}{S' - S} \sqrt{(s - S_0)(S - s)},$$

für R erhalten:

$$R = 206265 \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta \sqrt{(s - S_0)(S - s)}}$$

$$= 206265 \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta}{\sqrt{(s - S_0)(S - s)}}.$$

Ist $s = S$ und $s' = S'$, so erhält man statt der quadratischen Gleichungen für R in beiden Beobachtungen die folgenden:

$$(S - S_0) \frac{R}{206265} = \operatorname{tang} a$$

$$(S_0 - S') \frac{R}{206265} = \operatorname{tang} a',$$

also:

$$R = 206265 \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + a')}{S - S'},$$

oder auch die Näherungsformel:

$$R = \frac{a' + a}{S - S'}.$$

Diese Vorschriften sind natürlich auch anwendbar, wenn man den Werth eines Scalentheils durch die Beobachtung des Sonnendurchmessers oder des Abstandes zweier Fixsterne bestimmt. Dann wird a und a' gleich dem Durchmesser der Sonne, oder gleich der Entfernung der beiden Fixsterne.

Hat das Heliometer ein Fadenkreuz, so kann man auch den einen Faden der täglichen Bewegung parallel stellen und, nachdem man die eine Objectivhälfte bewegt und den Positionskreis so gestellt hat, dafs die beiden Bilder eines Sterns auf dem Faden laufen, die Durchgänge derselben durch den verticalen Faden beobachten.

Der Werth einer Schraubenumdrehung ändert sich auch hier mit der Temperatur und ist daher von der Form:

$$R = a - b(t - t_0).$$

Daher gehören die für R gefundenen Werthe zu den bestimmten Temperaturen, bei denen dieselben beobachtet sind, und die Werthe von a und b müssen aus den bei verschiedenen Temperaturen gefundenen Werthen bestimmt werden.

Anm. Die Theorie des Heliometers findet man in:

Hansen, Methode mit dem Fraunhoferschen Heliometer Beobachtungen anzustellen.

und am Vollständigsten in:

Bessel, Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Aequatoreals im ersten Bande der astronomischen Untersuchungen und im 15ten Bande der Königsberger Beobachtungen.

VIII. Verbesserung der Mikrometerbeobachtungen wegen der Refraction.

42. Die Beobachtungen an den verschiedenen Mikrometern geben immer den scheinbaren Rectascensions- und Declinationsunterschied der Sterne, theils unmittelbar, theils lassen sie denselben durch Rechnung finden. Wäre nun die Wirkung der Refraction auf beide Sterne dieselbe, so würde dieser beobachtete Unterschied der scheinbaren Oerter auch unmittelbar der Unterschied der wahren Oerter sein. Wegen der ungleichförmigen Wirkung der Refraction auf Gestirne in verschiedenen Höhen bedürfen aber die Mikrometerbeobachtungen noch einer Verbesserung. Nur in dem Falle, wo die beiden Sterne auf demselben Parallele stehen, wo also die Beobachtungen an demselben Punkte des Mikrometers geschehen, für welchen die Höhe, also auch die Strahlenbrechung dieselbe bleibt, wird diese Correction gleich Null sein *).

Die gewöhnlichen Refractionstafeln z. B. in den Tabulis Regiomontanis geben die Refraction für den Normalzustand der Atmosphäre (d. h. für einen bestimmten Barometer- und Thermometerstand) unter der Form:

$$\alpha \operatorname{tang} z,$$

---

*) Diese Bemerkung gilt natürlich nicht für Mikrometer, mit denen Positionswinkel und Distanzen gemessen werden.

wo z die scheinbare Zenithdistanz bedeutet, α dagegen ein mit der Zenithdistanz veränderlicher Factor ist, der für

$$z = 45^0 \text{ gleich } 57''.682$$

ist und für wachsende Zenithdistanzen abnimmt, sodafs er z. B. für

$$z = 85^0 \text{ nur gleich } 51''.310$$

ist. Aus diesen Tafeln kann man leicht andre berechnen, welche die wahre Zenithdistanz ζ zum Argumente haben und aus denen man dann die Refraction durch die Formel findet:

$$\varrho = \beta \operatorname{tang} \zeta,$$

wo β wieder eine Function von ζ ist. Man hat daher:

$$\zeta = z + \beta \operatorname{tang} \zeta$$
$$\zeta' = z' + \beta' \operatorname{tang} \zeta',$$

also:

$$\zeta' - \zeta = z' - z + \beta' \operatorname{tang} \zeta' - \beta \operatorname{tang} \zeta,$$

oder auch, wenn man

$$\zeta' - \zeta - (z' - z) \text{ mit } \Delta (z' - z)$$

bezeichnet:

$$\Delta (z' - z) = \beta' \operatorname{tang} \zeta' - \beta \operatorname{tang} \zeta. \qquad (a)$$

Dies ist also der Ausdruck für die Correction, welche man dem beobachteten Unterschiede der scheinbaren Zenithdistanzen hinzuzufügen hat, um den Unterschied der wahren Zenithdistanzen zu erhalten.

Nennt man nun β_0 den zu

$$\frac{\zeta' + \zeta}{2} = \zeta_0$$

gehörigen Werth von β, gegeben durch die Gleichung

$$\varrho_0 = \beta_0 \operatorname{tang} \zeta_0,$$

so wird:

$$\beta' \operatorname{tang} \zeta' = \beta_0 \operatorname{tang} \zeta' + \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_0}{d\zeta_0} \operatorname{tang} \zeta' (\zeta' - \zeta) + \dots$$

$$\beta \operatorname{tang} \zeta = \beta_0 \operatorname{tang} \zeta - \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_0}{d\zeta_0} \operatorname{tang} \zeta (\zeta' - \zeta) + \dots$$

Setzt man rechts in den zweiten und den folgenden Gliedern $\operatorname{tang} \zeta_0$ statt $\operatorname{tang} \zeta$ und $\operatorname{tang} \zeta'$, so heben sich die Glieder, welche die zweiten Differentialquotienten enthalten, in dem Unterschiede beider Gleichungen auf, und man hat sehr nahe:

$$\beta' \operatorname{tang} \zeta' - \beta \operatorname{tang} \zeta = \beta_0 [\operatorname{tang} \zeta' - \operatorname{tang} \zeta]$$
$$+ \frac{d\beta_0}{d\zeta_0} \operatorname{tang} \zeta_0 \, \frac{\operatorname{tang} \zeta' - \operatorname{tang} \zeta}{\sec \zeta_0{}^2} \, 206265.$$

Setzt man also

$$k = \beta_0 + \frac{d\beta_0}{\delta\zeta_0} \frac{\tang \zeta_0}{\sec\zeta_0^{\,2}} 206265,$$

so erhält man aus (*a*):

$$\Delta(z' - z) = k\,[\tang \zeta' - \tang \zeta]$$

wo also *k* mit dem Werthe

$$\zeta_0 = \frac{\zeta' + \zeta}{2}$$

zu berechnen ist, und da bis auf die zweiten Potenzen von $\zeta' - \zeta$ auch

$$\tang \zeta' - \tang \zeta = \frac{\zeta' - \zeta}{\cos\,\zeta_0^{\,2}}$$

ist, so hat man:

$$\Delta(z' - z) = k\,\frac{\zeta' - \zeta}{\cos\,\zeta_0^{\,2}}. \qquad (b)$$

Diese Formel setzt nun aber den Unterschied der wahren Zenithdistanzen als gegeben voraus. Führt man dafür den Unterschied der scheinbaren Zenithdistanzen ein, so mufs man die Formel noch mit $\frac{d\zeta_0}{dz_0}$ multipliciren und erhält dann:

$$\Delta(z' - z) = k\,\frac{d\zeta_0}{dz_0} \cdot \frac{z' - z}{\cos\,\zeta_0^{\,2}},$$

oder, wenn man jetzt setzt:

$$k = \frac{d\zeta_0}{dz_0} \left\{\beta_0 + \frac{d\beta_0}{d\zeta_0} \frac{\tang \zeta_0}{\sec\zeta_0^{\,2}} 206265\right\}$$

$$= \frac{d\zeta_0}{dz_0} \left\{\beta_0 + \tfrac{1}{2} \frac{d\beta_0}{d\zeta_0} \sin 2\zeta_0\, 206265\right\}, \qquad (A)$$

so erhält man endlich:

$$\Delta(z' - z) = k \,.\, \frac{z' - z}{\cos\,\zeta_0^{\,2}}. \qquad (B)$$

Um nun zu sehen, wie genau man durch diese Formeln den Unterschied der wahren Zenithdistanzen aus dem Unterschiede der scheinbaren Zenithdistanzen finden kann, diene das folgende Beispiel:

Wahre Zenithdistanz ζ	Scheinbare Zenithdistanz z	Refraction
87° 20′	87° 5′ 27″. 4	14′ 32″. 6
30	14 54 . 8	15 5 . 2
40	24 20 . 7	39 . 3
50	33 44 . 5	16 15 . 5
88 0	43 6 . 4	53 . 6.

Hieraus erhält man die folgenden Werthe für β:

87° 20′	40″.6427
30	39 .5209
40	38 .2727
50	36 .9073,

und daraus nach den Formeln für die numerischen Differentialquotienten in No. 15 der Einleitung, die Werthe für $\frac{d\beta_0}{d\zeta_0}$, d. h. für die Aenderung von β_0 bei einer Aenderung von einer Secunde in ζ_0:

87° 30′	— 0″.0019750
40	0 .0021767
50	0 .0023967.

Berechnet man nun hiermit die Werthe von k, so findet man, da die Logarithmen von $\frac{d\zeta}{dz}$ die folgenden sind:

87° 30′	0 .0271
40	0 .0287
50	0 .0307,

die Werthe der Logarithmen von k:

	k	
87° 30′	6 .0505	
		350
40	6 .0155	
		384
50	5 .9771	

wo k in Theilen des Radius ausgedrückt ist.

Es sei nun

$$z = 87^\circ\ 10' \text{ und } z' = 87^\circ\ 50,$$

also

$$z' - z = 40',$$

so gehört dazu nach den gewöhnlichen Refractionstafeln:

$$\zeta = 87^\circ\ 24'\ 47''.8$$
$$\zeta' = 88 \quad 7\ 23\ .0,$$

also

$$\zeta' - \zeta = +\ 42'\ 35''.2$$
$$\zeta_0 = 87^\circ\ 46'\ 5''.4.$$

Nimmt man nun $z' - z$ und ζ_0 als gegeben an und berechnet $\Delta(z' - z)$ nach den vorher gegebenen Formeln (A) und (B), so erhält man, da der dem Werthe ζ_0 entsprechende $\log k$ gleich 5.9925 ist:

$$\Delta(z' - z) = +\ 2'\ 35''.4,$$

also

$$\zeta' - \zeta = +\ 42'\ 35''.4,$$

fast genau so, wie es die Refractionstafeln gaben.

Die Werthe von k kann man nun in Tafeln bringen, welche die wahre Zenithdistanz zum Argumente haben. Man findet solche Tafeln im dritten Bande der astronomischen Nachrichten in Bessels Aufsatze über die Correction wegen der Strahlenbrechung bei Mikrometerbeobachtungen und in dessen astronomischen Untersuchungen, Band I. In der letzten Abhandlung findet man auch die Aenderungen von k für die verschiedenen Barometer- und Thermometerstände.

Man braucht nun zur Berechnung des Unterschiedes der wahren Zenithdistanzen die wahre Zenithdistanz ζ_0 selbst. Da man indessen immer die Rectascensionen und Declinationen beider Sterne kennt, so findet man diese genau genug, wenn man dieselbe aus dem arithmetischen Mittel der Rectascensionen und Declinationen mit der bekannten Polhöhe des Beobachtungsortes berechnet. Dazu wendet man am Bequemsten die folgenden Formeln an, da man auch, wie man sogleich sehen wird, die Kenntnifs des parallactischen Winkels η nöthig hat:

$$\sin\zeta \sin\eta = \cos\varphi \sin t_0$$
$$\sin\zeta \cos\eta = \cos\delta_0 \sin\varphi - \sin\delta_0 \cos\varphi \cos t_0$$
$$\cos\zeta = \sin\delta_0 \sin\varphi + \cos\delta_0 \cos\varphi \cos t_0.$$

Setzt man hier:

$$\cos n = \cos\varphi \sin t_0$$
$$\sin n \sin N = \cos\varphi \cos t_0$$
$$\sin n \cos N = \sin\varphi,$$

so hat man:

$$\sin\zeta \sin\eta = \cos n$$
$$\sin\zeta \cos\eta = \sin n \cos(N + \delta_0)$$
$$\cos\zeta = \sin n \sin(N + \delta_0),$$

oder

$$\operatorname{tang}\zeta \sin\eta = \operatorname{cotang} n \,.\, \operatorname{cosec}(N + \delta_0)$$
$$\operatorname{tang}\zeta \cos\eta = \operatorname{cotang}(N + \delta_0).$$

Die Gröfsen cotang n und N kann man dann für eine bestimmte Polhöhe in Tafeln bringen, deren Argument t ist.

Hat man die in No. 7 des ersten Abschnitts erwähnten Tafeln, so erhält man auch durch diese die Höhe oder Zenithdistanz und den parallactischen Winkel. Den Zusammenhang der dortigen Formeln mit den eben gegebenen sieht man leicht.

43. Nachdem man den Unterschied der wahren Zenithdistanzen aus den scheinbaren berechnen kann, findet man

dadurch leicht den Unterschied der wahren Declinationen und Rectascensionen zweier Sterne aus den beobachteten scheinbaren Unterschieden dieser Gröfsen. Ist nämlich β tang ζ die Refraction in der Zenithdistanz ζ, so ist

$$\beta \, . \, \frac{\operatorname{tang}\zeta \sin\eta}{\cos\delta} \text{ die Refraction in der Rectascension}$$

und

$$\beta \operatorname{tang}\zeta \cos\eta \text{ die Refraction in der Declination.}$$

Es ist aber:

$$\beta' \operatorname{tang}\zeta' \frac{\sin\eta'}{\cos\delta'} - \beta \operatorname{tang}\zeta \frac{\sin\eta}{\cos\delta} = k \operatorname{tang}\zeta' \frac{\sin\eta'}{\cos\delta'} - k \operatorname{tang}\zeta \frac{\sin\eta}{\cos\delta}$$

$$= k \, . \, \frac{d \, . \, \dfrac{\operatorname{tang}\zeta_0 \sin\eta_0}{\cos\delta_0}}{d\delta_0} (\delta' - \delta) + k \, . \, \frac{d \, . \, \dfrac{\operatorname{tang}\zeta_0 \sin\eta_0}{\cos\delta_0}}{d\alpha_0} (\alpha' - \alpha).$$

Ebenso erhält man:

$$\beta' \operatorname{tang}\zeta' \cos\eta' - \beta \operatorname{tang}\zeta \cos\eta = k \, . \, \frac{d \, . \operatorname{tang}\zeta_0 \cos\eta_0}{d\delta_0} (\delta' - \delta)$$

$$+ k \, . \, \frac{d \, . \operatorname{tang}\zeta_0 \cos\eta_0}{d\alpha_0} (\alpha' - \alpha),$$

und hier bezeichnen, wenn k den durch die Formel (A) der vorigen Nummer gegebenen Werth hat, $\delta' - \delta$ und $\alpha' - \alpha$ die scheinbaren Unterschiede der Declinationen und Rectascensionen beider Sterne.

Durch Differentiation der Formeln für

$$\frac{\operatorname{tang}\zeta \sin\eta}{\cos\delta} \text{ und } \operatorname{tang}\zeta \cos\eta$$

erhält man aber:

$$\frac{d \, . \, \dfrac{\operatorname{tang}\zeta \sin\eta}{\cos\delta}}{d\delta} = - \frac{\operatorname{tang}\zeta^2 \sin\eta \cos\eta - \operatorname{tang}\zeta \sin\eta \operatorname{tang}\delta}{\cos\delta}$$

$$\frac{d \, . \, \dfrac{\operatorname{tang}\zeta \sin\eta}{\cos\delta}}{dt} = 1 - \operatorname{tang}\zeta \cos\eta \operatorname{tang}\delta + \operatorname{tang}\zeta^2 \sin\eta^2$$

$$\frac{d \, . \operatorname{tang}\zeta \cos\eta}{d\delta} = - [\operatorname{tang}\zeta^2 \cos\eta^2 + 1]$$

$$\frac{d \, . \operatorname{tang}\zeta \cos\eta}{dt} = \operatorname{tang}\zeta^2 \cos\eta \sin\eta \cos\delta + \operatorname{tang}\zeta \sin\eta \sin\delta.$$

Hiernach kann man nun die einzelnen Mikrometer betrachten, deren Theorie in VII dieses Abschnitts gegeben ist. Da indessen die in No. 33 erwähnten Fadennetze jetzt so gut wie ganz aufser Gebrauch sind, so wird auf diese im Folgenden weiter keine Rücksicht genommen werden.

44. Mikrometer, an denen der Rectascensionsunterschied durch Durchgänge durch Fäden, welche auf der Richtung der täglichen Bewegung senkrecht stehen, der Declinationsunterschied durch unmittelbare Messung bestimmt wird. Bei diesen Mikrometern kommt nur die Wirkung der Refraction in dem Augenblicke der Durchgänge der Sterne durch denselben Stundenkreis, also nur der Unterschied beider Refractionen in Betracht, sofern derselbe vom Declinationsunterschiede abhängt.

Für den ersteren Stern ist daher die Correction der scheinbaren Rectascension und Declination:

$$\Delta\alpha = -\beta \frac{\tang \zeta \sin \eta}{\cos \delta} \qquad \Delta\delta = -\beta \tang \zeta \cos \eta,$$

für den andern:

$$\Delta\alpha' = -\beta' \frac{\tang \zeta' \sin \eta'}{\cos \delta'} \qquad \Delta\delta' = -\beta' \tang \zeta' \cos \eta';$$

es ist also nach den Formeln in No. 43:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = -k \,.\, \frac{d \,.\, \frac{\tang \zeta_0 \sin \eta_0}{\cos \delta_0}}{d\delta_0} (\delta' - \delta)$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = -k \,.\, \frac{d \,.\, \tang \zeta_0 \cos \eta_0}{d\delta_0} (\delta' - \delta),$$

oder, wenn man die Werthe der Differentialquotienten substituirt:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = k(\delta' - \delta) \frac{\tang \zeta_0{}^2 \sin \eta_0 \cos \eta_0 - \tang \zeta_0 \sin \eta_0 \tang \delta_0}{\cos \delta_0}$$

$$\Delta(\delta' - \delta) = k(\delta' - \delta) [\tang \zeta_0{}^2 \cos \eta_0{}^2 + 1].$$

Diese Formeln lassen sich nun durch die in No. 42 gebrauchten Hülfsgröfsen cotang n und N bequemer ausdrücken. Substituirt man nämlich die dort gegebenen Werthe für

$$\tang \zeta \sin \eta \quad \text{und} \quad \tang \zeta \cos \eta$$

in die obigen Formeln, so erhält man:

$$\Delta(\alpha' - \alpha) = k(\delta' - \delta) \frac{\cotang n \cos(N + 2\delta_0)}{\sin(N + \delta_0)^2 \cos \delta_0{}^2}$$

und

$$\Delta(\delta' - \delta) = \frac{k(\delta' - \delta)}{\sin(N + \delta_0)^2}.$$

45. Das Kreismikrometer. Wenn sich die Refraction während des Durchgangs der Sterne durch das Kreismikrometer nicht änderte, so würde jeder Stern eine dem Aequator parallele Sehne im Felde des Fernrohrs beschrei-

ben, und der aus den beobachteten Ein- und Austritten berechnete Rectascensions- und Declinationsunterschied wäre einfach wegen des Unterschieds der Refractionen, durch welche die Sternörter im Augenblicke des Durchgangs durch den Stundenkreis des Mittelpunkts geändert werden, zu corrigiren. Man wird also zuerst wie beim vorigen Mikrometer haben:

$$\Delta(\alpha'-\alpha)=k(\delta'-\delta)\frac{\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\sin\eta_0\cos\eta_0-\operatorname{tang}\zeta_0\sin\eta_0\operatorname{tang}\delta_0}{\cos\delta_0}$$

und (a)

$$\Delta(\delta'-\delta)=k(\delta'-\delta)[\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\cos\eta_0{}^2+1].$$

Da sich nun aber die Refraction während des Durchgangs der Sterne durch das Feld des Mikrometers ändert, so ist es dasselbe, als wenn die Sterne eine eigne Bewegung in Rectascension und Declination hätten. Bedeuten aber h und h' die Aenderungen der Rectascension und Declination des einen Sterns in einer Zeitsecunde, so hat man dem aus den Beobachtungen berechneten Rectascensions- und Declinationsunterschiede nach No. 36 dieses Abschnitts die Correction hinzuzufügen:

$$\Delta\alpha=+\frac{\delta-D}{\cos\delta^2}h'$$

$$\Delta\delta=+\frac{\mu^2}{\delta-D}h,$$

wo D die Declination des Mittelpunkts des Ringes und μ die halbe Sehne bezeichnet. Da nun hier

$$h=k.\frac{d.\dfrac{\operatorname{tang}\zeta\sin\eta}{\cos\delta}}{dt}$$

und

$$h'=k.\frac{d.\operatorname{tang}\zeta\cos\eta}{dt},$$

so erhält man:

$$\Delta\alpha=k(\delta-D)\frac{\operatorname{tang}\zeta^2\cos\eta\sin\eta+\operatorname{tang}\zeta\sin\eta\operatorname{tang}\delta}{\cos\delta},$$

und ebenso für den anderen Stern:

$$\Delta\alpha'=k(\delta'-D)\frac{\operatorname{tang}\zeta'^2\cos\eta'\sin\eta'+\operatorname{tang}\zeta'\sin\eta'\operatorname{tang}\delta'}{\cos\delta'},$$

oder, wenn man in beiden Gleichungen ζ_0, η_0 und δ_0 statt ζ, η, δ und ζ', η', δ' schreibt, also die Glieder von der Ordnung $k(\delta-D)^2$ vernachlässigt:

$$\Delta(\alpha'-\alpha)=k(\delta'-\delta)\frac{\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\cos\eta_0\sin\eta_0+\operatorname{tang}\zeta_0\sin\eta_0\operatorname{tang}\delta_0}{\cos\delta_0}.$$

Vereinigt man dies mit dem ersten Theile der Correction des Rectascensionsunterschiedes, welcher durch die erste der Gleichungen (a) gegeben ist, so findet man:

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = k(\delta'-\delta)\frac{\operatorname{tang}\zeta_0{}^2 \sin 2\eta_0}{\cos\delta_0}. \qquad (A)$$

Ferner ist:

$$\Delta\delta = \frac{\mu^2}{\delta - D}h$$
$$= \frac{r^2-(\delta-D)^2}{\delta-D}h = \frac{r^2-d^2}{d}h.$$

Setzt man $\delta'-D = d'$ und bezeichnet mit h_0 den Werth von h für den Mittelpunkt des Feldes, so wird:

$$\Delta(\delta'-\delta) = \left\{\frac{r^2-d'^2}{d'} - \frac{r^2-d^2}{d}\right\}h_0$$
$$= \frac{r^2(d-d')}{dd'}h_0 + \frac{dd'(d-d')}{dd'}h_0,$$

also:

$$\Delta(\delta'-\delta) = -\frac{k(\delta'-\delta)r^2}{(\delta-D)(\delta'-D)}[1-\operatorname{tang}\zeta_0\cos\eta_0\operatorname{tang}\delta_0+\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\sin\eta_0{}^2]$$
$$-k(\delta'-\delta)[1-\operatorname{tang}\zeta_0\cos\eta_0\operatorname{tang}\delta_0+\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\sin\eta_0{}^2].$$

Vereinigt man dies mit dem ersten Theile der Correction der Declination, welche durch die zweite der Gleichungen (a) gegeben ist, so erhält man

$$\Delta(\delta'-\delta) = k(\delta'-\delta)[\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\cos 2\eta_0+\operatorname{tang}\zeta_0\cos\eta_0\operatorname{tang}\delta_0]$$
$$-k(\delta'-\delta)\frac{r^2}{(\delta-D)(\delta'-D)}$$
$$\times[1+\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\sin\eta_0{}^2-\operatorname{tang}\zeta_0\cos\eta_0\operatorname{tang}\delta_0]$$

als Ausdruck der vollständigen Correction des Declinationsunterschiedes. Gewöhnlich kann man nun hier die in $\operatorname{tang}\zeta_0$ multiplicirten Glieder fortlassen und erhält dann einfach:

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = k(\delta'-\delta)\frac{\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\sin 2\eta_0}{\cos\delta_0}$$
$$\Delta(\delta'-\delta) = k(\delta'-\delta)\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\cos 2\eta_0 \qquad (B)$$
$$-k(\delta'-\delta)\frac{r^2}{(\delta-D)(\delta'-D)}[\operatorname{tang}\zeta_0{}^2\sin\eta_0{}^2+1].$$

Beispiel. Den 9ten September 1849 wurde in Bilk der Planet Metis mit einem Sterne verglichen, dessen scheinbarer Ort

$$\alpha = 22^h\,1^m\,59^s.63,\quad \delta = -21^\circ\,43'\,27''.08$$

war. Um $23^h\,23^m\,19^s.3$ Sternzeit wurde beobachtet:

$$\alpha'-\alpha = +1^m\,9^s.65 \qquad = +17'\,24''.75$$
$$\delta'-D = -5'\,17''.5, \qquad \delta-D = +6'\,34''.2$$
$$\delta'-\delta = -11'\,51''.7 \text{ und es war } r = 9'\,26''.29.$$

Rechnet man nun mit

$$t_0 = 1^h\,20^m\,45^s = 20^\circ\,11', \quad \delta_0 = -21^\circ\,49'.4 \text{ und } \varphi = 51^\circ\,12'.5$$

ζ und η, so erhält man:

$$\text{cotang}\, n = 9.34516 \qquad N = 37^\circ\,1'.9$$

und

$$\eta = 12^\circ\,55'.3 \qquad \zeta = 75^\circ\,9'.6.$$

Aus den Tafeln für k findet man für diese Zenithdistanz:

$$\log k = 6.4214,$$

und damit wird nun die Rechnung für den Einfluſs der Refraction nach den Formeln (B) die folgende:

$$\begin{array}{llll}
\log k = 6.4214 & \sin 2\eta_0 \;\; 9.6394 & & 0.0667_n \\
\log(\delta'-\delta) = 2.8523_n & \qquad 0.4273_n & & \cos\delta_0 \;\; \underline{9.9677} \\
\text{tang}\,\zeta^2 = \underline{1.1536} & \cos 2\eta_0 \;\; \underline{9.9542} & & \Delta(\alpha'-\alpha) = -1''.25 \\
\qquad 0.4273_n & \text{I Glied}\,\Delta(\delta'-\delta) = -2''.41 & & \\
\sin\eta^2 \;\; 8.6990 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log(\text{tang}\,\zeta^2 \sin\eta^2 + 1) = & 0.2335 \\
\log r^2 & 5.5061 \\
k(\delta'-\delta) & \underline{9.2737_n} \\
 & 5.0133_n \\
\log(\delta - D)(\delta' - D) & \underline{5.0975_n} \\
\text{II Glied}\;\Delta(\delta'-\delta) & +0''.82
\end{array}$$

$$\Delta(\alpha'-\alpha) = -1''.25$$
$$\Delta(\delta'-\delta) = -3''.23.$$

Mithin ist der wegen der Refraction verbesserte Rectascensions- und Declinationsunterschied:

$$\alpha' - \alpha = +17'\,23''.50$$
$$\delta' - \delta = -11'\,54''.93.$$

46. Micrometer, durch welche Positionen und Distanzen gemessen werden. Bezeichnen $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$ den mit Refraction behafteten Rectascensions- und Declinationsunterschied zweier Sterne, $a'-a$ und $d'-d$ den davon befreiten, so ist:

$$a' - a = \alpha' - \alpha - k(\delta'-\delta)\,\frac{d\,.\,\dfrac{\text{tang}\,\zeta\,\sin\eta}{\cos\delta}}{d\delta}$$
$$- k(\alpha'-\alpha)\,\frac{d\,.\,\dfrac{\text{tang}\,\zeta\,\sin\eta}{\cos\delta}}{d\alpha},$$

wo die Werthe der Differentialquotienten wieder für die in der Mitte zwischen beiden Sternen liegenden ζ, η und δ zu nehmen sind, oder:

$$d(\alpha'-\alpha) = -k(\delta'-\delta)\,\frac{d\,.\,\dfrac{\text{tang}\,\zeta\,\sin\eta}{\cos\delta}}{d\delta}$$
$$+ k(\alpha'-\alpha)\,\frac{d\,.\,\dfrac{\text{tang}\,\zeta\,\sin\eta}{\cos\delta}}{dt}.$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$d(\delta'-\delta) = -k(\delta'-\delta)\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\zeta\cos\eta}{d\delta} + k(\alpha'-\alpha)\frac{d.\,\mathrm{tang}\,\zeta\cos\eta}{dt}.$$

Substituirt man die in No. 43 gefundenen Werthe der Differentialquotienten in diese Gleichungen, so werden dieselben:

$$d(\alpha'-\alpha) = k(\delta'-\delta)\frac{\mathrm{tang}\,\zeta^2\sin\eta\cos\eta - \mathrm{tang}\,\zeta\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\delta}{\cos\delta}$$
$$+ k(\alpha'-\alpha)[\mathrm{tang}\,\zeta^2\sin\eta^2 - \mathrm{tang}\,\zeta\cos\eta\,\mathrm{tang}\,\delta + 1]$$
$$d(\delta'-\delta) = k(\delta'-\delta)[\mathrm{tang}\,\zeta^2\cos\eta^2 + 1]$$
$$+ k(\alpha'-\alpha)[\mathrm{tang}\,\zeta^2\cos\eta\sin\eta\cos\delta + \mathrm{tang}\,\zeta\sin\eta\sin\delta].$$

Man hat nun aber, wenn Δ und π die scheinbare Distanz und den scheinbaren Positionswinkel bedeuten:

$$\cos\delta(\alpha'-\alpha) = \Delta\sin\pi$$

und

$$\delta'-\delta = \Delta\cos\pi,$$

also:

$$\mathrm{tang}\,\pi = \frac{\cos\delta(\alpha'-\alpha)}{\delta'-\delta}$$

und

$$\Delta = \cos\delta(\alpha'-\alpha)\sin\pi + (\delta'-\delta)\cos\pi.$$

Bezeichnen dann Δ' und π' die wahre Distanz und den wahren Positionswinkel, so hat man:

$$\pi' = \pi + \frac{\cos\pi\cos\delta\,d(\alpha'-\alpha) - \sin\pi\,d(\delta'-\delta)}{\Delta}$$
$$\Delta' = \Delta + \sin\pi\cos\delta\,d(\alpha'-\alpha) + \cos\pi\,d(\delta'-\delta).$$

Substituirt man nun die vorher gefundenen Werthe von $d(\alpha'-\alpha)$ und $d(\delta'-\delta)$ und ordnet nach Potenzen von tang ζ, so erhält man, wenn man in die Ausdrücke von $d(\alpha'-\alpha)$ und $d(\delta'-\delta)$ statt $\alpha'-\alpha$ und $\delta'-\delta$ jetzt Δ und π einführt:

$$\pi' = \pi + k\,\mathrm{tang}\,\zeta^2[\sin\pi\cos\eta\cos\pi\cos\pi + \sin\eta\sin\eta\sin\pi\cos\pi$$
$$- \cos\eta\cos\eta\cos\pi\sin\pi - \sin\eta\cos\eta\sin\pi\sin\pi]$$
$$- k\,\mathrm{tang}\,\zeta[\cos\pi\cos\pi\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\delta + \sin\pi\cos\pi\cos\eta\,\mathrm{tang}\,\delta$$
$$+ \sin\pi\sin\pi\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\delta]$$
$$+ k\sin\pi\cos\pi - k\sin\pi\cos\pi,$$

oder einfacher, wenn man die in tang ζ multiplicirten Glieder vernachlässigt:

$$\pi' = \pi - k\,\mathrm{tang}\,\zeta^2\sin(\pi-\eta)\cos(\pi-\eta).$$

Ferner erhält man:

$$\Delta' = \Delta + k\Delta\,\mathrm{tang}\,\zeta^2[\sin\pi\cos\pi\sin\eta\cos\eta + \sin\pi^2\sin\eta^2 + \cos\pi^2\cos\eta^2$$
$$+ \sin\pi\cos\pi\sin\eta\cos\eta]$$
$$- k\Delta\,\mathrm{tang}\,\zeta[\cos\pi\sin\pi\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\delta + \sin\pi\sin\pi\cos\eta\,\mathrm{tang}\,\delta$$
$$- \sin\pi\cos\pi\sin\eta\,\mathrm{tang}\,\delta]$$
$$+ k\Delta[\sin\pi^2 + \cos\pi^2],$$

oder einfacher genähert:

$$\Delta' = \Delta + k\Delta[\mathrm{tang}\,\zeta^2\cos(\pi-\eta)^2 + 1].$$

IX. Einfluſs der Präcession, Nutation und Aberration auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Sterne.

47. Die Lunisolarpräcession und Nutation ändert die Lage des Declinationskreises und somit den Positionswinkel eines Sterns an einem andern. Aus dem Dreiecke zwischen dem Pole der Ecliptic, dem des Aequators und dem Sterne erhält man aber leicht nach den Formeln in No. 11 des ersten Abschnitts und der dritten der Differentialgleichungen (11) in No. 9 der Einleitung für die Aenderung des Winkels η, den der Declinationskreis eines Sterns mit dem Breitenkreise macht:

$$\cos\delta\, d\eta = -\sin\varepsilon \,.\, \sin\alpha\, d\lambda + \cos\alpha\, d\varepsilon,$$

indem $dB=0$ ist, da die Breiten der Sterne durch die Lunisolarpräcession und Nutation nicht geändert werden. Die Summe des Winkels η und des Positionswinkels p eines andern Sterns an dem hier betrachteten ist gleich dem Winkel, welchen der Breitenkreis mit dem beide Sterne verbindenden gröſsten Kreise macht, und da dieser durch die Präcession und Nutation nicht geändert wird, so muſs die Aenderung von p gleich der von η, aber mit entgegengesetztem Zeichen sein, sodaſs:

$$\cos\delta\, dp = \sin\varepsilon \sin\alpha\, d\lambda - \cos\alpha\, d\varepsilon. \qquad (a)$$

Da die Lunisolarpräcession die Schiefe der Ecliptic nicht ändert, so erhält man den jährlichen Einfluſs der Präcession auf den Positionswinkel aus:

$$\cos\delta \frac{dp}{dt} = \sin\alpha \sin\varepsilon \frac{d\lambda}{dt},$$

oder die jährliche Aenderung von p:

$$\frac{dp}{dt} = n \sin\alpha \sec\delta$$

$$\text{wo } n = 20''.06442 - 0''.0000970204\, t$$

ist. Soll dieselbe angewandt werden, um die Aenderung während eines langen Zeitraums zu berechnen, so sind die Werthe von n, α und δ für die Mitte desselben zu nehmen, und der damit gefundene Werth von $\frac{dp}{dt}$ ist mit der Zwischenzeit zu multipliciren.

Um die durch die Nutation hervorgebrachten Aenderungen zu finden, muſs man in (a) statt $d\lambda$ und $d\varepsilon$ die in No. 5 des zweiten Abschnitts gegebenen Ausdrücke setzen. Läſst

man zur Abkürzung die kleinen Glieder weg, so erhält man für die vollständige Aenderung durch Präcession und Nutation:

$$dp = +20''.0644 \sin\alpha \sec\delta + [-6''.8650 \sin ☊ + 0''.0825 \sin 2 ☊ - 0''.5054 \sin 2 ☉] \sin\alpha \sec\delta - [9''.2231 \cos ☊ - 0''.0897 \cos 2 ☊ + 0''.5509 \cos 2 ☉] \cos\alpha \sec\delta,$$

oder, wenn man die in No. 1 des vierten Abschnitts eingeführten Bezeichnungen benutzt:

$$dp = A \,.\, n \sin\alpha \sec\delta + B \cos\alpha \sec\delta,$$

welche Formel also den Unterschied des durch Präcession und Nutation geänderten Positionswinkels von dem auf das mittlere Aequinoctium und den mittleren Aequator zu Anfange des Jahres bezogenen giebt.

Um nun auch den Einflufs der Aberration auf die Distanz und den Positionswinkel zweier Sterne zu finden, hat man nach den Ausdrücken in No. 1 des vierten Abschnitts:

für die Aberration in Rectascension: $Cc + Dd$

und für die Aberration in Declination: $Cc' + Dd'$,

$$\text{wo } C = -20''.445 \cos\varepsilon \cos ☉, \quad D = -20''.445 \sin ☉$$
$$c = \sec\delta \cos\alpha, \quad c' = \operatorname{tang}\varepsilon \cos\delta - \sin\delta \sin\alpha$$
$$d = \sec\delta \sin\alpha, \quad d' = \sin\delta \cos\alpha.$$

Ist nun λ und ν der Unterschied der Rectascensionen und Declinationen der beiden Sterne, so erhält man die Aenderungen dieser Unterschiede durch die Aberration, gleich dem Unterschiede der Aberration für die beiden Sterne, aus den Gleichungen:

$$\Delta\lambda = C \,.\, \Delta c + D \,.\, \Delta d$$
$$\Delta\nu = C \,.\, \Delta c' + D \,.\, \Delta d',$$

$$\text{wo: } \Delta c = -\sec\delta \sin\alpha \,.\, \lambda + \sec\delta \operatorname{tang}\delta \cos\alpha \,.\, \nu$$
$$\Delta d = \sec\delta \cos\alpha \,.\, \lambda + \sec\delta \operatorname{tang}\delta \sin\alpha \,.\, \nu$$
$$\Delta c' = -\sin\delta \cos\alpha \,.\, \lambda - [\operatorname{tang}\varepsilon \sin\delta + \cos\delta \sin\alpha]\nu$$
$$\Delta d' = -\sin\delta \sin\alpha \,.\, \lambda + \cos\delta \cos\alpha \,.\, \nu.$$

Es wird daher, wenn man diese Werthe einsetzt:

$$\cos\delta\,\Delta\lambda = C[-\sin\alpha \,.\, \lambda + \operatorname{tang}\delta \cos\alpha \,.\, \nu] + D[\cos\alpha \,.\, \lambda + \operatorname{tang}\delta \sin\alpha \,.\, \nu]$$
$$\Delta\nu = -C[\sin\delta \cos\alpha \,.\, \lambda + (\operatorname{tang}\varepsilon \sin\delta + \cos\delta \sin\alpha)\,\nu] - D[\sin\delta \sin\alpha \,.\, \lambda - \cos\delta \cos\alpha \,.\, \nu].$$

Nun ist aber, wenn man die Distanz und den Positionswinkel mit s und P bezeichnet:

$$s \,.\, \sin P = \lambda \cos\delta$$
$$s \,.\, \cos P = \nu,$$

also: $$s^2 = \lambda^2 \cos\delta^2 + \nu^2, \quad \operatorname{tang} P = \frac{\lambda \cos\delta}{\nu},$$

mithin: $$s \,.\, \Delta s = \cos\delta^2 \lambda \,.\, \Delta\lambda + \nu\Delta\nu - \cos\delta \sin\delta\, \lambda^2\, (Cc' + Dd').$$

Substituirt man hierin die eben gefundenen Werthe für $\Delta\lambda$ und $\Delta\nu$, sowie die Werthe für c' und d', so erhält man nach einer leichten Reduction:

$$s\,.\,\Delta s = [\lambda^2 \cos\delta^2 + \nu^2]\,[-C(\tang\varepsilon\sin\delta + \cos\delta\sin\alpha) + D\cos\delta\cos\alpha]$$

oder: $$\Delta s = -C\,.\,s\,[\tang\varepsilon\sin\delta + \cos\delta\sin\alpha] + D\,.\,s\cos\delta\cos\alpha.$$

Ferner wird:

$$s^2\,dP = \nu\cos\delta\,.\,\Delta\lambda - \lambda\cos\delta\,\Delta\nu - \lambda\sin\delta\,\nu\,[Cc' + Dd'],$$

woraus man wieder durch Substitution der Werthe von $\Delta\lambda$, $\Delta\nu$, c' und d' nach leichter Reduction findet:

$$dP = C\tang\delta\cos\alpha + D\tang\delta\sin\alpha.$$

Führt man daher die folgenden Bezeichnungen ein:

$$a' = \frac{n}{60}\sec\delta\sin\alpha$$

$$b' = \frac{\sec\delta\cos\alpha}{60}$$

$$c' = \frac{\tang\delta\cos\alpha}{60} \qquad c = -\frac{s}{w}[\tang\varepsilon\sin\delta + \cos\delta\sin\alpha]$$

$$d' = \frac{\tang\delta\sin\alpha}{60} \qquad d = \frac{s}{w}\cos\delta\cos\alpha,$$

wo die Factoren $\frac{1}{60}$ und $\frac{1}{w} = \frac{1}{206265}$ hinzugefügt sind, um die Correctionen des Positionswinkels und der Distanz beziehlich in Bogenminuten und Bogensecunden zu erhalten, so wird:

die beobachtete Entfernung = der wahren $+ cC + dD$

und der beobachtete Positionswinkel = dem wahren für den Anfang des Jahres $+ a'A + b'B + c'C + d'D$.

Da c, d, c' und d' von dem Positionswinkel unabhängig sind, so folgt daraus, dafs die Aberration die Entfernungen, welche Richtung sie auch haben mögen, in einem gleichen Verhältnisse ändert, und die Positionswinkel alle um eine gleiche Gröfse. Wenn daher die Peripherie eines Kreises, von kleinem Halbmesser um einen Stern beschrieben, mit andern Sternen besetzt wäre, so würde ein solcher Kreis durch die Aberration nur vergröfsert und verkleinert und auch gedreht; aber er bleibt immer ein Kreis und die Winkel zwischen den Radien der Sterne bleiben immer dieselben.

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, Stallschreiberstr. 47.







